

## ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЗМА ПРИНЯТИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПО ВЫБОРУ ПАРАМЕТРОВ ПОСТОЯННОГО ИПОТЕЧНОГО КРЕДИТА

© 2005 Д. З. Вагапова, М. Г. Сорокина

Самарский государственный аэрокосмический университет

Дана постановка задачи выбора параметров ипотечного кредита с постоянными периодическими выплатами, сформирована модель механизма принятия решений с учетом платежеспособности заемщика и рассмотрены методы ее решения.

В общем случае задача кредитора состоит в том, чтобы при заданном доходе заемщика и заданной структуре его обязательств выбрать такие параметры финансовых потоков ипотечного кредитного процесса (срок погашения, уровень процентной ставки, сумму займа) и план погашения, чтобы обеспечить его возвратность заемщиком и получить максимальное значение целевой функции от его реализации. В качестве целевой функции или экономического интереса кредитора в реализации сформулированной задачи предлагается сумма процентного дохода, получаемого кредитором за весь срок кредита.

Сформулированная задача принятия решений в формализованном виде при реализации постоянного ипотечного кредита с заданной процентной ставкой представлена следующей системой взаимосвязанных уравнений:

$$\begin{aligned}
 J_{\Sigma} (D, V, n) &= nV(D, n) - D \rightarrow \max, \\
 D &\leq D_{\max}, D_{\max} = KИЗ \cdot C, D = Va_{n; i}, V \leq V_{\max}, \\
 V_{\max} &= \min(V^1, V^2), V^1 = \gamma^1 \cdot ДЗ, \\
 V^2 &= \gamma^2 \cdot ДЗ, n \leq n_{\max}
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $KИЗ$  – коэффициент ипотечной задолженности;  $C$  – цена собственности;  $D_{\max}$  – предельная величина кредита, выдаваемая заемщику;  $\gamma^1$  – жилищный коэффициент;  $\gamma^2$  – общий коэффициент задолженности;  $V_{\max}$  – предельные периодические выплаты с учетом платежеспособности заемщика;  $ДЗ$  – доход

заемщика;  $n$  – срок кредита;  $(D, V, n)$  – сумма процентного дохода за весь срок кредита;  $D$  – объем кредита;  $V$  – сумма периодических выплат;  $a_{n; i}$  – коэффициент приведения единичного потока платежей.

Как следует из (1), кредитор выбирает такие величины объема кредита  $D^0$  и периодических выплат  $V^0$  при заданном сроке, процентной ставке кредита, доходе заемщика, цене собственности, которые обеспечивают максимальное значение процентного дохода  $J^0(D^0, V^0)$ . Найденное решение позволяет определить оптимальную стратегию кредитора в рассматриваемой простой ситуации выдачи ипотечного кредита.

Поскольку оптимальное значение величины периодических выплат, как следует из рис. 1, равно  $V^0 = V_{\max} = V^1 = \gamma^1 \cdot ДЗ$ , а оптимальный объем кредита  $D^0 = V^0 a_{n; i}$ , то, подставляя найденное решение задачи принятия решений в уравнение целевой функции, определим оптимальный уровень процентного дохода, соответствующий оптимальной точке  $M$ :

$$\begin{aligned}
 J_{\Sigma}^0 &= nV^0(D^0) - D^0 = n \gamma^1 \cdot ДЗ - \gamma^1 \cdot ДЗ a_{n; i} = \\
 &= \gamma^1 \cdot ДЗ (n - a_{n; i}).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Из уравнения (2) следует, что при заданном сроке и процентной ставке кредита оптимальное значение процентного дохода определяется доходом заемщика  $ДЗ$ . Это значение операционного дохода является максимальным в условиях, когда тип ипотечного кредита задан и соответствует процедуре погашения с постоянными периодическими выплатами.

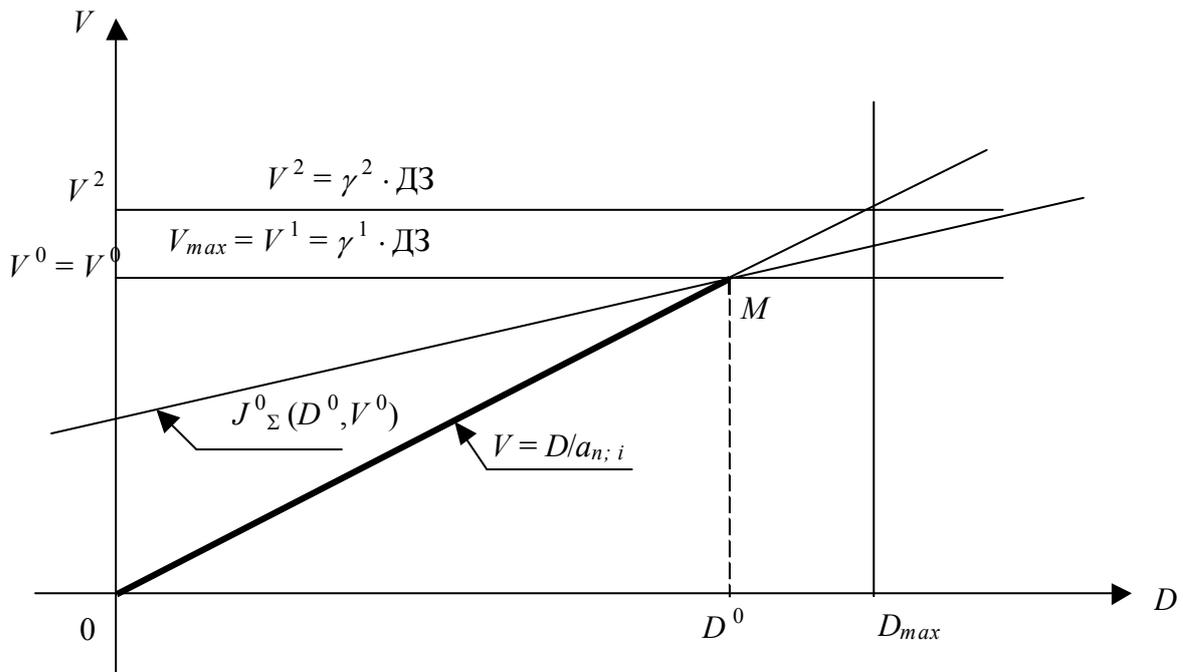


Рис. 1. Область допустимых решений и оптимальный выбор параметров  $D^0, V^0$

Предположим, что в модели принятия решений (1) неизвестными параметрами кредита являются объем кредита, величина периодических постоянных выплат и срок кредита. В этом случае модель механизма принятия оптимальных решений можно представить в виде

$$J^0_{\Sigma}(D, V, n) = nV(D, n) - D \rightarrow \max,$$

$$D \leq D_{max}, D_{max} = KИЗ \cdot C, D = V a_{n; i}, V \leq V_{max},$$

$$V_{max} = \min(V^1, V^2), V^1 = \gamma^1 \cdot ДЗ,$$

$$V^2 = \gamma^2 \cdot ДЗ, n \leq n_{max}. \quad (3)$$

Эта модель относится к классу задач нелинейного программирования.

Один из методов решения состоит в следующем: кредитор устанавливает максимальные величины периодических выплат кредита в соответствии с уравнениями

$$D = D_{max}, V = V_{max} = \min(V^1, V^2). \quad (4)$$

Определенный таким образом объем кредита удовлетворяет требованию кредитоспособности, а величина выплат – критериям платежеспособности заемщика.

Далее из уравнения

$$D_{max} = V_{max} a_{n; i} \quad (5)$$

определяется такой срок кредита, в течение которого кредит погашается.

Если количество платежей и начисление процентов осуществляется раз в году, то срок кредита определяется из уравнения [1]

$$n = \ln \left( 1 - \frac{D_{max}}{V_{max}} i \right)^{-1} / \ln(1 + i). \quad (6)$$

Полученное значение срока кредита должно быть меньше или равно максимальному  $n_{max}$  ( $n \leq n_{max}$ ), установленному кредитором. Если полученный срок превышает максимальную величину, то следует уменьшать объем кредита путем уменьшения цены собственности.

Отметим также, что в формуле (6) долг может быть погашен за конечное число лет, если величина постоянных выплат  $V_{max}$  превышает сумму процентов  $D_{max} i$ . Уменьшая цену собственности, можно уменьшить срок кредита и выбрать его в установленных пределах.

На рис. 2 представлены прямые  $V(n_{max})$ ,  $V(n_1)$ ,  $V(n_2)$ ,  $V(n_3)$ , рассчитанные по уравне-

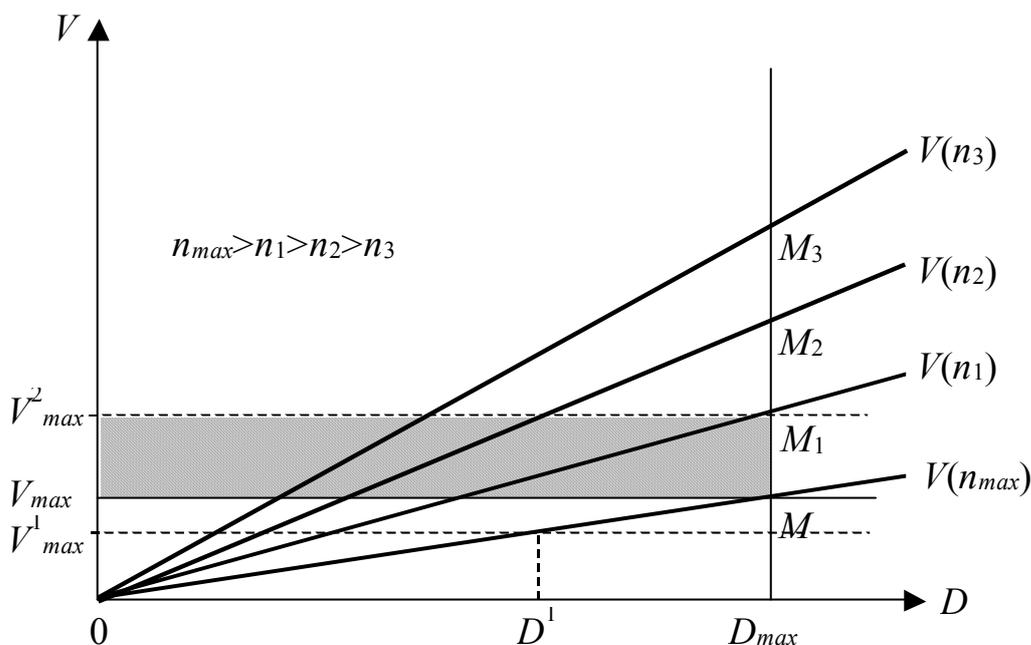


Рис. 2. Область допустимых решений при различных сроках кредита

нию  $V = D_{max} / a_{n,i}$  при различных сроках кредита  $n_{max}, n_1, n_2, n_3$ , заданном объеме кредита  $D = D_{max}$  и заданной ставке процента.

График свидетельствует о том, что заемщик сможет погасить кредит в объеме  $D_{max}$  и сроком  $n_{max}$ , если в каждом периоде (месяц, год) он будет осуществлять выплаты в размере  $V_{max}$ .

Учитывая, что срок, равный  $n_{max}$ , является предельным по величине, периодические выплаты заемщика должны быть не больше  $V_{max}$  ( $V \leq V_{max}$ ). В связи с этим  $V_{max}$  является нижней границей величины периодических выплат при реализации кредита в объеме  $D_{max}$ .

Предположим, что с учетом критериев платежеспособности заемщика его периодические выплаты соответствуют величине  $V_{max}^1 < V_{max}$ . В этом случае кредит размером  $D_{max}$  и сроком  $n_{max}$  заемщик погасить не в состоянии по своим финансовым возможностям. Это означает, что заемщику необходимо купить другую собственность по цене, меньшей  $D_{max}$ . Из графика видно, что эта собственность должна соответствовать кредиту не более  $D^1$ .

Рассмотрим другую ситуацию. Предположим, что финансовые возможности заемщика соответствуют периодическим выплатам

таком размером  $V_{max}^2 > V_{max}$ . Тогда кредит объемом  $D_{max}$  в соответствии с формулой (6) он сможет погасить за срок  $n = n_1 < n_{max}$ . Из этого следует, что заемщик сможет погасить кредит  $D = D_{max}$ , если ему установить срок  $n = n_k$ ,  $k = n_1, \dots, n_{max}$ . Отметим также, что кредит объемом  $D_{max}$  не может быть погашен, если заемщику установить срок  $n < n_1$ .

Таким образом, заштрихованная на рис. 2 область соответствует допустимой области при реализации кредита объемом  $D_{max}$  сроком кредита  $n_1 \leq n \leq n_{max}$ , если установить периодические выплаты  $V_{max} \leq V \leq V_{max}^2$ .

На рис. 3 представлена область выбора допустимых периодических выплат  $V$  и срока  $n$  при реализации ипотечного кредита объемом  $D_{max}$  с постоянной процентной ставкой  $i$ .

Каждая из прямых  $V(D, n < n_{max})$  и  $V(D, n_{max})$  характеризует влияние изменения объема кредита на величину выплат при разных значениях срока. Угол наклона каждой прямой представляет собой чувствительность величины выплат  $V$  к единичному изменению объема кредита. Сравнивая углы наклона, можно заключить, что чем больше срок кредита, тем меньше коэффициент чувствительности и, следовательно, тем меньше влияние объема кредита на величину выплат.

Погашение кредита объемом  $D_{max}$  сроком  $n$  с процентной ставкой можно осуществить, если периодические выплаты равны  $V_{max}$ .

Расстояние между двумя прямыми (рис. 3)  $V_{max}$  и  $V_{max}^1$  характеризует допустимую область изменения периодических выплат  $V$ .

Для определения срока кредита на рис. 3 построена кривая  $V(n)$ , характеризующая изменение величины выплат  $V$  в зависимости от изменения срока кредита при постоянном его объеме  $D$  и процентной ставке  $i$ .

Из рисунка видно, что точка пересечения горизонтальной прямой  $V_{max}$  с кривой  $V(n)$  соответствует сроку  $n$ , а точка пересечения горизонтальной прямой  $V_{max}^1$  с кривой  $V(n)$  соответствует сроку кредита  $n_{max}$ .

Таким образом, при реализации ипотечного кредита объемом  $D_{max}$  каждой точке на кривой  $D(n)$ , находящейся в допустимой области изменения срока, соответствует определенная величина выплат.

При найденных значениях объема ипотечного кредита, величины периодических

выплат, сроке займа и при известной рыночной процентной ставке рассчитывается график погашения задолженности.

На рис. 3 показано изменение во времени величины процентов  $J$  и расходов на погашение долга  $R$  в процессе амортизации кредита объемом  $D$  рублей, сроком погашения  $n$  и процентной ставкой  $i$ .

В сформулированных задачах (1), (3) по определению объема ипотечного кредита, величины периодических выплат и срока кредита обеспечивается получение кредитором максимального процентного дохода, но не учитывается условие его полного погашения в установленный срок. Процедура погашения долга с постоянными периодическими выплатами задается выполнением совокупности следующих рекуррентных соотношений, позволяющих определить в каждом периоде:

- поток платежей, направляемый на погашение основной суммы кредита

$$\begin{aligned} R_k &= Vg^{n-k+1} = R_1(1+i)^{k-1}, k = 1, \dots, n, \\ R_1 &= V - Di; \end{aligned} \quad (7)$$

- величину погашенного кредита

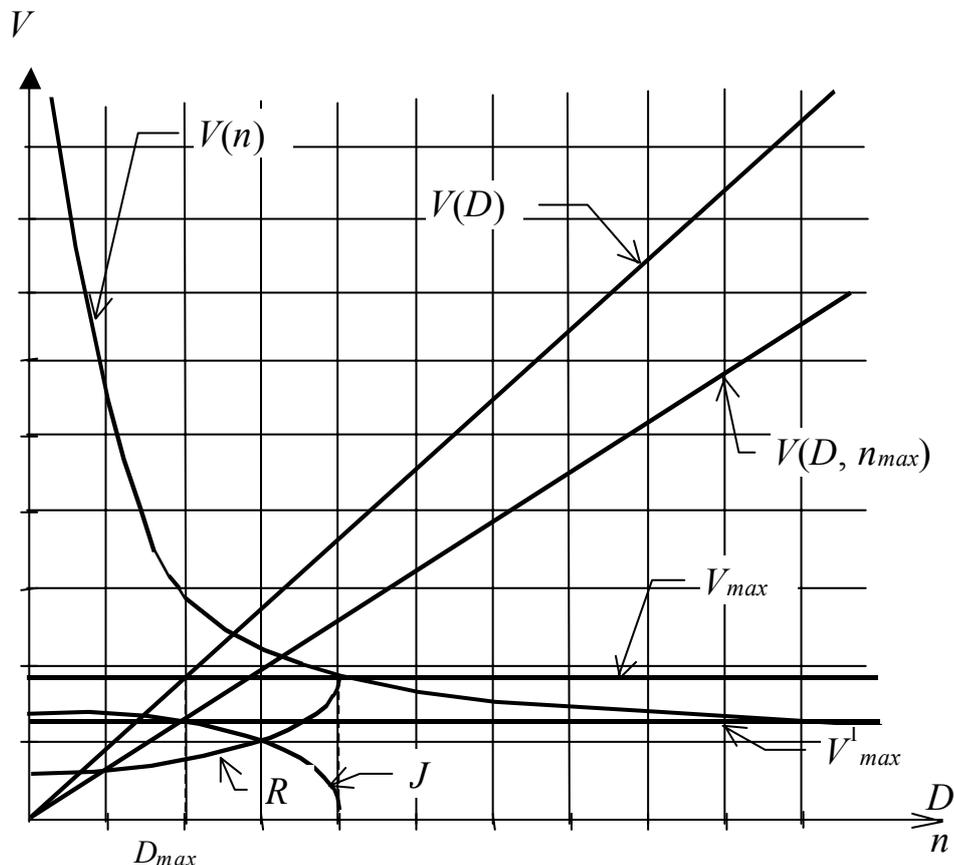


Рис. 3. Область выбора допустимых значений параметров при реализации кредита  $D_{max}$

$$W_k = \sum_{\lambda=1}^k R\lambda, k = 1, 2, \dots, n, W_n = \sum_{\lambda=1}^n R\lambda = D; \quad (8)$$

- величину остаточной задолженности по кредиту

$$D_k = D - W_k = D - \sum_{\lambda=1}^k R\lambda, k = 1, 2, \dots, n, \\ D_n = 0; \quad (9)$$

- величину процентов, выплачиваемых в конце каждого периода

$$J_k = D_{k-1}i = (D - W_{k-1})i = V - R_k, k = 1, \dots, n, \\ J_1 = Di. \quad (10)$$

При выполнении условий погашения задолженности (7)-(10) погашенный кредит в конце срока ипотечного кредита становится равным сумме кредита, что следует из (8), а величина остаточной задолженности - равной нулю, что следует из (9).

Рассмотрим задачу оптимизации, решаемую кредитором при определении параметров кредита и формировании процедуры планирования погашения задолженности в условиях установленной на ипотечном рынке процентной ставки.

Решение задачи оптимизации осуществляется в два этапа: на первом этапе при заданной процентной ставке определяются такие величины суммы кредита  $D$ , срок его погашения  $n$  и соответствующая им величина периодических выплат  $V(D, n)$ , удовлетворяющая платежеспособность заемщика (не превышает  $V_{max}$ ), которые обеспечивают его возвратность и максимум суммы процентного дохода.

На втором этапе при найденных оптимальных значениях суммы кредита  $D^0$ , срока кредита  $n^0$  и величины постоянных выплат  $V^0$  формируется такая процедура амортизации кредита, которая позволяет определить параметры финансовых потоков, направляемых на погашение кредита, оплату процентов в каждый период, и обеспечить на этой основе погашение задолженности в течение заданного срока ипотечного кредита.

Математическая модель механизма принятия оптимальных решений с учетом (3), (7)-(10) будет иметь следующий вид:

$$J_{\Sigma}(D, V, n) = nV(D, n) - D = \\ = nV(D, n) - \sum_{k=1}^n R_k \rightarrow \max,$$

- ограничения на выполнение условий кредитоспособности и платежеспособности заемщика

$$D \leq D_{max}, D_{max} = KИЗ \cdot C, V \leq V_{max},$$

$$V = D/a_{n; i}; V_{max} = \min(V^1, V^2), V^1 = \gamma^1 \cdot ДЗ,$$

$$V^2 = \gamma^2 \cdot ДЗ, n \leq n_{max}; \quad (11)$$

- ограничения на выполнение условия погашения задолженности

$$R_k = R_1 (1 + i)^{k-1}, R_1 = V - Di,$$

$$W_k = \sum_{\lambda=1}^k R_{\lambda}, W_n = \sum_{\lambda=1}^n R_{\lambda} = D,$$

$$D_k = D - \sum_{\lambda=1}^k R_{\lambda}, D_n = 0, J_k = V - R_k,$$

$$J_1 = Di, k = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Таким образом, кредитор в результате решения (11), (12) определяет параметры кредитного договора  $(D, V, n)$ , а затем формирует план амортизации ипотечного долга, обеспечивающий его возвратность заемщиком на основе учета его платежеспособности.

Традиционный вариант ипотеки представляет собой равномерное погашение задолженности ежемесячными выплатами в конце каждого месяца с постоянной ставкой начисления процентов за весь срок кредита.

Заменяя в (11) и (12)  $i$  на  $i/12$ , а  $n$  на  $12n$ , получим следующую модель задачи выбора параметров кредита и параметров финансовых потоков в процессе его погашения:

$$J_{\Sigma}(D, V, n) = 12nV(D, n) - D = \\ = 12nV(D, n) - \sum_{k=1}^{12n} R_k \rightarrow \max,$$

- ограничения на выполнение условий кредитоспособности и платежеспособности заемщика

$$D \leq D_{max}, D_{max} = KИЗ \cdot C, V \leq V_{max},$$

$$V = D / a_{12n; i/12};$$

$$V_{max} = \min(V^1, V^2), V^1 = \gamma^1 \cdot ДЗ,$$

$$V^2 = \gamma^2 \cdot ДЗ, n \leq n_{max}; \quad (13)$$

- ограничения на выполнение условий погашения задолженности

$$R_k = R_1 (1 + i/12)^{k-1}, R_1 = V - Di/12,$$

$$W_k = \sum_{\lambda=1}^k R_{\lambda}, W_{12n} = \sum_{\lambda=1}^{12n} R_{\lambda} = D,$$

$$D_k = D - \sum_{\lambda=1}^k R_{\lambda}, D_{12n} = 0, J_k = V - R_k,$$

$$J_1 = Di/12, k = 1, 2, \dots, 12n. \quad (14)$$

Модель задачи выбора параметров ипотечного кредита и формирования процедуры его погашения (13), (14) позволяет определить ежемесячные постоянные выплаты, которые направляются на погашение долга и выплату процентов в процессе его амортизации.

#### Список литературы

1. Четыркин Е. М. Финансовая математика: Учебник. – 4-е изд. – М.: Дело, 2004. – 400 с.

### DISCRETE MODEL OF OPTIMAL DECISION – TAKING MECHANISM FOR CHOOSING CONSTANT MORTGAGE CREDIT PARAMETERS

© 2005 D. Z. Vagapova, M. Y. Sorokina

Samara State Aerospace University

The paper presents setting up a problem of choosing mortgage credit parameters with constant periodical payments. A model of decision – taking mechanism is formed with regard to the borrower's solvency, methods of handling it are discussed.