

ОПТИМАЛЬНОСТЬ ДЕЦЕНТРАЛИЗАЦИИ ИЕРАРХИИ УПРАВЛЕНИЯ НЕСВЯЗНОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СЕТЬЮ

© 2005 С. П. Мишин

Институт проблем управления РАН, г. Москва

Рассмотрен вопрос о целесообразности децентрализации (разделения) иерархии, управляющей несвязанными друг с другом участками технологической сети.

Введение

Любая экономическая или социальная система состоит из множества организованных некоторым образом агентов. В организации агенты действуют согласованно, добиваясь единой цели. При этом агенты специализированы, что позволяет им выполнять свои функции более эффективно по сравнению с множеством независимых (неорганизованных) агентов. Именно в этом состоит основное преимущество организаций, благодаря которому они повсеместно распространены в экономике.

Однако организация порождает ряд проблем. Основная проблема состоит в том, что взаимодействие агентов с различной специализацией должно быть скоординировано для достижения общей цели организации. Координация требует определенных усилий, направленных на планирование совместной работы, контроль ее результатов, согласование целей отдельных агентов с целью всей организации и т. д. Организация требует дополнительных затрат, связанных с необходимостью управления взаимодействием агентов.

В организации для выполнения управленческих функций выделяются специальные агенты – менеджеры. Организация представляет собой иерархию менеджеров, управляющих взаимодействием рядовых исполнителей. Иерархия позволяет разделить права принятия решений различными агентами организации (менеджеры и исполнители). Агенты на более высоких уровнях иерархии обладают большим объемом прав, чем агенты нижних уровней. Это позволяет реализовывать функции управления даже в случае конфликтов между агентами.

Иерархия позволяет снизить издержки взаимодействия исполнителей. Например, менеджеры иерархии могут планировать и управлять материальными, информационными или энергетическими потоками. Государственная иерархия повышает социальное благосостояние за счет контроля некоторых взаимодействий агентов (например, обеспечения практической реализации законов).

Однако менеджеры иерархии несут некоторые затраты. В современной экономике доля менеджеров в организациях достигает 40 % [24]. Таким образом, суммарные затраты иерархии весьма велики. Поэтому ключевой фактор эффективности организации – построение оптимальной иерархии, выполняющей управленческие функции с минимальными затратами.

Для небольшой организации может быть оптимальной двухуровневая иерархия с единственным менеджером. Однако при росте организации один менеджер уже не способен управлять всеми взаимодействиями исполнителей. Таким образом, необходимо нанять нескольких менеджеров на второй уровень иерархии, возложив на каждого из них ответственность за управление взаимодействиями (потоками) внутри подчиненной группы исполнителей. После этого взаимодействие между группами, которые подчинены менеджерам второго уровня, порождает взаимодействие между менеджерами. Этим взаимодействием также необходимо управлять с помощью менеджеров третьего уровня, и так далее. Подобным образом может быть построена многоуровневая иерархия (с единственным менеджером на высшем уровне). Вышестоящий менеджер (начальник) в иерархии уполномочен управлять своими

подчиненными (менеджерами или исполнителями), а подчиненные обеспечивают начальников информацией и выполняют их распоряжения.

В литературе по менеджменту процесс построения организации делится на **три фазы** [8, 25].

1. Разработка технологии. В реальных организациях технологию можно описать, например, с помощью методологии функционального моделирования [20]. Вначале определяются несколько агрегированных функций (закупки, продажи, производство, документооборот и т. п.). Затем производится их детальная декомпозиция (разбиение на подфункции) вплоть до элементарных функций, выполняемых одним человеком. В процессе декомпозиции выявляются связи между функциями. Выполняя некоторые элементарные функции, исполнитель взаимодействует с другими исполнителями в соответствии с этими связями. Таким образом, технология определяет попарные взаимодействия исполнителей (взвешенную сеть). Вес каждой связи сети соответствует интенсивности взаимодействия.

2. Разработка иерархии (органиграммы). Во второй фазе определяется количество менеджеров и их подчинение.

3. Разработка механизмов. В третьей фазе определяются полномочия начальников по отношению к их непосредственным подчиненным и порядок управления их взаимодействием.

На практике три фазы могут не быть независимыми. Однако крайне сложно оптимизировать все три фазы сразу. Таким образом, приходится моделировать и оптимизировать каждую фазу в отдельности.

Обычно первая фаза выполняется экспертом в соответствующей предметной области. Для оптимизации технологии разработаны математические модели различных отраслей промышленности, производств и т.п.

Имеется большое количество математических моделей третьей фазы. Детально изучены механизмы управления в двухуровневой иерархии [1, 17, 18, 19]. Разработаны механизмы управления для некоторых типов

многоуровневой иерархии [11, 12, 22].

Небольшое количество работ посвящено проблеме оптимизации второй фазы или второй и третьей фазы совместно [7, 13, 14, 15, 16, 21, 23, 25]. В общем случае эта проблема весьма сложна. В связи с этим в указанных выше работах делается достаточно много априорных предположений:

1. Каждый сотрудник имеет только одного начальника. Таким образом, иерархию можно представить в виде дерева.

2. Каждому начальнику подчинены только сотрудники предыдущего уровня иерархии.

3. Все менеджеры одного уровня одинаковы (с точки зрения критерия оптимизации), все исполнители также одинаковы.

4. Критерий оптимизации (затраты, прибыль, доход и т. п.) имеет весьма частный вид.

Недавно появился ряд работ, в которых рассматривается только вторая фаза, что позволяет не предполагать априорного выполнения свойств 1-4 [2, 3, 4, 5, 6, 9, 10]. В этих работах исследуется общая модель оптимизации иерархии, основанная на множестве исполнителей (на результате фазы 1) и функции затрат менеджеров.

Функция затрат определяется технологией и параметрами механизмов управления. Оптимальной считается иерархия, минимизирующая сумму затрат менеджеров. Как отмечается в [8], иерархия (органиграмма) – один из важнейших параметров организации. Поэтому при соответствующем выборе функции затрат найденная оптимальная иерархия может существенно повысить эффективность организации.

В данной работе исследуется частный случай – надстройка оптимальной иерархии, управляющей несвязанной технологической сетью. Рассмотрены достаточные условия, которым должна удовлетворять функция затрат, чтобы были оптимальными два предельных случая: полностью централизованная двухуровневая структура с единственным менеджером или децентрализованная структура, в которой над каждой частью технологической сети надстраивается отдельная иерархия.

1. Технологическая сеть, менеджеры и иерархии

Пусть $N = \{w_1, \dots, w_n\}$ – множество исполнителей, которые могут взаимодействовать друг с другом. Через w_{env} будем обозначать внешнюю среду, взаимодействующую с исполнителями. Обычно исполнители будут обозначаться через $w, w', w'' \in N$.

Функцией потока назовем следующую функцию:

$$f : (N \cup \{w_{env}\}) \times (N \cup \{w_{env}\}) \rightarrow R_+^p. \quad (1)$$

Для каждой пары исполнителей $w', w'' \in N$ вектор $f(w', w'')$ определяет интенсивность потоков между w' и w'' . Вектор содержит p неотрицательных компонент. Каждый компонент определяет интенсивность одного типа взаимодействия исполнителей (материальный, информационный или прочий тип потока). Например, $f(w', w'') = (1; 0)$ можно интерпретировать как наличие некоторых материальных потоков и отсутствие информационных потоков между w' и w'' . Вектор $f(w', w'') = (2; 1)$ обозначает больший поток, чем $(1; 0)$. Таким образом, технология определяет функцию потока f или взвешенную технологическую сеть f . Для любого $w \in N$ вектор $f(w_{env}, w)$ соответствует интенсивности потоков между исполнителем w и внешней средой.

Потоки между исполнителями назовем потоками внутри технологической сети, потоки между исполнителями и внешней средой назовем потоками между технологической сетью и внешней средой.

Считаем технологическую сеть неориентированной, поскольку в нашей модели направление потока не играет роли: $f(w', w'') = f(w'', w')$ для любых $w', w'' \in N \cup \{w_{env}\}$.

Будем говорить, что между w' и w'' отсутствует *связь* тогда и только тогда, когда поток между исполнителями нулевой ($f(w', w'') = 0$, все компоненты вектора равны нулю). Таким образом, наличие *связи* означает, что между w' и w'' протекают некоторые потоки. Также мы предполагаем, что

сеть не содержит петель, то есть для любого исполнителя w выполнено $f(w, w) = 0$.

Через M обозначим конечное множество менеджеров, управляющих взаимодействием исполнителей. Менеджеры необходимы для того, чтобы исполнители взаимодействовали друг с другом в соответствии с технологией. Обычно менеджеры будут обозначаться через $m, m', m'', m_1, m_2, \dots \in M$.

У каждого менеджера имеются некоторые «полномочия», в соответствии с которыми он может принимать решения, обязательные для его подчиненных (исполнителей или других менеджеров). Определим подчиненность формально.

Пусть $V = N \cup M$ – все множество сотрудников организации (исполнителей и менеджеров). Тогда определим множество ребер подчиненности $E \subseteq V \times M$. Ребро подчиненности $(v, m) \in E$ означает, что сотрудник $v \in V$ непосредственно подчинен менеджеру $m \in M$, т. е. ребро направлено от непосредственного подчиненного к его непосредственному начальнику.

Сотрудник $v \in V$ является подчиненным менеджера $m \in M$ (менеджер m является начальником сотрудника v), если существует цепочка ребер подчиненности из v в m . То есть найдется такая последовательность менеджеров $m_1, m_2, \dots, m_k \in M$, что сотрудник v непосредственно подчинен менеджеру m_1 ($(v, m_1) \in E$), менеджер m_j непосредственно подчинен менеджеру m_{j+1} ($(m_j, m_{j+1}) \in E$) для каждого $1 \leq j \leq k-1$, $m_k = m$.

Будем также полагать, что начальник *управляет* подчиненным, или подчиненный *управляется* начальником.

Теперь можно дать строгое определение иерархии.

Определение 1. *Ориентированный граф $H = (N \cup M, E)$ с множеством ребер подчиненности $E \subseteq (N \cup M) \times M$ назовем иерархией, управляющей технологической сетью N , если H ациклический, любой менеджер имеет подчиненных и каждая связь внутри*

сети управляется хотя бы одним менеджером.

Ацикличность означает, что не существует «порочного круга» подчиненности. Предположим, что некоторые менеджеры $m_1, m_2, \dots, m_k \in M$ образуют цикл, то есть $(m_j, m_{j+1}) \in E$ для каждого $1 \leq j \leq k-1$, $(m_k, m_1) \in E$. Тогда каждый менеджер является одновременно и начальником, и подчиненным для всех остальных. Такой вариант противоречит самому понятию подчиненности и поэтому в определении 1 исключен априори.

Определение также исключает ситуации, в которых имеются «менеджеры» без подчиненных, так как это противоречит роли менеджера, который должен управлять некоторыми сотрудниками.

Определение требует, чтобы любая связь внутри сети управлялась хотя бы одним менеджером, то есть чтобы иерархия была способна управлять тем взаимодействием исполнителей, интенсивность которых ненулевая. Таким образом, иерархия надстраивается над множеством исполнителей для управления их взаимодействием.

На рис. 1 приведены примеры двух иерархий, надстроенных над технологической сетью, состоящей из одной производственной линии. Как видно из рис. 1, *a*, иерархия имеет «классический» вид. У каждого сотрудника ровно один непосредственный начальник (за исключением начальника верхнего уровня). На рис. 1, *b* показано множественное подчинение. Кроме того, некоторым начальникам непосредственно подчинены и менеджеры, и исполнители. Все эти эффекты интересны, так как часто встречаются на практике.

2. Подчиненные группы исполнителей и затраты менеджеров. Оптимальные иерархии

Группой исполнителей $s \subseteq N$ назовем любое непустое подмножество множества исполнителей.

По определению 1 каждый менеджер имеет по крайней мере одного подчиненного. Начав с любого менеджера m , мы можем двигаться «сверху вниз» к подчиненным менеджеру m . В силу ацикличности в конечном итоге придем к подчиненной группе исполнителей $s_H(m)$. То есть каждому менеджеру подчинена группа исполнителей. Введем следующее обозначение.

Множество исполнителей, подчиненных менеджеру m иерархии H , назовем подчиненной группой исполнителей $s_H(m) \subseteq N$.

Будем также полагать, что менеджер m управляет группой исполнителей $s_H(m)$.

Далее в обозначении группы $s_H(m)$ опустим нижний индекс, если ясно, о какой иерархии идет речь.

Для удобства дальнейшего изложения считаем, что любому исполнителю $w \in N$ «подчинена» простейшая группа $s_H(w) = \{w\}$, состоящая из самого исполнителя. Также будем считать, что исполнитель $w \in N$ «управляет» простейшей группой $s_H(w) = \{w\}$.

На рис. 2 плоскость соответствует технологической сети, над которой надстраивается иерархия. На рисунке изображена часть иерархии, подчиненная менеджеру m . Она состоит из непосредственных подчиненных менеджера m и подчиненных, которыми менеджер m не управляет непосредственно. Подчиненная группа исполнителей $s_H(m)$ обведена на рисунке эллипсом.

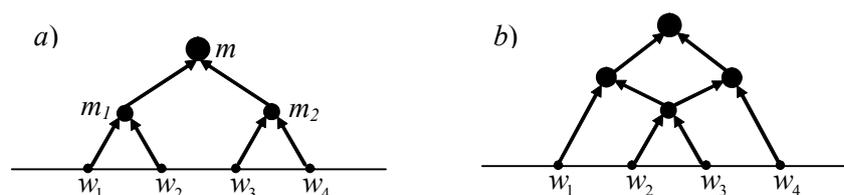


Рис. 1. Примеры иерархий над производственной линией

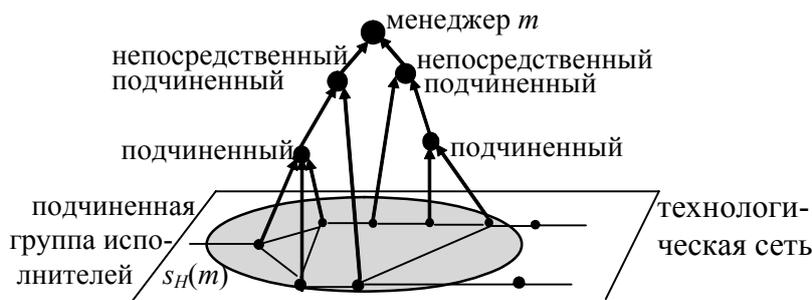


Рис. 2. Менеджер и подчиненная группа исполнителей

Лемма 1. Для любой иерархии H и любого менеджера $t \in M$ выполнено $s_H(t) = s_H(v_1) \cup \dots \cup s_H(v_k)$, где v_1, \dots, v_k – все непосредственные подчиненные менеджера t . Для любого подчиненного v менеджера t выполнено $s_H(v) \subseteq s_H(t)$.

Эта лемма, доказательство которой весьма просто [5], понадобится в дальнейшем.

Каждый менеджер управляет некоторыми потоками между подчиненными исполнителями. Одна из интерпретаций работы менеджера – управление реализацией некоторых планов. Высшие менеджеры формулируют оперативный план, который необходимо реализовать. В процессе уточнения менеджеры на каждом уровне детализируют те части плана, за которые они ответственны. После уточнения на всех уровнях детализированный план реализуется исполнителями. При этом каждый менеджер отслеживает реализацию своих планов. Таким образом, каждый менеджер управляет (например, планирует и контролирует) некоторыми потоками в технологической сети.

Рассмотрим иерархию, изображенную на рис. 3. Предположим, что произошло нарушение потока $f(w_2, w_3)$ в результате конфликта между исполнителями w_2 и w_3 . Ис-

полнитель w_2 сообщает своему непосредственному начальнику m_1 , что у него возникли проблемы. Менеджер m_1 не в состоянии разрешить конфликт, так как исполнитель w_3 ему не подчинен. Аналогично менеджер m_2 не в состоянии самостоятельно справиться с конфликтом, о котором ему сообщил исполнитель w_3 . В итоге менеджеры m_1 и m_2 сообщат о конфликте своему непосредственному начальнику m , который и примет решение, ликвидирующее конфликт. Это решение менеджеры m_1 и m_2 передадут соответственно исполнителям w_2 и w_3 . Аналогично можно рассмотреть планирование потока $f(w_2, w_3)$. Менеджер m передает план потока $f(w_2, w_3)$ менеджерам m_1 и m_2 которые доводят план до исполнителей w_2 и w_3 соответственно. Факт выполнения плана доводится до менеджера m в обратном порядке.

Таким образом, в управлении потоком $f(w_2, w_3)$ задействованы менеджеры m_1, m_2 и m . В управлении потоком $f(w_1, w_2)$ задействован только менеджер m_1 , так как он самостоятельно принимает все решения, связанные с потоком $f(w_1, w_2)$. Аналогично в управлении потоком $f(w_3, w_4)$ задействован только менеджер m_2 .

В управлении внешним потоком $f(w_{env}, w_1)$ участвуют менеджеры m_1 и m (например, план закупок определяется менедже-

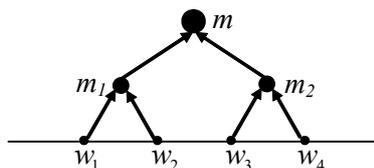


Рис. 3. Дерево управления производственной линией

ром m , уточняется менеджером m_1 и передается исполнителю w_1). Аналогично, в управлении внешним потоком $f(w_4, w_{env})$ участвуют менеджеры m_2 и m .

Из примера видно, что менеджер выполняет функции двух типов:

1. Управляет потоками внутри подчиненной группы, которые не управляются подчиненными менеджерами. Например, на рис. 3 менеджер m управляет потоком $f(w_2, w_3)$. Сумму таких потоков назовем внутренним потоком менеджера m и обозначим $F_H^{int}(m)$.

2. Участвует в управлении потоками между подчиненной группой и всеми остальными исполнителями, то есть внешней средой. Этот компонент потока указан в приведенных выше выражениях в скобках. Например, на рис. 3 менеджер m_1 участвует в управлении потоками $f(w_{env}, w_1)$ и $f(w_2, w_3)$. Сумму таких потоков назовем внешним потоком менеджера m и обозначим $F_H^{ext}(m)$.

Легко заметить, что внутренний и внешний потоки менеджера определяются следующим образом:

$$F_H^{int}(m) = \sum_{\substack{\{w', w''\} \subseteq s_H(m), \\ \{w', w''\} \subset s_H(v_j) \text{ для всех } 1 \leq j \leq k}} f(w', w''),$$

$$F_H^{ext}(m) = \sum_{\substack{w' \in s_H(m), \\ w'' \in (N \setminus s_H(m)) \cup \{w_{env}\}}} f(w', w''). \quad (2)$$

Для нахождения внутреннего потока необходимо суммировать потоки $f(w', w'')$ внутри группы $s_H(m)$, проверяя, чтобы она не входила в группы, управляемые непосредственными подчиненными.

Определение 2. *Затратами менеджера $m \in M$ в иерархии $H \in \Omega(N)$ назовем величину*

$$c(s_H(v_1), \dots, s_H(v_k)) = \varphi(F_H^{int}(m) + F_H^{ext}(m)), \quad (3)$$

где v_1, \dots, v_k – все непосредственные подчиненные менеджера m ; $s_H(v_1), \dots, s_H(v_k)$ – управляемые ими группы; $\varphi: R_+^p \rightarrow R_+$ – монотонно неубывающая по всем переменным функция, ставящая в соответствие вектору $F_H^{int}(m) + F_H^{ext}(m)$ потока неотрицательное действительное число.

Таким образом, затраты менеджера определяются функцией $\varphi(\cdot)$, зависящей от потоков менеджера. Неубывание функции $\varphi(\cdot)$ означает, что при увеличении одного или нескольких компонентов потока, то есть при увеличении «объема» управленческой работы, затраты на управление не могут снизиться. Кроме того, затраты на управление не могут быть отрицательными.

Суммарные затраты всей иерархии складываются из затрат всех менеджеров. Оптимальной будет та иерархия, которая минимизирует суммарные затраты менеджеров.

3. Оптимальная иерархия над несвязной технологической сетью

Будем считать, что два исполнителя технологической сети связаны, если в технологической сети существует путь от одного исполнителя до другого (будем считать также, что исполнитель связан сам с собой). Технологическую сеть назовем связной, если в ней связана любая пара исполнителей. Несвязная технологическая сеть распадается на несколько связных компонент, то есть частей технологической сети, каждая из которых связна. Это следует из того, что отношение связности исполнителей симметрично, рефлексивно и транзитивно, то есть является отношением эквивалентности. Исполнители, входящие в один класс эквивалентности, и образуют связный компонент. Число различных компонент равно числу классов эквивалентности.

Предположим, что функция затрат субаддитивна. То есть затраты $\varphi(x + y)$ одного менеджера на управление суммарным потоком $x + y$ не больше, чем затраты двух менеджеров на управление частями этого потока x и y . Как показывает следующее утверждение, в этом случае для любой технологической сети оптимальна простейшая двухуровневая иерархия, в которой все потоки управляются одним менеджером. Затраты этого менеджера не больше, чем суммарные затраты менеджеров в любой иерархии.

Утверждение 1. *Пусть функция затрат $\varphi(\cdot)$ субаддитивна, то есть для всех $x, y \in R_+^p$ выполнено неравенство*

$\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$. Тогда оптимальна двухуровневая иерархия.

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим некоторую иерархию $H = (M \cup N, E) \in \Omega(N)$. Пусть $M = \{m_1, \dots, m_q\}$ – множество менеджеров этой иерархии. Обозначим через $x_i = F_{H^*}^{int}(m_i) + F_{H^*}^{ext}(m_i)$ сумму потоков, которыми управляет менеджер m_i , $1 \leq i \leq q$. Через x обозначим сумму всех потоков: $x = \sum_{\{w', w''\} \in N} f(w', w'') + \sum_{w \in N} f(w, w_{env})$.

Каждый поток управляется по крайней мере одним менеджером. Следовательно, верно неравенство $x_1 + \dots + x_q \geq x$.

В двухуровневой иерархии имеется единственный менеджер m , который управляет всеми потоками, и затраты равны $\varphi(x)$. Затраты иерархии H равны $\varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_q)$. В силу субаддитивности

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_q) \geq \varphi(x_1 + x_2) + \dots + \varphi(x_q) \geq \dots \geq \varphi(x_1 + \dots + x_q)$$

В силу $x_1 + \dots + x_q \geq x$ и монотонности функции $\varphi(\cdot)$

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_q) \geq \varphi(x).$$

Затраты двухуровневой иерархии не превосходят затрат любой иерархии. Следовательно, двухуровневая иерархия оптимальна, что и доказывает утверждение.

Итак, для субаддитивной функции затрат полностью централизованная иерархия с единственным менеджером оптимальна даже над несвязным технологическим графом. Для одномерных потоков требование субаддитивности совпадает с требованием вогнутости. Требование вогнутости может выполняться только для весьма небольших организаций, в которых единственный менеджер не перегружен, что позволяет ему управлять всем технологическим графом. Однако при росте организации, то есть при достаточно большой величине потока, функция затрат перестает быть вогнутой, поскольку единственный менеджер чрезмерно загружен, что ве-

дет к росту его предельных издержек. Другими словами, каждая дополнительная единица потока влечет возрастающие затраты, то есть функция затрат становится выпуклой.

Для одномерных потоков и $\varphi(0) = 0$ требование выпуклости совпадает с требованием супераддитивности. Это требование к функции затрат разумно для большинства больших организаций. Следующее утверждение определяет вид оптимальной иерархии в этом случае.

Утверждение 2. Пусть функция затрат $\varphi(\cdot)$ супераддитивна, то есть для всех $x, y \in R_+^p$ выполнено неравенство $\varphi(x+y) \geq \varphi(x) + \varphi(y)$. Тогда над несвязной технологической сетью оптимальна децентрализованная иерархия, в которой над каждым связным компонентом надстроена отдельная оптимальная иерархия.

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим некоторую оптимальную иерархию $H = (M \cup N, E) \in \Omega(N)$.

Предположим, что в иерархии имеются менеджеры, которые управляют несвязными группами. Тогда из этих менеджеров можно выбрать менеджера низшего уровня, то есть менеджера $m \in M$, который управляет несвязной группой, а все непосредственные подчиненные v_1, \dots, v_k которого управляют связными группами.

Выполнено $s_H(m) = s_H(v_1) \cup \dots \cup s_H(v_k)$ (лемма 1). Если хотя бы два исполнителя из групп $s_H(v_i)$ и $s_H(v_j)$ связаны, то группа $s_H(v_i) \cup s_H(v_j)$ будет связна, поскольку связна каждая из групп $s_H(v_i)$ и $s_H(v_j)$. Если никакие исполнители из $s_H(v_i)$ и $s_H(v_j)$ не связаны, то группа $s_H(v_i) \cup s_H(v_j)$ несвязна.

Предположим, что среди групп $s_H(v_1), \dots, s_H(v_k)$ имеется группа, исполнители которой связаны с одной или несколькими другими группами из $s_H(v_1), \dots, s_H(v_k)$. Без ограничения общности будем считать, что исполнители группы $s_H(v_1)$ связаны с исполнителями группы $s_H(v_2)$ (иначе можно перенумеровать v_1, \dots, v_k). Если с исполнителями группы $s_H(v_1) \cup s_H(v_2)$ связаны исполнители какой-

либо из групп $s_H(v_3), \dots, s_H(v_k)$, то будем считать, что это группа $s_H(v_3)$ (иначе можно перенумеровать v_3, \dots, v_k). Если с исполнителями группы $s_H(v_1) \cup s_H(v_2) \cup s_H(v_3)$ связаны исполнители какой-либо из групп $s_H(v_4), \dots, s_H(v_k)$, то рассуждаем аналогично.

Итак, если исполнители некоторых из групп $s_H(v_1), \dots, s_H(v_k)$ связаны, то получим, что группа $s_H(v_1) \cup \dots \cup s_H(v_i)$ связна, а ее исполнители не связаны с исполнителями групп $s_H(v_{i+1}), \dots, s_H(v_k)$, $i \geq 2$. Выполнено $i < k$, поскольку вся группа $s_H(m)$ несвязна. Тогда в соответствии с формулой (2) внутренний и внешний потоки менеджера m делятся на две части:

$$F_H^{int}(m) = x_{int} + y_{int} = \sum_{\substack{\{w', w''\} \subseteq s_H(v_1) \cup \dots \cup s_H(v_i) \\ \{w', w''\} \subseteq s_H(v_j) \text{ для всех } 1 \leq j \leq i}} f(w', w'') + \sum_{\substack{\{w', w''\} \subseteq s_H(v_{i+1}) \cup \dots \cup s_H(v_k) \\ \{w', w''\} \subseteq s_H(v_j) \text{ для всех } i+1 \leq j \leq k}} f(w', w'')$$

$$F_H^{ext}(m) = x_{ext} + y_{ext} = \sum_{\substack{w' \in s_H(v_1) \cup \dots \cup s_H(v_i) \\ w'' \in (N(s_H(v_1) \cup \dots \cup s_H(v_i))) \setminus \{w_{om}\}}} f(w', w'') + \sum_{\substack{w' \in s_H(v_{i+1}) \cup \dots \cup s_H(v_k) \\ w'' \in (N(s_H(v_{i+1}) \cup \dots \cup s_H(v_k))) \setminus \{w_{om}\}}} f(w', w'')$$

Равенства верны, поскольку исполнители групп $s_1 = s_H(v_1) \cup \dots \cup s_H(v_i)$ и $s_2 = s_H(v_{i+1}) \cup \dots \cup s_H(v_k)$ никак не связаны друг с другом. Следовательно, между ними нулевые потоки. Поэтому весь внутренний поток менеджера m состоит из потоков внутри s_1 и потоков внутри s_2 . Кроме того, в указанных группах нет одних и тех же исполнителей. Поэтому внешний поток группы $s_H(v)$ также делится на две части: внешний поток группы s_1 и внешний поток групп s_2 .

Перестроим иерархию H следующим образом. Непосредственно подчиним сотрудников v_1, \dots, v_i новому менеджеру m_1 вместо менеджера m . Менеджера m_1 непосредственно подчиним всем непосредственным начальникам менеджера m .

До перестроения менеджер m управлял только потоками внутри группы $s_1 \cup s_2$. После перестроения потоками внутри группы s_1 будет управлять менеджер m_1 , потоками внутри группы s_2 будет управлять менеджер m . Между группами s_1 и s_2 нет потоков, поэтому после перестроения все потоки внутри группы $s_1 \cup s_2$ по-прежнему будут управляться.

Рассмотрим непосредственного начальника m_2 менеджера m . И до и после перестроения он управляет всеми исполнителями из группы $s_1 \cup s_2$. Поэтому не изменилась группа, которая подчинена m_2 . Следовательно, не поменялись внешние потоки m_2 . Внутренний поток менеджера m_2 также не изменился, поскольку потоки внутри групп s_1 и s_2 управляются подчиненными менеджерами m_1 и m , а потоки между группами s_1 и s_2 отсутствуют. Таким образом, потоки и затраты непосредственных начальников менеджера m не изменились, не поменялись также подчиненные им группы. Следовательно, не изменятся потоки, затраты и подчиненные группы начальников более высоких уровней. Следовательно, все потоки внутри технологического графа внутри группы $s_1 \cup s_2$ по-прежнему будут управляться.

Очевидно также, что все менеджеры будут иметь подчиненных и граф останется ациклическим. То есть в результате получили иерархию. До перестроения затраты менеджера m составляли $\varphi(F_H^{int}(m) + F_H^{ext}(m)) = \varphi(x_{int} + y_{int} + x_{ext} + y_{ext})$. После перестроения затраты менеджеров m_1 и m составят соответственно $\varphi(x_{int} + x_{ext})$ и $\varphi(y_{int} + y_{ext})$. В силу супераддитивности после перестроения суммарные затраты m_1 и m не превышают затрат менеджера m до перестроения. Затраты всех менеджеров не поменялись. Следовательно, не возросли затраты всей иерархии, то есть полученная иерархия оптимальна.

Таким образом, если среди групп $s_H(v_1), \dots, s_H(v_k)$ имеются группы со связанными исполнителями, то можно добавить нового менеджера, управляющего связной группой s_1 , и получить оптимальную иерархию, в которой у m меньшее количество непосредственных подчиненных. При этом группы, подчиненные остальным менеджерам, не меняются.

Если после перестроения менеджер m управляет связной группой, то число менеджеров, управляющих несвязными группами, уменьшилось на единицу. Если после перестроения менеджер m управляет несвязной группой, то построение можно повторить.

При этом снова уменьшим число непосредственных подчиненных менеджера m . После некоторого числа подобных перестроений придем к оптимальной иерархии, в которой менеджер m управляет связной группой. С помощью описанных перестроений в любом случае получим оптимальную иерархию, в которой число менеджеров, управляющих несвязными группами, на единицу меньше, чем в исходной иерархии H .

Повторяя такие действия, получим в итоге оптимальную иерархию H^* , в которой каждый менеджер управляет связными группами. По условию утверждения технологическая сеть N несвязна. Поэтому можно разбить ее на связные компоненты: $N = N_1 \cup \dots \cup N_i$. Исполнители в каждом компоненте связаны, исполнители разных компонент не связаны (хотя исполнители каждого компонента могут быть связаны с внешней средой). Рассмотрим группу $s_{H^*}(m)$, которой управляет некоторый менеджер m иерархии H^* . Она связна и, следовательно, вложена в некоторый связный компонент N_j : $s_{H^*}(m) \subseteq N_j, 1 \leq j \leq i$. Итак, каждый менеджер H^* управляет исполнителями одного и только одного связного компонента. Если два менеджера управляют исполнителями разных компонент, то между ними не может быть отношения подчинения, поскольку по лемме 1 начальник в этом случае управлял бы исполнителями из двух компонент. Менеджеры всей иерархии H^* распадаются на i классов так, что менеджеры одного класса управляют исполнителями из одного связного компонента, а менеджеры различных классов не связаны отношением подчинения.

Итак, оптимальная иерархия H^* распадается на i независимых иерархий, каждая из которых надстроена над отдельным компонентом связности. Если над каким-либо компонентом надстроена неоптимальная иерархия, то вместо нее можно надстроить иерархию с меньшими затратами. В результате затраты иерархии над всей технологической сетью H^* снизятся, что противоречит оптимальности H^* . Следовательно, в оптимальной иерархии H^* , управляющей несвязной технологической сетью, над каждым связным

компонентом надстроена отдельная оптимальная иерархия.

4. Заключение

Утверждение 1 показывает, что полностью централизованная иерархия с одним менеджером может обеспечить минимальные затраты на управление организацией даже в случае несвязности технологии. Однако этот результат получен в предположении субаддитивности (для однокомпонентных технологических потоков – в предположении вогнутости функции затрат). Поэтому результат справедлив лишь для небольших организаций. При росте организации нагрузка менеджера возрастает, что рано или поздно приводит к смене характера роста функции затрат – функция затрат становится супераддитивной.

Таким образом, в достаточно больших организациях рост за счет присоединения технологически несвязанных частей приводит к неоптимальности системы управления. В таких случаях управление с минимальными затратами обеспечивают несколько иерархий, каждая из которых управляет связной частью технологической сети (утверждение 2). Если отдельные участки технологической сети слабо связаны, то минимальных затрат на управление можно достичь с помощью децентрализации управления, то есть разбиения общей организации на части, каждая из которых управляет отдельным участком. Этот фактор может определять пределы роста организации, при достижении которых централизованное управление становится неэффективным.

Список литературы

1. Бурков В. Н., Новиков Д. А. Теория активных систем: состояние и перспективы. - М.: СИНТЕГ, 1999.
2. Воронин А. А., Мишин С. П. Алгоритмы поиска оптимальной структуры организационной системы // АИТ. - 2002. №5. - С. 120-132.
3. Воронин А. А., Мишин С. П. Моделирование структуры организационной системы. Об алгоритмах поиска оптимального дерева // Вестн. Волг. ун-та. - 2001. Сер. 1: Математика. Физика. - С. 78-98.

4. Воронин А. А., Мишин С. П. Модель оптимального управления структурными изменениями организационной системы // Автоматика и телемеханика. - 2002. №8. - С. 136-150.
5. Воронин А. А., Мишин С. П. Оптимальные иерархические структуры. - М.: ИПУ РАН, 2003.
6. Губко М. В. Структура оптимальной организации континуума исполнителей // Автоматика и телемеханика. - 2002. №12. - С. 116-130.
7. Дементьев В. Т., Ерзин А. И., Ларин Р. М. и др. Задачи оптимизации иерархических структур. - Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1996.
8. Минцберг Г. Структура в кулаке: создание эффективной организации. / Пер. с англ. под ред. Ю.Н. Каптуревского. – СПб: Питер, 2001.
9. Мишин С. П. Динамическая задача синтеза оптимальной иерархической структуры // Управление большими системами. Выпуск 3. - М.: ИПУ РАН, 2003. - С. 55-75.
10. Мишин С. П. Оптимальное стимулирование в многоуровневых иерархических структурах // Автоматика и телемеханика. – 2004. №5. - С. 96-119.
11. Новиков Д. А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. - М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.
12. Новиков Д. А. Сетевые структуры и организационные системы. - М.: ИПУ РАН, 2003.
13. Овсиевич Б. И. Модели формирования организационных структур. - Л.: Наука, 1979.
14. Цвиркун А. Д. Основы синтеза структуры сложных систем. - М.: Наука, 1982.
15. Calvo G., Wellisz S. Supervision, Loss of Control and the Optimal Size of the Firm. *Journal of Political Economy*, 87, 1978, pp 991-1010.
16. Calvo G., Wellisz S. Hierarchy, Ability and Income Distribution. *Journal of Political Economy*, 87, 1979, pp 991-1010.
17. Grossman S., Hart O. Implicit contracts under asymmetric information. *Quarterly Journal of Economics*, 1, 1982, pp 110–124.
18. Grossman S., Hart O. An analysis of the principal-agent problem. *Econometrica*, 51, No. 1, 1983, pp 7–45.
19. Hart O. D., Holmstrom B. Theory of contracts. *Advances in economic theory*. 5-th World Congress. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1987, pp 71–155.
20. Integration Definition for Function Modeling IDEF0, Processing Standards Publications, 1993.
21. Maskin E., Qian Y., Xu C. Incentives, Information, and Organizational Form. *Review of Economic Studies*, 67(2), 2000, pp 359-378.
22. Melumad D. N., Mookherjee D., Reichelstein S. Hierarchical Decentralization of Incentive Contracts. *The Rand Journal of Economics*, 26, No. 4, 1995, pp 654-672.
23. Qian Y. Incentives and Loss of Control in an Optimal Hierarchy. *The Review of Economic Studies*, 61, No. 3, 1994, pp 527-544.
24. Radner R. Hierarchy: The Economics of Managing. *Journal of Economic Literature*, 30, No. 3, 1992, pp 1382-1415.
25. Williamson O. Hierarchical Control and Optimal Firm Size. *Journal of Political Economy*, 75, 1967, pp 123-138.
26. Williamson O. *Markets and Hierarchies*. New York: Free Press. 1975.

OPTIMALITY OF DECENTRALIZED HIERARCHY CONTROLLING NON-CONNECTED TECHNOLOGICAL NETWORK

© 2005 S. P. Mishin

Institute of Management Problems, RAS, Moscow

The paper deals with the advisability of decentralized hierarchy for the control of non-connected technological network.