УДК 338.24.01

# ОБ ОДНОМ РЕГРЕССИОННОМ МЕТОДЕ ПРОГНОЗА КОТИРОВОК ВАЛЮТ

© 2005 А. И. Жданов[1], Д. Г. Муравьев[2]

[1]Самарский государственный аэрокосмический университет
[2]Самарский институт управления

Предлагается многомерный регрессионный метод прогноза биржевых котировок. Проводится оценка доверительных интервалов параметров модели, а также оценка вероятности правильного прогноза знака изменения курса на следующий день.

## Введение

В последнее десятилетие с развитием информационных технологий упрощается и ускоряется доступ к различным электронным торговым площадкам. Развивается рынок услуг для частных инвесторов. Так, на сегодняшний день только на территории России существуют десятки брокерских контор, предоставляющих доступ на валютный рынок Forex. Условия работы, предлагаемые этими брокерами, приемлемы для широкого круга инвесторов. Соответственно все большее внимание инвесторов уделяется различным методам прогноза котировок.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу минимизации среднего риска по эмпирическим данным. Требуется минимизировать функционал

$$I(\alpha)=\int Q(z,\alpha)P(z)dz$$

в условиях, когда не известна плотность $P(z)$, но задана функция потерь $Q(z, \alpha)$ ($\alpha$ – принадлежащий некоторому множеству $\Delta$ параметр, конкретное значение которого определяет конкретную функцию потерь $Q(z, \alpha)$) и случайная независимая выборка $z_1,\dots,z_l$ объема $l$. Рассмотрим частную постановку задачи, когда вектор $z$ состоит из $n$ координат $x_1,\dots, x_n$, образующих вектор $x$ (регрессионную переменную), и $m$ координат $y_1,\dots,y_m$ (отклик), т. е. $z = (x_1,\dots, x_n, y_1,\dots, y_m)$, а функция потерь задана в следующем виде:

$$Q(z,\alpha)=\begin{pmatrix}(y_1-f_1(x,\alpha))^2\\ \dots\\ (y_m-f_m(x,\alpha))^2.\end{pmatrix}$$

Предлагается решать задачу восстановления регрессии в классе функций $f\,|\,R^n\to R^m$ вида

$$f(x)=\Theta\Big(A_0+\sum_{i=1}^{k}A_iT_i(x)\Big),$$

где $\Theta(\chi)=\begin{pmatrix}\Theta_1(\chi_1)\\ \dots\\ \Theta_m(\chi_m)\end{pmatrix}$, $A_0=\begin{pmatrix}a_1^0\\ \dots\\ a_m^0\end{pmatrix}$,

$$A_i=\begin{pmatrix}a_{11}^i & \dots & a_{1n}^i\\ & \dots\dots\dots & \\ a_{m1}^i & \dots & a_{mn}^i\end{pmatrix},\ |x_j|<1,$$

$$T_i(x)=\begin{pmatrix}t_i(x_1)\\ \dots\\ t_i(x_n)\end{pmatrix},$$ $t_i(x_j)$ – полином Чебышева $i$-й степени от $j$-й координаты вектора $x$.

Здесь функции $\Theta_j(\chi_j)$ могут иметь различный вид, зависящий от прикладной задачи: произвольная нелинейная функция, кусочно-постоянная либо просто $\Theta_j(\chi_j)=\chi_j$. В последнем случае $f(x)$ линейна по параметрам $A_i$, и их оценки $\widehat{A}_i$ можно найти методом наименьших квадратов. В нелинейных случаях $\widehat{A}_i$ можно искать различными алгоритмами, минимизирующими сумму квадратов невязок на материале обучения:

$$I_э = \begin{pmatrix} \sum_{q=1}^{l}(y_1^q - f_1(x^q))^2 \\ \dots \\ \sum_{q=1}^{l}(y_m^q - f_m(x^q))^2 \end{pmatrix}.$$

Представляется интересным случай, когда $\Theta_j(\chi_j)$ – какая-либо «сигмовидная» функция, например $\Theta_j(\chi_j) = \mathrm{th}(\chi_j)$. Эта нелинейная $S$-образная функция часто используется в качестве математической модели активации биологического нейрона и придает $f(x)$ дополнительную нелинейность и некоторую "нейроподобность", что позволяет надеяться на получение высокого качества прогноза.

Таким образом, спектр решаемых посредством предложенного метода задач такой же широкий, как и для нейронных сетей.

## 2. Оценка дисперсии параметров нелинейной модели

Рассмотрим для простоты случай, когда зависимая величина $y$ – скаляр. Модель будем записывать в следующей форме:

$$y^t = f(x^t) = \Theta\Big(a_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i T_i(x^t)\Big),$$

где $f \mid R^n \to R^1$, $A_i = (a_1^i, ..., a_n^i)$, $|x_j| < 1$,

$$T_i(x) = \begin{pmatrix} t_i(x_1) \\ \dots \\ t_i(x_n) \end{pmatrix}, \; t = \overline{1,l}.$$

В данном случае метод наименьших квадратов основан на минимизации суммы квадратов разностей между экспериментальными и расчетными значениями. Так как задача нахождения оценок параметров $A_i$ является нелинейной, расчет оценок производится по итерационной процедуре. Приближенное значение дисперсии оценок параметров $a_j^i$ можно получить в следующем виде [1]:

$$\sigma^2_{a_s^q} \approx \frac{S}{l - n*k - 1} C_{qs}^{-1},$$

где $q = \overline{0,k}$, $s = \overline{1,n}$,

$$S = \sum_{i=1}^{l} \frac{\left(y^i - f(x^i)\right)^2}{\sigma_y^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^i)\sigma_{x_j}\right)^2},$$

$$C_{qs} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial a_s^q}(x^i)\right)^2}{\sigma_y^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^i)\sigma_{x_j}\right)^2},$$

$\sigma_y$ и $\sigma_{x_j}$ - соответствующие результатам измерения $y$ и $x_j$ среднеквадратические ошибки.

Используя оценки дисперсий, можно найти доверительные интервалы для отдельных параметров с использованием $t$-распределения при $l - n*k - 1$ степеней свободы в предположении о нормальности распределения ошибок наблюдений. Тогда с вероятностью $1 - \alpha$ справедливы неравенства

$$\hat{a}_s^q - \sigma^2_{a_s^q} t_{(\alpha/2, l-n*k-1)} < \overline{a}_s^q + \sigma^2_{a_s^q} t_{(\alpha/2, l-n*k-1)},$$

где $\overline{a}_s^q$ - истинные (неизвестные) значения параметров.

## 3. Прогнозирование котировок валют

Остановимся на задаче прогнозирования валютных торгов на примере пары EUR/USD (курс евро к доллару США), когда

$$f(x) = \mathrm{th}\Big(a_0 + \sum_{i=1}^{k} A_i T_i(x)\Big),$$

$$f \mid R^3 \to R^1, \; A_i = (a_1^i, a_2^i, a_3^i), \; T_i(x) = \begin{pmatrix} t_i(x_1) \\ t_i(x_2) \\ t_i(x_3) \end{pmatrix}.$$

Оценки $\widehat{A}_i$ будем искать методом наискорейшего спуска. В этом случае на $r$+1 шаге получим

$$^{(r+1)}a_j^i = {}^{(r)}a_j^i + {}^{(r)}\lambda_j^i \cdot {}^{(r)}\nu_j^i,$$

$$\nu_j^i = -\frac{\partial I_э}{\partial a_j^i} = \sum_{q=1}^{l} \frac{t_i(x_j^q)(y^q - f(x^q))}{\mathrm{ch}^2\left(a_0 + \sum\limits_{i=1}^{k} A_i T_i(x)\right)},$$

где $i = \overline{0,k}$, $j = \overline{1,3}$, $\lambda_j^i$ - величина шага.

Обучающая выборка составлялась по методу окон, т. е. брались следующие векторы:

$$(x_1,...,x_n) \to x_{n+1},$$
$$(x_2,...,x_{n+1}) \to x_{n+2},$$
$$...$$
$$(x_{l-n-1},...,x_{l-1}) \to x_l,$$

где $x_i$ - значения курсов закрытия $i$-го дня, нормированные в (-1,1). В этом случае прогнозируется значение курса на шаг вперед.

Данные о ходе торгов взяты с площадки Forex по данным дилингового центра Акмос (www.akmos.ru) за 500 дней с 15.02.02 по 24.12.03, объем обучающей выборки – 400 дней, объем тестовой выборки – 100 дней. Глубина погружения в лаговое пространство составила 3 дня ($n$ = 3). Степень полинома выбрана равной 20. Для сравнения была создана трехслойная нейронная сеть с 80 нейронами в каждом слое, обучаемая и тестируемая на тех же данных. Прогноз осуществлялся на 1 день вперед.

Необходимо отметить, что для реальной торговли на финансовых рынках для трейдера необходимо знать не будущее значение курса, а лишь только знак изменения цены. Следовательно, при проверке качества метода на тестовой выборке важнейшим критерием является процент угаданных направлений тренда и сумма полученной прибыли за период тестирования. Судить о преимуществе предложенного метода над нейронными сетями позволяют графики прибыли, полученной с капитала в $100000 (рис. 1). Нейросетевой прогноз осуществлялся на тех же обучающих и тестовых множествах. При определении направления тренда получены 62 % и 68 % правильных прогнозов, а прибыль составила 12440 и 25130 долларов США для торговли по нейронным сетям и по многомерным полиномам Чебышева соответственно. При такой торговле не учитывались комиссионные издержки, в связи с этим реальные результаты могут быть несколько ниже.

Оценим $P_{ош}$ – вероятность ошибочного определения направления тренда на гене-

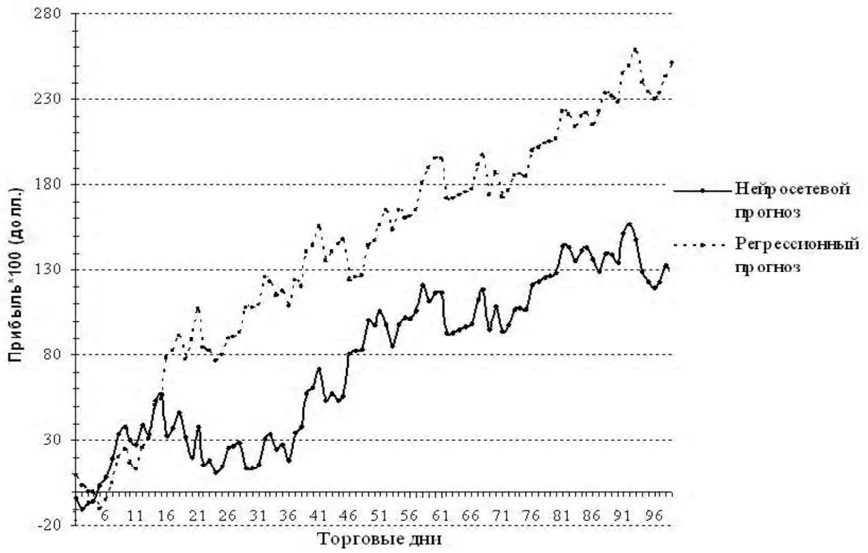


*Рис. 1.*

ральной совокупности. Обозначим частоту ошибочной классификации по обучающей последовательности как $\nu_{об}$. Тогда с вероятностью $1-\eta$ справедливо неравенство [2]:

$$\mathrm{P}_{ош} \le \nu_{об} + \frac{h\left(\ln\frac{l}{h}+1\right)-\ln\eta}{2l}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\nu_{об}l}{h\left(\ln\frac{l}{h}+1\right)-\ln\eta}}\right),$$

где $l$ - объем выборки, $h$ - емкость множества функций $\Theta\left(A_0+\sum_{i=1}^{k}A_iT_i(x)\right)$.

В рассматриваемом случае $\nu_{об}=0{,}13$ и с вероятностью 95 % ($\eta=0{,}05$) $P_{ош}\le 0{,}4277$, т. е. вероятность правильных прогнозов не менее 57,23 %.

Вероятность ошибочной классификации можно оценить также исходя из метода «скользящий контроль» [2, 3], который заключается в следующем:

1. Исходная обучающая выборка $X_l$ объема $l$ делится на две подвыборки: $X_{l-1}$ и $X_1$ объемом $l$-1 и 1, соответственно.

2. По подвыборке $X_{l-1}$ находятся оценки параметров модели.

3. Полученной моделью классифицируется вектор, входящий в $X_1$.

4. Процедура 1-3 повторяется $l$ раз, чтобы в выборке $X_1$ последовательно побывали все векторы из $X_l$.

Точность классифицирующего правила оценивается величиной

$$\widehat{P}_{ош} = \frac{n^u_{ош}+}{2N_u} + \frac{n^d_{ош}}{2N_d},$$

где $n^u_{ош}$ и $n^d_{ош}$ - число ошибочного определения направления роста или падения валюты, $N_u$ и $N_d$ - количество дней роста и падения валюты на всей выборке $X_l$ соответственно. В рассмотренном случае $\widehat{P}_{ош}=0{,}33$, что соответствует 67 % правильных прогнозов.

### Список литературы

1. К. Хартман, Э. Лецкий, В. Шефер. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов.- М.: Мир, 1977.

2. Вапник В. Н. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей.- М.: Наука, 1984.

3. Lachenbruch P. A., Mickey M. R. Estimation of error rates in discriminant analysis, Technometrics, 10, № 1 (1968).

## A REGRESSIONAL METHOD OF CURRENCY EXCHANGE RATE PREDICTION

© 2005 A. I. Zhdanov[1], D. G. Muravyov[2]

[1]Samara State Aerospace University
[2]Samara Institute of Management

A multidimensional regressional method of currency exchange rate prediction is proposed. Trusty ranges of model parameters and the probability of correct exchange rate sign forecast for the next day are estimated.