УДК 519

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ НАЛОГООБЛОЖЕНИЯ И РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

© 2005 Б. А. Горлач, И. Б. Орлов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассматривается задача нелинейного программирования, представляющая собой математическую модель минимизации величины безвозвратных потерь, которые являются следствием введения налога на покупку или продажу товара.

Построение математической модели

Пусть товары, реализуемые через рынок, разбиты по некоторым признакам на n групп. Обозначим количество товаров k-ой группы через x_k (k=1, 2, …, n). Если цена товара k-ой группы до введения налога равнялась p_k, то после введения налога на продажу со ставкой $t_{0k}=t_k\%/100$ она определится равенством $P_k=p_k(1+t_{0k})$.

Предположим, что функции спроса и предложения $p_d(x_k)$ и $p_s(x_k)$ известны (рис. 1). Введение налога со ставкой t_{0k} на продажу товара приведет к повышению стоимости k-го товара, что поднимет кривую предложения вверх, и точка рыночного равновесия переместится из положения M_{0k} в положение M_k.

Введение налога сказывается на количестве товара, проходящего через рынок, а производитель реализует это количество товара по меньшей цене.

Разность между возросшими расходами покупателя и уменьшившимися доходами продавца $t_k=p_{dk}-p_{sk}$ представляет собой налог с продаж, выраженный в денежных единицах.

Площадь криволинейного треугольника $M_{0k}M_kS_k$

$$B_k(x_k)=\int_{x_k}^{x_{0k}} t_k(x_k)dx_k$$

представляет собой безвозвратные потери (рис. 1).

Суммируя значения $B_k(x_k)$ для всех n групп товаров на рынке, облагаемых налогом, получим суммарную величину безвозвратных потерь для рассматриваемого анклава, которую необходимо минимизировать:

$$B(X)=\sum_{k=1}^{n} B_k(x_k)=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_k}^{x_{0k}} t_k(x_k)dx_k \to min\ , \quad (1)$$

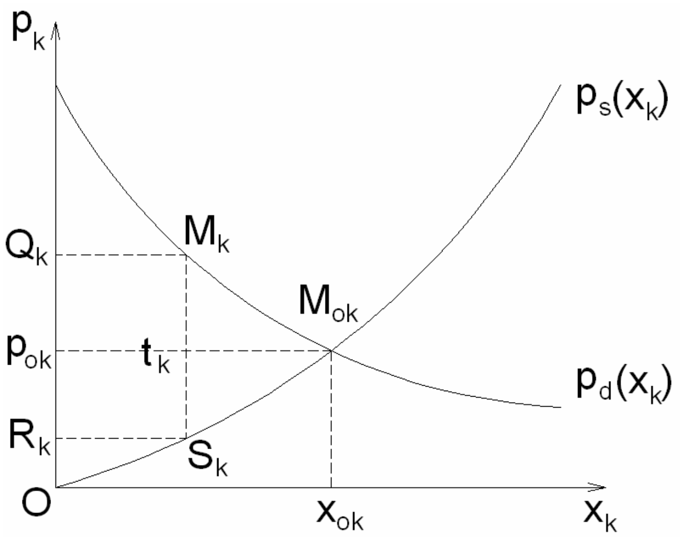

Рис. 1. Функции спроса и предложения

где $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Предположим далее, что государство планирует собрать в виде налогов от продажи n видов товаров не менее R денежных единиц. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} t_k(x_k) \cdot x_k \ge R, \quad x_k \ge 0, \quad k = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Эти условия представляют собой систему ограничений. Геометрически первое неравенство системы (2) означает, что сумма площадей прямоугольников $M_k S_k R_k Q_k$ для каждого вида товара должна быть не меньше заданного числа R.

Сформулируем теперь задачу нелинейного программирования: найти минимальное значение функции $B(X)$, заданной равенством (1) и удовлетворяющей системе ограничений (2).

Решение оптимизационной задачи

Будем предполагать, что функции спроса и предложения являются монотонными. В этом случае функция $B(X)$ монотонно убывает при стремлении x_k к x_{0k} ($x_k \le x_{0k}$). Тогда функция $B(X)$ достигает минимального значения при условии ограничений (2) на границе множества $\sum_{k=1}^{n} t_k(x_k) \cdot x_k \ge R$, т. к. безусловный минимум достигается ею в точке $X_0=(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$, лежащей вне области (2). Следовательно, задача оптимизации сводится к следующей:

$$B(X) = \sum_{k=1}^{n} B_k(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{0k}} t_k(x_k) dx_k \to min, \qquad (3)$$

$$\Phi(X) = \sum_{k=1}^{n} t_k(x_k) \cdot x_k - R = 0, \; x_k \ge 0, \; k = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

Воспользуемся методом множителей Лагранжа и введем функцию Лагранжа

$$\Lambda(X, \lambda) = B(X) - \lambda \cdot \Phi(X), \qquad (5)$$

где $\lambda \ge 0$ – множитель Лагранжа.

Получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_0} t_k(x_k) dx_k - \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} t_k(x_k) \cdot x_k \right) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} t_k(x_k) \cdot x_k - R = 0, \\ \lambda \ge 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Из первого уравнения системы получаем

$$t_k(x_k) + \lambda \cdot \frac{\partial t_k(x_k)}{\partial x_k} \cdot x_k + \lambda \cdot t_k(x_k) = 0.$$

После деления обеих частей уравнения на $t_k(x_k)$ с учетом равенства

$$E_{tk}(x_k) = \frac{x_k}{t_k(x_k)} \cdot \frac{\partial t_k(x_k)}{\partial x_k},$$

где $E_{tk}(x_k)$ - эластичность функции $t_k(x_k)$, получим

$$E_{tk}(x_k) = -1 - \frac{1}{\lambda} = const. \qquad (7)$$

Последнее соотношение говорит о равенстве эластичностей для разных x_k:

$$E_{tk}(x_k) = E_{ti}(x_i), \; k, i = \overline{1,n}.$$

Из (7) находим

$$\lambda = -\frac{1}{E_{tk}(x_k) + 1},$$

откуда с учетом условия $\lambda \ge 0$ приходим к неравенству: $E_{tk}(x_k) + 1 \le 0$.

Итак, (6) сводится к следующей системе:

$$\begin{cases} E_{tk}(x_k) = E_{ti}(x_i), \; k, i = \overline{1,n}, \\ \Phi(X) = 0, \\ E_{tk}(x_k) + 1 \le 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Решение оптимизационной задачи при линейных функциях спроса и предложения

Пусть функции спроса и предложения представлены соответственно линейными зависимостями:

$$p_d(x_k) = -a_k x_k + b_k,$$

$$p_s(x_k) = c_k x_k + d_k,$$

$$a_k, b_k, c_k > 0,\ d_k \ge 0.$$

Тогда величина налога находится по формуле:

$$t_k(x_k) = p_d(x_k) - p_s(x_k) = -(a_k + c_k)x_k + b_k - d_k.$$

В этом случае задача оптимизации примет вид:

$$B(X) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{0k}} (-(a_k + c_k)x_k + b_k - d_k)dx_k \to min,$$

$$\Phi(X) = \sum_{k=1}^{n} (-(a_k + c_k)x_k + b_k - d_k) \cdot x_k - R = 0,$$

$$x_k \ge 0, \quad k = \overline{1,n}$$

или

$$B(X) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k + c_k}{2} x_k^2 - \right.$$
$$\left. -(b_k - d_k)x_k + \frac{b_k - d_k}{2(a_k + c_k)} \right) \to min, \qquad (9)$$

$$\Phi(X) = R + \sum_{k=1}^{n} \left[(a_k + c_k)x_k^2 - (b_k - d_k)x_k \right] = 0,$$

$$x_k \ge 0, \quad k = \overline{1,n}. \qquad (10)$$

Найдем эластичности функций $t_k(x_k)$:

$$E_{tk}(x_k) = -\frac{(a_k + c_k)x_k}{t_k(x_k)}.$$

Из первого уравнения системы (8) получим

$$x_k = \frac{(a_i + c_i)(b_k - d_k)}{(a_k + c_k)(b_i - d_i)} x_i, \quad k, i = \overline{1,n}.$$

Подставим найденное значение x_k во второе уравнение системы (8) и после преобразований получим квадратное уравнение

$$\left[\frac{(a_k + c_k)^2}{(b_k - d_k)^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(b_i - d_i)^2}{(a_i + c_i)} \right] \cdot x_k^2 -$$
$$-\left[\frac{(a_k + c_k)}{(b_k - d_k)^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(b_i - d_i)^2}{a_i + c_i} \right] \cdot x_k + R = 0. \qquad (11)$$

Обозначим через R_{max} максимально возможные налоговые сборы, величина которых численно равна сумме максимальных площадей прямоугольников $M_k S_k R_k Q_k$ (рис. 1). Для случая, когда функции спроса и предложения линейны, эта сумма будет максимальной при $x_k = x_{0k}/2$. Поскольку $x_{0k} = \frac{b_k - d_k}{a_k + c_k}$, то

$$R_{max} = \sum_{k=1}^{n} t_k(x_{0k}) \frac{x_{0k}}{2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{(b_k - d_k)^2}{a_k + c_k}. \qquad (12)$$

С учетом (12) преобразуем (11) к виду

$$x_k^2 - \frac{b_k - d_k}{a_k + c_k} x_k + \frac{R(b_k - d_k)^2}{4(a_k + c_k)^2 R_{max}} = 0$$

и получим единственный корень, удовлетворяющий третьему неравенству системы (8):

$$x_k = \frac{b_k - d_k}{2(a_k + c_k)} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{R}{R_{max}}} \right). \qquad (13)$$

При этом величина налога на продажу k-того вида товара определится из формулы

$$t_k = -\frac{b_k - d_k}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{R}{R_{max}}} \right) + b_k - d_k.$$

Выражение для вычисления минимальных безвозвратных потерь определим, используя (9), (12) и (13):

$$B_{min} = R_{max} - \frac{R}{2} - \sqrt{(R_{max} - R) \cdot R_{max}} . \qquad (14)$$

Постановка двойственной задачи

Пусть теперь требуется определить максимальную величину сбора налога $R(X)$ с продажи n видов товаров при условии, что безвозвратные потери $B(X)$ не должны превышать наперед заданного значения B. Поставленная задача является двойственной по отношению к задаче (1)-(2) и записывается в виде

$$R(X) = \sum_{k=1}^{n} t_k(x_k) \cdot x_k \to max, \qquad (15)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{0k}} t_k(x_k) dx_k \le B , \ x_k \ge 0, \quad k = \overline{1,n}. \qquad (16)$$

Решение задачи (15)-(16) сводится к решению системы

$$\begin{cases} E_{t\,k}(x_k) = E_{t\,i}(x_i), \ k, i = \overline{1,n}, \\ \Phi_0(X) = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{0k}} t_k(x_k) dx_k - B = 0, \\ E_{t\,k}(x_k) + 1 \le 0. \end{cases}$$

При этом, если в качестве значения B взять минимальное значение функции $B(X)$ исходной задачи (1)-(2) при заданном R, то R будет равно максимальному значению функции $R(X)$ двойственной задачи (15)-(16).

Для случая, когда функции спроса и предложения линейные, формула (14) примет вид:

$$R = -2B + 2\sqrt{2B \cdot R_{max}} .$$

Итак, поставленная задача свелась к решению системы (8), в которой необходимым условием является равенство эластичностей налогов как функций от количества товара для разных видов продукции. В случае, когда функции спроса и предложения линейны, единственное решение задачи определяется формулой (13), а минимальное значение целевой функции находится по формуле (14).

Список литературы

1. Аткинсон Э. Б., Стиглиц Дж. Э. Лекции по экономической теории государственного сектора. - Издательство «Аспект Пресс», 1995. - С. 512-518.

2. Горлач Б. А. Оптимизация налогов, цен и количества производимой продукции. - Известия РАЕН, серия МММИУ, том 3. – 1999. № 3-4. - С. 21-23.

3. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: «Айрис Пресс», 2002. - С. 256-260.

CONSTRACTION OF A TAXATION MODEL AND SOLVING OPTIMIZATION TASK

© 2005 B. A. Gorlatch, I. B. Orlov

Samara State Aerospace University

The paper deals with the task of non-linear programming representing a mathematical model of minimizing the value of irrevocable losses which result from taxes on buying or selling goods.