УДК 338.24.01

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТИМУЛИРОВАНИЯ

© 2005 О. В. Павлов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Предлагается численный способ решения задачи стимулирования, основанный на использовании метода Ньютона. Приводятся примеры решения задач стимулирования предложенным методом.

1. Постановка задачи

Адекватное материальное вознаграждение исполнителя в соответствии с затраченными усилиями является актуальной задачей для любой организации. Математические модели задач стимулирования рассматриваются в теории активных систем [1-4] и в теории иерархических игр [5, 6].

Под системой стимулирования понимается соответствие между материальным вознаграждением, выплачиваемым заказчиком (центром), и результатами деятельности исполнителя (агента). Агент выполняет действие $y \geq 0$, за которое центр выплачивает материальное вознаграждение. Под действием понимается объем производимой продукции, количество отработанных часов и т. д. В качестве агента и центра может рассматриваться как фирма, так и отдельный человек. В зависимости от результатов деятельности агента центр получает доход *H(y)* и выплачивает агенту материальное вознаграждение. Зависимость вознаграждения от действия агента называется функцией стимулирования $\sigma(y)$. Целевая функция центра записывается:

$$\Phi(y) = H(y) - \sigma(y).$$

Целевая функция агента представляет разность между материальным вознаграждением $\sigma(y)$ и затратами агента, выраженными в денежном выражении *c(y)*:

$$f(y) = \sigma(y) - c(y).$$

В практической деятельности фирм система стимулирования, как правило, уже выбрана центром, поэтому задача сводится к определению параметра системы стимулирования. Сформулируем эту задачу:

$$\begin{cases} H(y^*) - \sigma(y^*, \alpha) \to max, & (1) \\ \sigma(y^*, \alpha) - c(y^*) \geq \sigma(y, \alpha) - c(y), \forall y \geq 0, & (2) \end{cases}$$

где α - параметр системы стимулирования, y^* - действие, которое выбирает агент при выбранном центром параметре системы стимулирования (реакция агента).

Методика решения таких задач состоит из двух этапов [2]. На первом этапе из условия (2) определяется выбираемое агентом действие y^*. Реакция агента находится как аналитическая функция от параметра системы стимулирования α. На втором этапе найденная реакция агента подставляется в (1) и решается оптимизационная задача для центра относительно параметра α. В результате решения этой задачи определяется параметр системы стимулирования. Однако при решении практических задач стимулирования не всегда удается найти реакцию агента y^* в виде аналитической функции, зависящей от параметра системы стимулирования. Для решения таких задач в данной статье предлагается численный алгоритм, основанный на методе Ньютона.

2. Численный метод определения оптимальных параметров системы стимулирования

Предполагается, что целевые функции агента $f(y, \alpha)$ и центра $\Phi(y, \alpha)$ выпуклы и дважды дифференцируемы.

Для определения оптимальных параметров системы стимулирования предлагается численный метод, основанный на методе Ньютона [7].

Алгоритм поиска оптимального параметра системы стимулирования

1. С помощью метода Ньютона решается оптимизационная задача для центра (1). Задаются начальные приближения для параметра системы стимулирования $\alpha[0]$.

2. В точке $\alpha[k],\ k = 0,1,2,...$ по приближенным формулам [8] вычисляются первая и вторая производная целевой функции центра:

$$\frac{d\Phi(y^*,\alpha[k])}{d\alpha[k]} \approx \frac{\Phi(y^*,\alpha[k]+2h_\alpha) - \Phi(y^*,\alpha[k])}{2h_\alpha}, \quad (3)$$

$$\frac{d^2\Phi(y^*,\alpha[k])}{d\alpha[k]^2} \approx$$
$$\approx \frac{\Phi(y^*,\alpha[k]) - 2\Phi(y^*,\alpha[k]+h_\alpha) + \Phi(y^*,\alpha[k]+2h_\alpha)}{h_\alpha^2}, \quad (4)$$

где h_α - приращение параметра $\alpha[k]$ на k-ой итерации.

Для численного дифференцирования по формулам (3)-(4) необходимо вычислять значение целевой функции центра $\Phi(y^*,\alpha[k])$ в трех точках: $\alpha[k],\ \alpha[k]+h_\alpha,\ \alpha[k]+2h_\alpha$. Целевая функция центра зависит от параметра системы стимулирования $\alpha[k]$ и реакции агента y^*. Для нахождения реакции агента y^* на k-ой итерации также используется метод Ньютона, описанный в пункте 3. После определения в пункте 3 реакции агента вычисляются первая и вторая производные целевой функции центра по формулам (3), (4) и осуществляется переход к пункту 4.

3. Алгоритм поиска реакции агента при заданном параметре $\alpha[k]$.

3.1. Задаются начальные приближения для реакции агента $y[0]$.

3.2. В точке $y[j],\ j = 0,1,2,...,$ вычисляются первая и вторая производная функции агента. Для численного дифференцирования целевой функции агента используются приближенные формулы [8]

$$\frac{df(y[j],\alpha[k])}{dy[j]} \approx$$
$$\approx \frac{f(y[j]+2h_y,\alpha[k]) - f(y[j],\alpha[k])}{2h_y},$$

$$\frac{d^2f(y[j],\alpha[k])}{dy[j]^2} \approx$$
$$\approx \frac{f(y[j],\alpha[k]) - 2f(y[j]+h_y,\alpha[k]) + f(y[j]+2h_y,\alpha[k])}{h_y^2},$$

где h_y - приращение для реакции агента $y[j]$ на j-ой итерации.

3.3. На каждой j-ой итерации поиска реакции агента вычисляются значения $y[j+1]$ при известном параметре системы стимулирования $\alpha[k]$ в соответствии с методом Ньютона

$$y[j+1] =$$
$$= y[j] - \left(\frac{d^2f(y[j],\alpha[k])}{dy[j]^2}\right)^{-1} \frac{df(y[j],\alpha[k])}{dy[j]}.$$

3.4. Проверяется условие выхода из итерационного процесса

$$|y[k+1] - y[k]| \le \varepsilon_y,$$

где ε_y - заданная малая величина для итерационного процесса поиска реакции агента y^*.

Если условие выполняется, то итерационный процесс прекращается, в противном случае осуществляется переход к подпункту 3.2. В случае останова итерационного процесса и успешного определения реакции агента y^* осуществляется возврат к пункту 2, в котором вычисляются первая и вторая производная целевой функции центра.

4. На каждой k-ой итерации поиска параметра системы стимулирования вычисляется новое значение параметра α в соответствии с методом Ньютона

$$\alpha[k+1] = \alpha[k] - \left(\frac{d^2\Phi(y^*,\alpha[k])}{d\alpha[k]^2}\right)^{-1} \frac{d\Phi(y^*,\alpha[k])}{d\alpha[k]}.$$

5. Проверяется условие выхода из итерационного процесса поиска параметра системы стимулирования

$$\left|\alpha[k+1]-\alpha[k]\right| \le \varepsilon_\alpha,$$

где ε_α - заданная малая величина для итерационного процесса поиска параметра α. Если условие выполняется, то итерационный процесс прекращается, в противном случае осуществляется переход к пункту 2.

На основе предложенного алгоритма разработан программный модуль на языке программирования высокого уровня Turbo Pascal 7.0.

3. Примеры численного решения задач стимулирования

С помощью разработанного программного обеспечения были решены задачи определения параметра системы стимулирования.

Пример 1. Для тестирования предложенного метода была решена задача, для которой имеется аналитическое решение. Центр поручает агенту выполнение работы по производству продукции, используя пропорциональную систему стимулирования $\sigma(y,\alpha)=\alpha y$. Параметр α является ставкой оплаты единицы произведенной агентом продукции. Цена, по которой центр продает продукцию, p. Известны затраты агента, выраженные в денежной форме: $c(y)=\dfrac{\beta y^2}{2}$, где β - коэффициент эффективности агента, который переводит затраты агента в денежное выражение. Доход центра равен $H(y)=py$.

Целевая функция центра имеет вид $\Phi(y,\alpha)=py-\alpha y\to max$. Целевая функция агента $f(y,\alpha)=\alpha y-\dfrac{\beta y^2}{2}$. Задача определения параметра системы стимулирования α формулируется в виде

$$\begin{cases} py^*-\alpha y^*\to max, & (5)\\ \alpha y^*-\dfrac{\beta y^{*2}}{2}\ge \alpha y-\dfrac{\beta y^2}{2},\ \forall\, y\ge 0. & (6)\end{cases}$$

Данная задача допускает аналитическое решение. Из условия (6) найдем реакцию агента как функцию параметра системы стимулирования. Приравняем производную функции агента по y нулю и, решив полученное уравнение, получим реакцию агента

$$y^*=\frac{\alpha}{\beta}. \qquad (7)$$

Из (7) следует, что реакция агента прямо пропорциональна ставке оплаты продукции α и обратно пропорциональна коэффициенту эффективности β.

Подставив (7) в (5), получим оптимизационную задачу для центра

$$\Phi(\alpha)=p\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\alpha^2}{\beta}\to max. \qquad (8)$$

Приравняв производную целевой функции центра по α нулю и решив полученное уравнение, найдем параметр системы стимулирования

$$\alpha=\frac{p}{2}. \qquad (9)$$

Таким образом, параметр системы стимулирования, в данном случае ставка оплаты единицы продукции, определяется рыночной ценой продукции и не зависит от коэффициента эффективности агента.

Данная задача была решена предложенным численным методом при следующих исходных данных: p = 1000 руб., β = 10, $\varepsilon_y=\varepsilon_\alpha$ = 10^{-6}. В результате решения задачи были определены оптимальный параметр системы стимулирования α = 500,04 и реакция агента y^*= 49,99 ед., что хорошо совпадает с аналитическим решением для исходных данных: α = 500, y^*= 50 ед. Было проведено исследование сходимости предложенного метода при различных начальных приближениях $\alpha[0]$ и $y[0]$. Исследования показали устойчивую сходимость метода: количество итераций k при поиске оптимального значения составило не больше 3, количество итераций j при поиске реакции агента не превышало 2. Хорошая сходимость метода объясняется тем, что целевая функция агента является квадратичной.

Пример 2. Центр поручает агенту выполнение работы по производству продукции, используя пропорциональную систему стимулирования $\sigma(y,\alpha)=\alpha y$. Параметр α является ставкой оплаты единицы произведенной агентом продукции. Цена, по которой центр продает продукцию, p. При производстве продукции агент выполняет две операции, затраты на осуществление которых, выраженные в денежной форме, являются степенными функциями: $c_1(y)=\beta_1 y^{a_1}$, $c_2(y)=\beta_2 y^{a_2}$, где β_1,β_2 - коэффициенты эффективности, которые переводят затраты агента в денежное выражение при выполнении первой и второй операций соответственно. Целевая функция центра имеет вид $\Phi(y,\alpha)=py-\alpha y\to max$. Целевая функция агента: $f(y,\alpha)=\alpha y-\beta_1 y^{a_1}-\beta_2 y^{a_2}$.

Задачу определения параметра системы стимулирования α можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{cases} py^*-\alpha y^*\to max, & (10)\\ \alpha y-\beta_1 y^{*a_1}-\beta_2 y^{*a_2}\ge & \\ \ge \alpha y-\beta_1 y^{a_1}-\beta_2 y^{a_2},\ \forall\, y\ge 0. & (11)\end{cases}$$

При нахождении реакции агента, удовлетворяющей условию (11), получается иррациональное уравнение, которое не имеет аналитического решения.

Для решения задачи был применен предложенный численный метод. Ниже приводятся результаты решения задачи для следующих начальных данных: $p=1000$; $a_1=1{,}7$; $a_2=2{,}8$; $\beta_1=0{,}1$; $\beta_2=0{,}5$ и начальных приближениях $\alpha[0]=30$ и $y[0]=5$.

В результате решения задачи были определены оптимальный параметр системы стимулирования α = 357,81 и объем произведенной агентом продукции y^*= 21,69 ед. На рис. 1 и 2 приводится типичный пример сходимости численного метода. Было исследовано влияние цены p и коэффициентов эффективности β_1 и β_2 на параметр системы стимулирования α и реакцию агента y^* при указанных выше начальных данных (рис. 3-8). Отметим, что в отличие от примера 1 влияние на параметр системы стимулирования оказывает не только цена p, но и коэффициенты эффективности β_1 и β_2.

Увеличение цены p продукции приводит к увеличению ставки оплаты единицы продукции α. На рис. 3 с помощью метода наименьших квадратов построена зависимость параметра α от цены p:

α = 35,74p + 322,04.

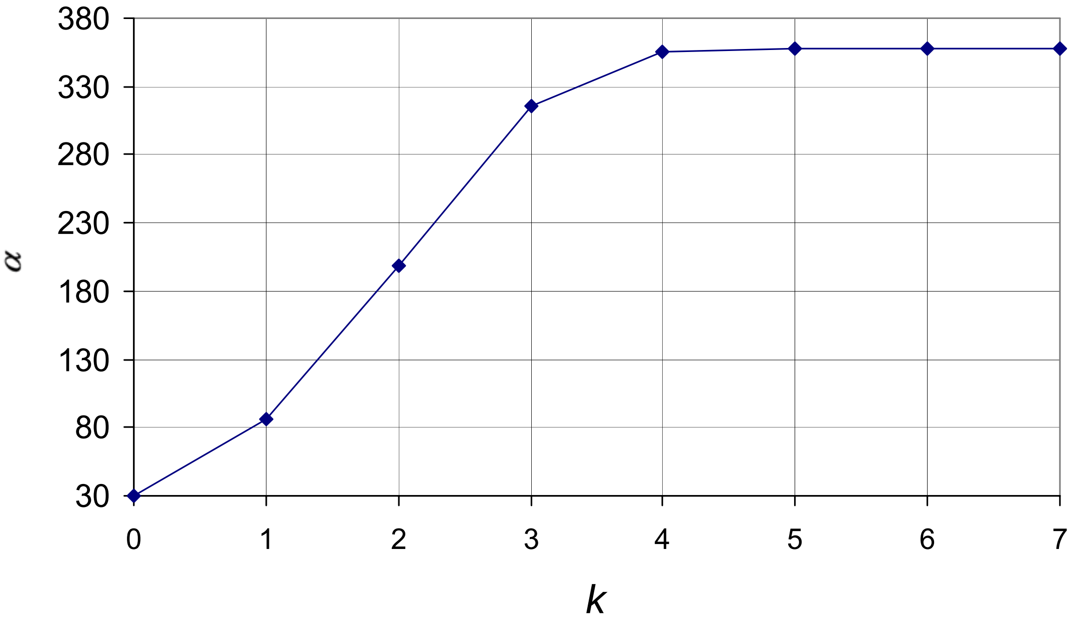

Рис. 1. Зависимость параметра системы стимулирования α от номера итерации k

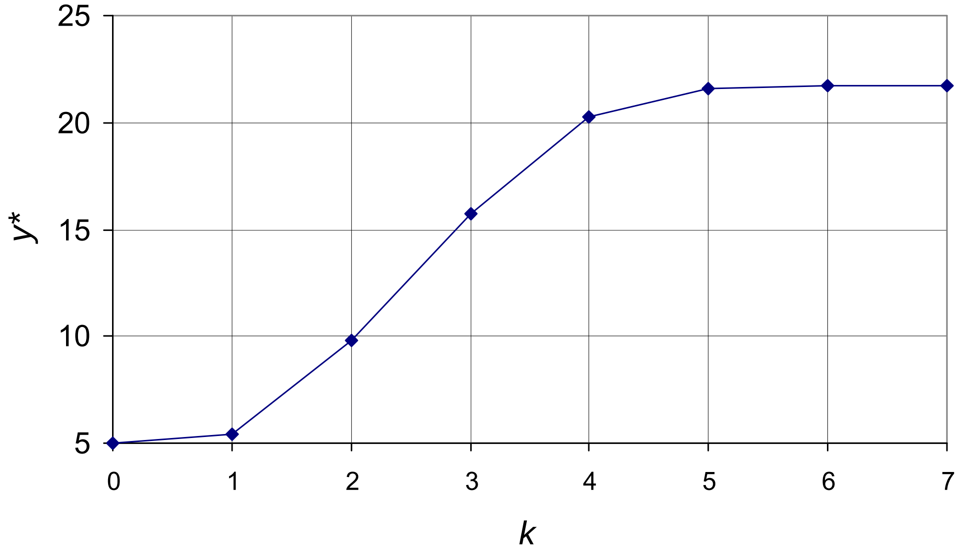

Рис. 2. Зависимость реакции агента y^* от номера итерации k

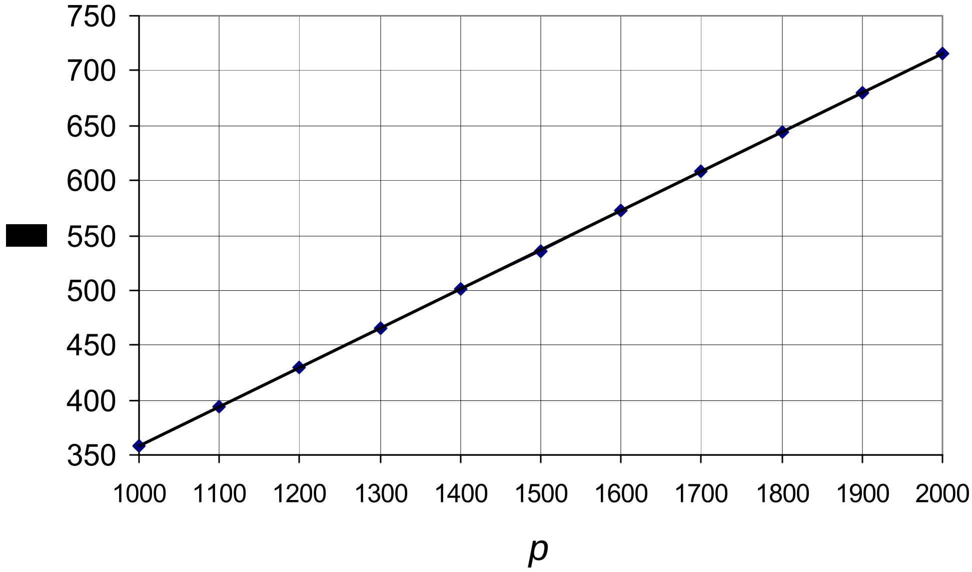

Рис. 3. Зависимость параметра системы стимулирования α от цены продукции p

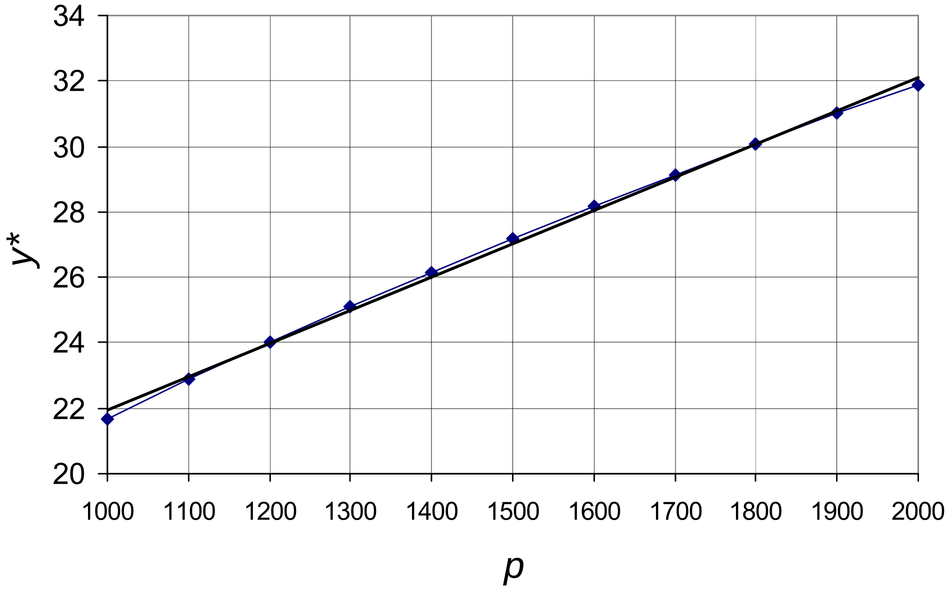

Рис. 4. Зависимость реакции агента y^* от цены продукции p

Увеличение цены p продукции приводит к увеличению объема производимой продукции агентом (рис. 4). Эта зависимость определена с помощью метода наименьших квадратов:

$y^* = 1{,}02p + 20{,}93.$

Зависимость параметра системы стимулирования α от коэффициентов эффективности агента β_1 и β_2 показана на рис. 5, 7. Увеличение коэффициентов эффективности приводит к увеличению параметра системы стимулирования α центром:

$\alpha = 5{,}16\,\beta_1 + 358{,}43, \quad \alpha = 0{,}15\,\beta_2 + 357{,}81.$

Увеличение коэффициентов эффективности β_1, β_2, напротив, приводит к уменьшению объема производимой продукции агентом y^* (рис. 6, 8). Эти зависимости определены с помощью метода наименьших квадратов:

$y^* = -0{,}29\,\beta_1 + 21{,}69, \quad y^* = 4{,}10\,\beta_2^{-0{,}56}.$

Таким образом, проведенные расчеты показали применимость предложенного метода для решения практических задач стимулирования реальных организаций.

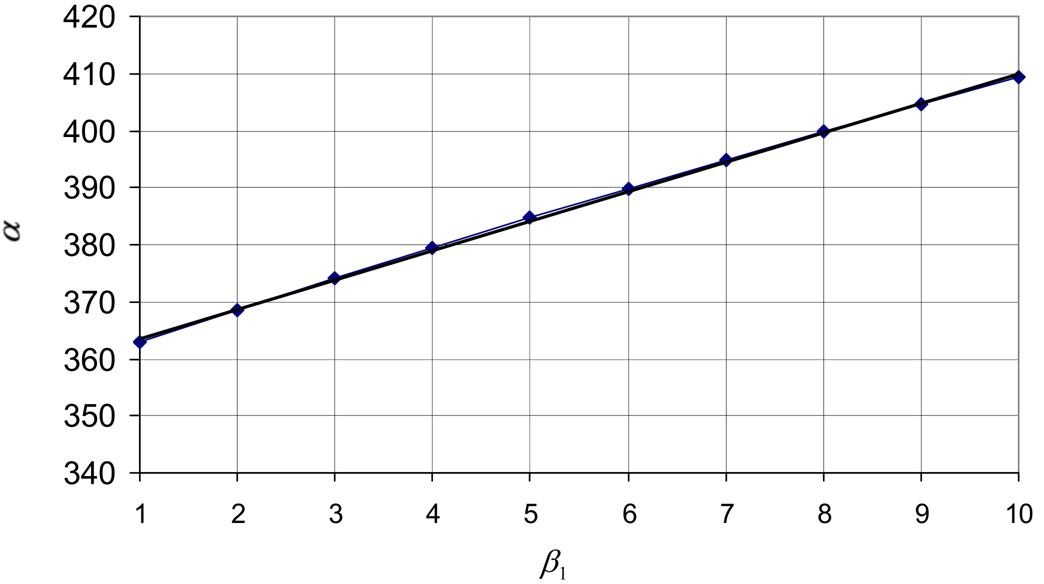

Рис. 5. Зависимость параметра системы стимулирования α от коэффициента эффективности агента β_1

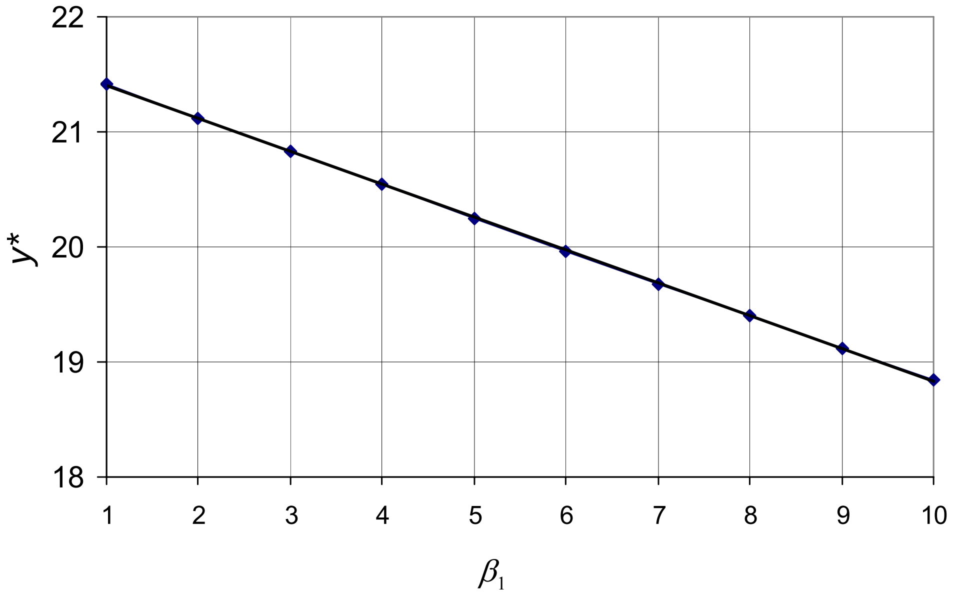

Рис. 6. Зависимость реакции агента y^* от коэффициента эффективности агента β_1

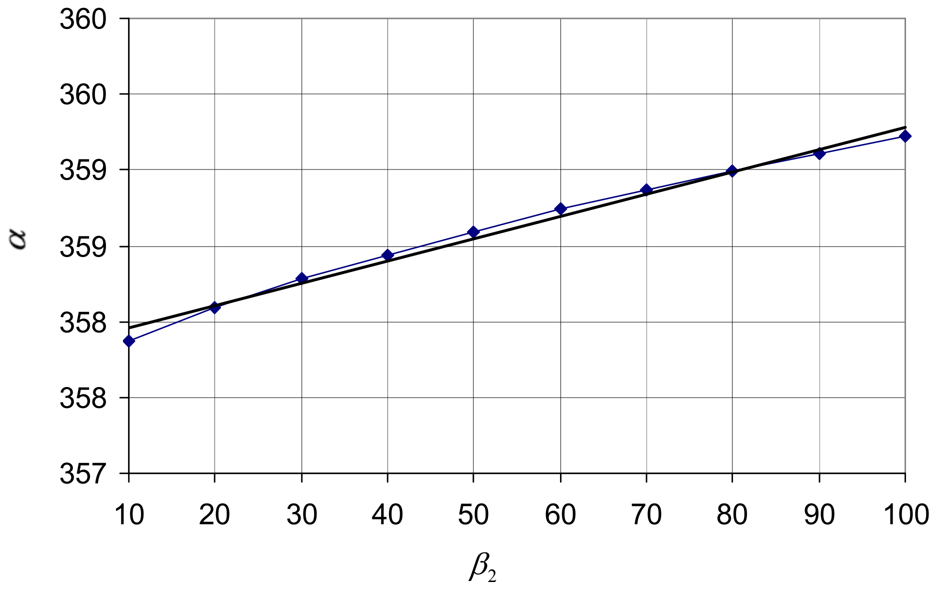

Рис. 7. Зависимость параметра системы стимулирования α *от коэффициента эффективности агента* β_2

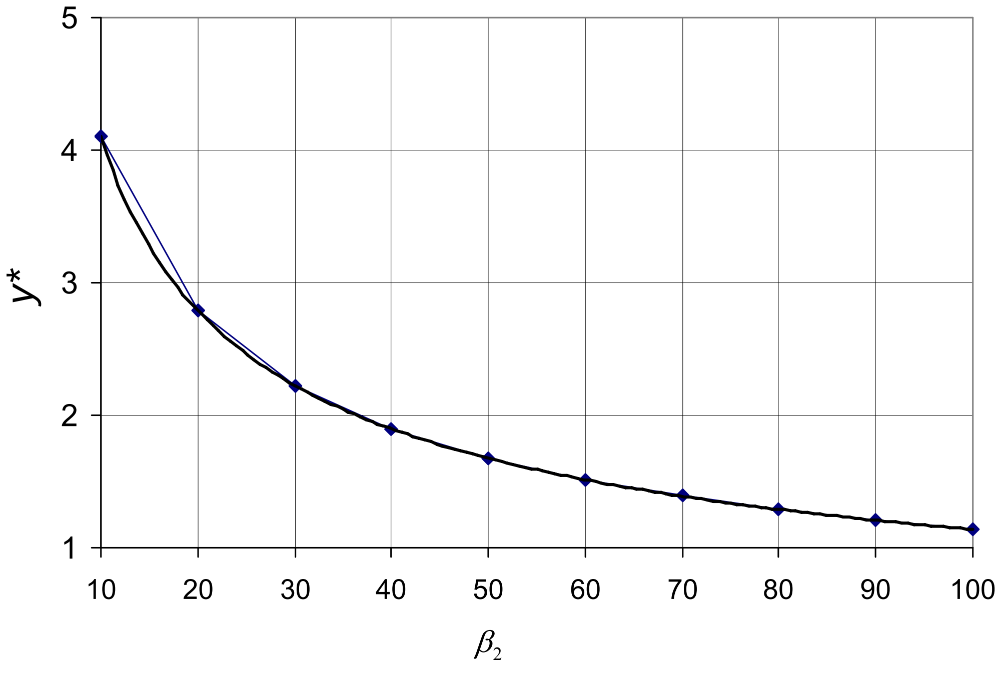

Рис. 8. Зависимость реакции агента y^* *от коэффициента эффективности агента* β_2

Список литературы

1. Бурков В. Н. Основы математической теории активных систем. - М. Наука, 1977.

2. Бурков В. Н., Новиков В. А. Как управлять проектами: - М.:СИНТЕГ-ГЕО, 1997.

3. Новиков Д. А. Стимулирование в организационных системах. - М.:СИНТЕГ, 2003.

4. Бурков В. Н. Новиков Д. А. Как управлять организациями. - М.: СИНТЕГ, 2004.

5. Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976.

6. Горелик В. А., Кононенко А. Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. – М.: Радио и связь, 1982.

7. Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В. Курс методов оптимизации: - М.: Наука, 1986.

8. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972.

NUMERICAL METHOD OF SOLVING INCENTIVE PROBLEMS

© 2005 O. V. Pavlov

Samara State Aerospace University

A numerical method of solving incentive problems based on the use of Newton’s method is proposed. Examples of solving incentive problems by the proposed method are given.