

УДК 535.42

НЕПАРАКСИАЛЬНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ РАСЧЁТ ДИФРАКЦИОННЫХ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ, ФОКУСИРУЮЩИХ В СУБВОЛНОВОЕ СВЕТОВОЕ ПЯТНО

© 2014 Е. Ю. Богданова, С. Н. Хонина

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Основное направление усилий в преодолении дифракционного предела в последнее время сосредоточено на использовании затухающих волн. Однако при реализации возникает существенный недостаток: сверхразрешение достигается лишь в непосредственной близости от устройства, а именно на расстоянии менее длины волны. Следовательно, использовать имеющиеся результаты, в частности, в уплотнении информации на оптических носителях, невозможно. Целью настоящей работы является расчёт оптических элементов для субволновой фокусировки монохроматической волны на расстоянии нескольких десятков длин волн. В статье нашла отражение проблема преодоления предела дифракции, выраженного в соответствии с теорией Эбби и критерием Рэлея, которая является темой множества фундаментальных и прикладных исследований в современной оптике. Большое место в работе занимает рассмотрение субволновой локализации излучения, основанной на эффекте интерференции, которая позволяет уменьшать размеры светового пятна за счёт перераспределения энергии в периферийную область. Расчёты выполнены с использованием итерационного алгоритма, который основан на методе разложения по плоским волнам и минимизации функционала методом главных направлений Брента. В работе задача рассмотрена в цилиндрическом и радиальном случаях. Особое внимание уделяется исследованию по поиску решения, более удобного для практической реализации. Демонстрируется актуальность работы и перспективность разработки решения данного вопроса для хранения данных, бесконтактного зондирования изображений и нанолитографии.

Суперосциллирующие волны, субволновая фокусировка, дифракционный предел, метод разложения по плоским волнам.

Введение

Преодоление предела дифракции, выраженного в соответствии с теорией Эбби и критерием Рэлея, является темой множества фундаментальных и прикладных исследований в современной оптике. Этот интерес связан с тем, что область применения сверхразрешения не ограничивается улучшением качества изображений, но уже показана эффективность в уплотнении записи на оптических носителях информации, в литографии и наноструктурировании, оптическом манипулировании вплоть до атомных размеров и во многих других областях.

Основное направление усилий в преодолении дифракционного предела в последнее время сосредоточено на использовании затухающих волн. В результате были разработаны такие эффективные концепции, как сканирующая ближ-

непольная микроскопия [1, 2], STED-микроскопия [3, 4], концентраторы полей [5–7] и суперлинзы [8–12].

Однако для реализации оптической суперлинзы требуется метаматериал с отрицательным показателем преломления, который ещё необходимо научиться производить. Другие разработки при всех своих достоинствах обладают существенным недостатком: сверхразрешение достигается лишь в непосредственной близости от устройства, а именно на расстоянии менее длины волны.

Таким образом, использовать имеющиеся результаты, в частности, в уплотнении информации на оптических носителях, невозможно.

В работе [13] было показано, что для формирования поля с субволновыми областями концентрации излучения может быть использована интерференция затухающих волн [14, 15], создаваемая специ-

ально разработанной амплитудно-фазовой оптической маской. Причём фокусировка в субволновую область возможна на расстояниях, значительно превышающих пределы зоны затухающих (неоднородных) волн.

Объяснение природы такого явления показано на рис. 1 – формирование светового пятна субволнового размера происходит на дне световой ямы, окружённой высоким световым барьером (боковыми лепестками). Т. е. уменьшение размеров светового пятна достигается за счёт ухода энергии в периферийную область, что полностью согласуется с теорией сверхразрешения Торалдо [16].

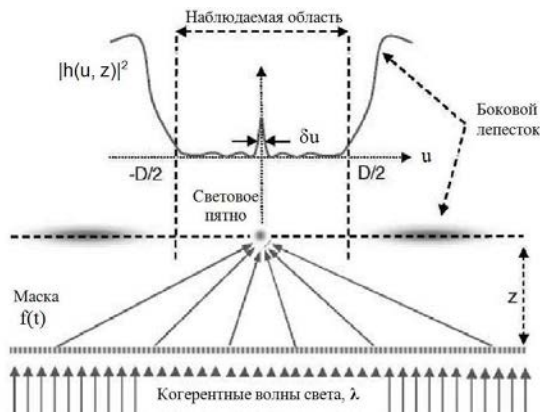


Рис.1. Схема формирования субволнового светового пятна, окружённого мощными боковыми лепестками

Заметим, что в статье [13] было получено решение, для реализации которого потребуется не менее сверхразрешающая технология.

В данной работе проводится аналогичное исследование с целью найти решение, более удобное для практической реализации. Поиск такого решения строится на итерационном алгоритме [17, 18], основанном на методе разложения по плоским волнам и минимизации функционала методом главных направлений Брента [19]. Задача рассмотрена в цилиндрическом и радиальном случаях.

1. Дифракционный предел

В оптике операция преобразования Фурье реализуется собирающей линзой. При помещении в её переднюю фокальную плоскость транспаранта с изображением, освещаемого плоским волновым фронтом, в задней фокальной плоскости формируется Фурье-образ входного поля (пространственно-частотный спектр):

$$G(v, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp \left[-i \frac{k}{f} (vx + \mu y) \right] dx dy, \tag{1}$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число; λ – длина волны излучения; f – фокусное расстояние линзы.

1.1. Цилиндрический случай

Если входное поле факторизуется и может быть представлено как произведение двух одномерных функций от независимых переменных, то в этом случае действие преобразования Фурье рассматривается как цилиндрическое по каждой переменной:

$$G(v, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) \exp \left[-i \frac{k}{f} vx \right] dx \times \int_{-\infty}^{\infty} g_2(y) \exp \left[-i \frac{k}{f} \mu y \right] dy. \tag{2}$$

В оптике прямоугольная функция от двух координат может рассматриваться как прямоугольная апертура. Таким образом, в данном случае преобразование Фурье описывает дифракцию Фраунгофера плоской волны на прямоугольной апертуре. Такая апертура является функцией с разделяющимися в декартовых координатах переменными:

$$g(x, y) = \begin{cases} A, & |x| \leq L_x, |y| \leq L_y \\ 0, & |x| > L_x, |y| > L_y \end{cases} \tag{3}$$

и её Фурье-образ равен:

$$G(v, \mu) = 4AL_x L_y \operatorname{sinc} \left[\frac{kL_x v}{f} \right] \operatorname{sinc} \left[\frac{kL_y \mu}{f} \right], \quad (4)$$

где $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$.

При полуширине апертуры, равной фокусу, получается предельная для неиммерсионного объектива числовая апертура. Рассмотрим график интенсивности, соответствующий функции $\operatorname{sinc}^2(kx)$ (рис. 2).

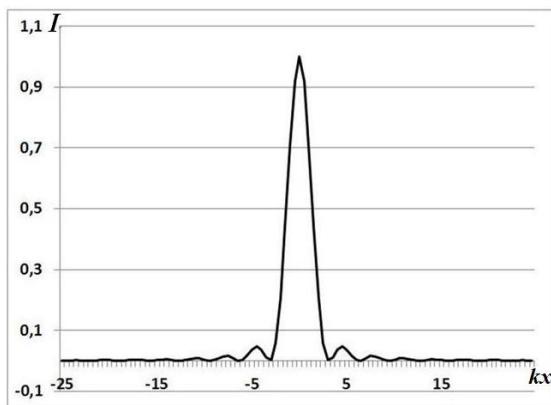


Рис.2. График интенсивности, соответствующий функции $\operatorname{sinc}^2(kx)$

Первый ноль функции $\operatorname{sinc}^2(kx)$ находится в точке $kx_0 = \pi$. Отсюда следует, что минимальный радиус светового пятна в цилиндрическом случае равен:

$$x_0 = \lambda / 2. \quad (5)$$

Ширина центрального лепестка на половине высоты интенсивности (full width at half maximum, *FWHM*) равна $FWHM = 2,798$, т. е. $kx_1 = 2,798$. Отсюда следует, что минимальный размер (дифракционный предел) в цилиндрическом случае равен:

$$x_1 = 0,442\lambda. \quad (6)$$

1.2. Радиальный случай

В данном случае имеется функция, обладающая осевой симметрией, т. е. $g(r, \varphi) = g(r)$. Тогда преобразование Фурье (1) в полярных координатах имеет следующий вид:

$$G(\rho, \theta) = \int_0^\infty g(r) r dr \times \int_0^{2\pi} \exp \left(-i \frac{k}{f} r \rho \cos(\varphi - \theta) \right) d\varphi. \quad (7)$$

Поскольку внутренний интеграл в выражении (7) есть функция Бесселя нулевого порядка, то Фурье-образ в данном случае не зависит от полярного угла θ :

$$G(\rho) = 2\pi \int_0^\infty g(r) J_0 \left(\frac{k}{f} r \rho \right) r dr. \quad (8)$$

Этот вид двумерного преобразования Фурье для осесимметричных функций известен также как преобразование Фурье–Бесселя или преобразование Ханкеля нулевого порядка.

Если рассматривается фокусировка плоской волны, ограниченной круглой апертурой:

$$g(r) = \begin{cases} A, & |r| \leq R \\ 0, & |r| > R \end{cases}, \quad (9)$$

то Фурье-образ имеет следующий вид:

$$G(\rho) = 2\pi AR^2 \operatorname{besc} \left(\frac{kR\rho}{f} \right), \quad (10)$$

где $\operatorname{besc}(r) = J_1(r)/r$.

При радиусе апертуры, равной фокусу, получается предельная для воздуха числовая апертура. Рассмотрим график интенсивности, соответствующий функции $\operatorname{besc}^2(k\rho)$ (рис. 3).

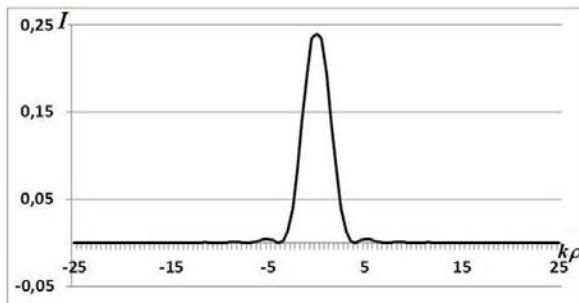


Рис.3. График интенсивности, соответствующий функции $\text{besc}^2(k\rho)$

Первый ноль функции $\text{besc}^2(k\rho)$ равен первому нулю функции $J_1(k\rho)$ и соответствует $k\rho_0 = 3,81$. Отсюда следует, что минимальный радиус светового пятна в радиальном случае равен:

$$\rho_0 = 0,61\lambda. \quad (11)$$

Определив, что $FWHM = 3,26$, т. е. $k\rho_1 = 3,26$, получаем минимальный размер (дифракционный предел) в радиальном случае:

$$\rho_1 = 0,51\lambda. \quad (12)$$

2. Оптимизационный расчёт для цилиндрического случая

Как было показано, дифракционный предел в цилиндрическом случае равен $x_1 = 0,44\lambda$ для прямоугольной апертуры и $\rho_1 = 0,51\lambda$ для круглой апертуры. Далее попытаемся преодолеть этот предел в области распространяющихся волн (т. е. на расстоянии более длины волны). Модель распространения основана на разложении по плоским волнам:

$$F(u, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)H(u-x, z)dx, \quad (13)$$

где

$$H(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikz\sqrt{1-\alpha^2})\exp(ik\alpha x)d\alpha \quad (14)$$

оператор распространения в свободном пространстве.

В расчётах используются следующие параметры: входное поле задаётся в области $x \in [-10\lambda, 10\lambda]$, выходное поле рассчитывается на расстоянии $z = 20\lambda$ в области $u \in [-1\lambda, 1\lambda]$.

При оптимизации накладываются условия на наблюдаемую область такие, чтобы преодолеть дифракционный предел. В частности, в интервале $[-1\lambda, 1\lambda]$ концентрация энергии задаётся в области $[-0,2\lambda, 0,2\lambda]$, то есть $\delta u = 0,4\lambda$, а в области $[-1\lambda, -0,2\lambda]$ и $(0,2\lambda, 1\lambda]$ энергия не должна превышать 0,1, то есть боковые лепестки отодвигаются как можно дальше.

2.1. Оптимизация для бинарного распределения

Функция $f(x)$ принимает следующие значения:

- $\{0, 1\}$ – для амплитудного элемента;
- $\{-1, 1\}$ – для фазового элемента;
- $\{-1, 1, -i, i, 0\}$ – для амплитудно-фазового элемента.

Эти элементы легко изготовить на практике. Полученные результаты с использованием данных вариантов оптических элементов оказались наилучшими для фазового элемента. Входное распределение в данном случае было задано в области $x \in [-50\lambda, 50\lambda]$. На него приходится 100 ячеек, каждая размером λ (рис. 4, а). Соответствующее распределение интенсивности на расстоянии 20λ показано на рис. 4, б. Размер светового пятна в этом случае $FWHM = 0,493\lambda$, что больше дифракционного предела, т. е. в данном случае не удаётся решить поставленную задачу.

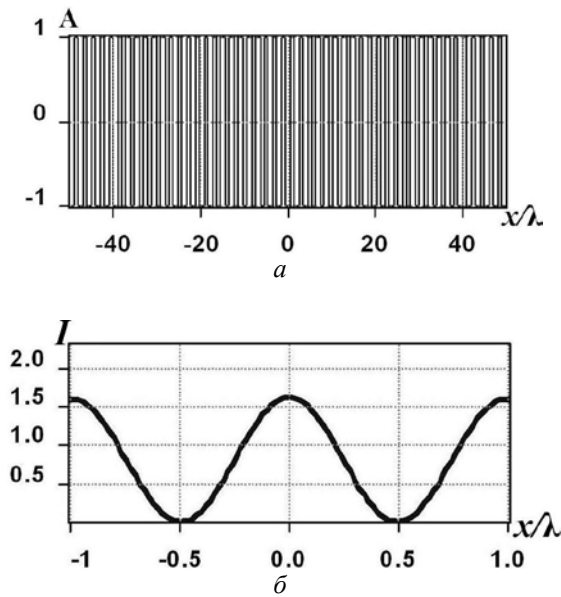


Рис.4. Входное распределение для фазового элемента (а) и соответствующее распределение интенсивности (б) после оптимизации

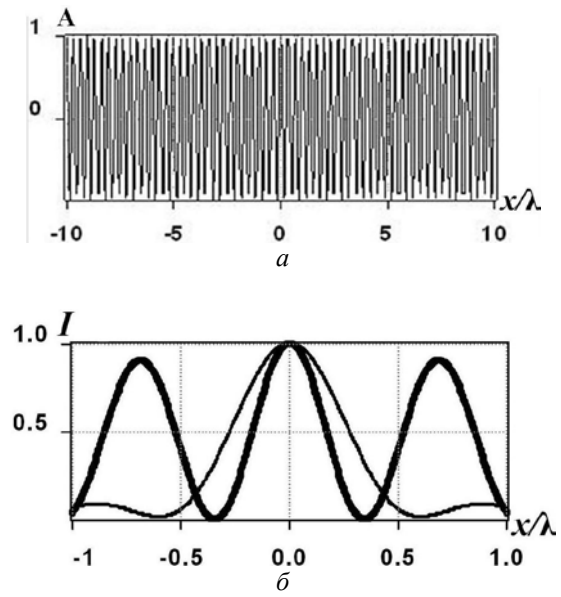


Рис.5. Входное распределение для элемента вида (15) (а) и соответствующее распределение интенсивности (б) для изолированного центрального пятна (тонкая линия) и светового пятна минимального размера (толстая линия)

2.2. Оптимизация

для косинусоидального распределения

Рассмотрим ситуацию, когда на вход подаётся распределение следующего вида:

$$f(x) = \cos[a\pi(bx)^c]. \tag{15}$$

После выполнения оптимизации по каждому параметру в выражении (15) выяснилось, что не удаётся одновременно удовлетворить двум условиям: преодолеть дифракционный предел и отодвинуть боковые лепестки от центрального пика.

При оптимизации удалось получить размер светового пятна меньше дифракционного предела $FWHM = 0,341\lambda$, но пятно окружено боковыми лепестками соизмеримой величины. На рис. 5 показаны соответствующие результаты расчёта.

Рассмотрим случай, когда на вход подаётся суперпозиция косинусов, т. е. функция следующего вида:

$$f(x) = \sum_n d_n \cos[a_n \pi (b_n x)^{c_n}]. \tag{16}$$

Функция (16) при параметрах:

$$f(x) = \cos(6\pi x) + \cos(3\pi\sqrt{5x}) \tag{17}$$

показана на рис. 6, а.

Для оптимизации используем следующие условия: концентрация энергии задаётся на $[-0,2\lambda, 0,2\lambda]$ и не превышает значение 0,1 на остальной части интервала $[-1\lambda, 1\lambda]$.

Результаты расчёта при различной величине апертуры входного поля показаны на рис. 6, б.

Дифракционный предел преодолен во всех случаях, но наилучший результат получен в случае элемента длиной $[-50\lambda, 50\lambda]$, когда $FWHM = 0,378\lambda$, при этом происходит уменьшение отсчётов на один шаг элемента. При оптимизации элемента длиной 20λ $FWHM = 0,431\lambda$, длиной 60λ $FWHM = 0,417\lambda$.

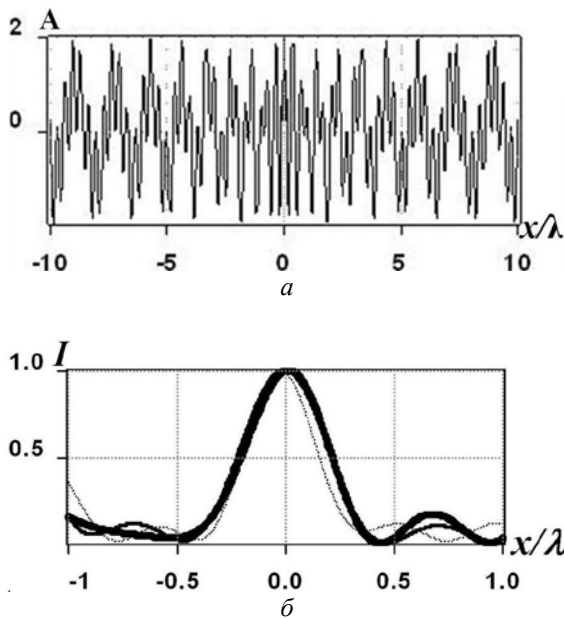


Рис.6. Входное распределение для суперпозиции (17) (а) и интенсивности после оптимизации для элемента размером 20λ (толстая линия); 60λ (тонкая линия); 100λ (пунктирная линия)

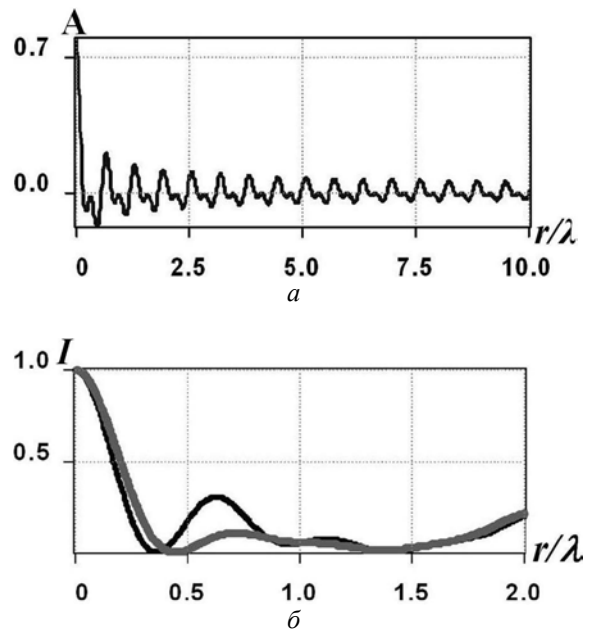


Рис.7. Входное распределение для суперпозиции вида (18) (а) и распределение интенсивности после оптимизации (б): при высоте боковых лепестков $0,1$ (серая линия) и $0,3$ (чёрная линия)

3. Оптимизация расчётов для радиального случая

Рассмотрим радиальный случай с наложением на целевую область тех же ограничений, что и в предыдущем разделе.

Будем использовать на входе суперпозицию функций Бесселя нулевого порядка следующего вида:

$$g(r) = \sum_n c_n J_0(\alpha_n r). \tag{18}$$

На рис. 7, а показана суперпозиция (18) для параметров, имеющих следующие значения: $c_1 = c_2 = 1, \alpha_1 = 10, \alpha_2 = 20$.

Наилучшие результаты при оптимизации входного поля (18), состоящего из двух слагаемых, были получены при вариации как α_n , так и c_n .

В случае наложения на боковые лепестки условия, что они не должны превышать по высоте треть интенсивности центрального пика, преодолеть дифракционный предел удавалось только при использовании комплексных коэффициентов c_n .

В частности, при условии, что боковые лепестки не должны быть выше $0,1$ высоты центрального пика, формируется круглое световое пятно с $FWHM = 0,413\lambda$ (рис. 7, б, серая линия), а при условии высоты боковых лепестков вплоть до $0,3$ высоты центрального пика возможно уменьшение светового пятна до $FWHM = 0,339\lambda$ (рис. 7, б, чёрная линия).

Заключение

Цель работы заключалась в расчёте оптического элемента, обеспечивающего субволновую фокусировку за пределами области ближнего поля (затухающих волн). При этом исследовалась возможность удовлетворения технологическим требованиям изготовления такого элемента.

Бинарный амплитудный или фазовый элемент является самым простым в изготовлении. Однако исследования показали, что если детали этого элемента имеют размер больше длины волны, то дифракционный предел не преодолевается. Задачу возможно решить при исполь-

зовании амплитудно-фазового элемента, например, описываемого суперпозицией косинусных функций.

Лучший результат удалось получить в радиальном случае при использовании амплитудно-фазового элемента, описываемого суперпозицией функций Бесселя нулевого порядка.

Таким образом, показана возможность формирования субволнового изолированного светового пятна на расстояниях нескольких длин волн от оптического элемента, согласованного с суперпозицией аналитических функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 13-07-00266.

Библиографический список (References)

1. Betzig E., Trautman J.K., Harris T.D., Weiner J.S., Kostelak R.L. Breaking the Diffraction Barrier: Optical Microscopy on a Nanometer Scale // *Science*. 1991. Vol. 251. P. 1468–1470.
2. Hartschuh A., Sanchez E.J., Xie X.S., Novotny L. High-Resolution Near-Field Raman Microscopy of Single-Walled Carbon Nanotubes // *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 90. P. 701-704.
3. Hell S.W., Wichmann J. Breaking the diffraction resolution limit by stimulated-emission-depletion fluorescence microscopy // *Optics Letters*. 1994. No. 19. P. 780–782.
4. Khonina S.N., Golub I. How low can STED go Comparison of different write-erase beam combinations for stimulated emission depletion microscopy // *Journal of the Optical Society of America A*. 2012. V. 29, no. 10. P. 2242-2246.
5. Li K., Stockman M. I., Bergman D.J. Self-Similar Chain of Metal Nanospheres as an Efficient Nanolens // *Physical Review Letters*. 2003. No. 91. P. 599-603.
6. Stockman M.I. Nanofocusing of optical energy in tapered plasmonic waveguides // *Physical Review Letters*. 2004. No. 93. P. 137404.
7. Merlin R. Near-field plates: sub-wavelength focusing and radiationless interference // *Science*. 2008. V. 320. P. 511-513.
8. Pendry J.B. Negative refraction makes a perfect lens // *Physical Review Letters*. 2000. No. 85. P. 3966–3969.
9. Salandrino A., Engheta N. Far-field subdiffraction optical microscopy using metamaterial crystals: Theory and simulations // *Physical Review B*. 2006. No. 74. P. 205436.
10. Jacob Z., Alekseyev L.V., Narimanov E. Optical hyperlens: far-field imaging beyond the diffraction limit // *Optics Express*. 2006. No. 14. P. 8247–8256.
11. Fang N., Lee H., Sun C., Zhang X. Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens // *Science*. 2005. V. 308. P. 534–537.
12. Liu Z., Lee H., Xiong Y., Sun C., Zhang X. Far-field optical hyperlens magnifying sub-diffraction-limited objects // *Science*. 2007. V. 315. P. 1686.
13. Huang Fu Min. Super-Resolution without Evanescent Waves // *Nano Letters*. 2009. V. 9, no. 3. P. 1249-1254.
14. Merlin R. Radiationless Electromagnetic Interference: Evanescent-Field Lenses and Perfect Focusing // *Science*. 2007. V. 317. P. 927-929.
15. Fang N. Sub-Diffraction-Limited Optical Imaging with a Silver Superlens // *Science*. 2005. V. 308. P. 534-537.
16. Toraldo di Francia G. Super-gain antennas and optical resolving power // *Nuovo Cimento Suppl*. 1952. V. 9. P. 426–427.
17. Khonina S.N., Golub I. Enlightening darkness to diffraction limit and beyond: comparison and optimization of different polarizations for dark spot generation // *Journal of the Optical Society of America A*. 2012. V. 29, no. 7. P. 1470-1474.
18. Khonina S.N., Volotovskiy S.G. Minimizing the bright/shadow focal spot size with controlled side-lobe increase in high-numerical-aperture focusing systems // *Advances in Optical Technologies*. 2013. Article number 267684.
19. Brent R.P. Algorithms for minimization without derivatives // *Prentice-Hall*. 1973. P. 195.

Информация об авторах

Богданова Екатерина Юрьевна, магистрант кафедры технической кибернетики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: fwinter@yandex.ru. Область научных интересов: оптический анализ изображений.

Хонина Светлана Николаевна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры технической кибернетики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: khonina@smr.ru. Область научных интересов: сингулярная оптика, дифракционная оптика, оптический анализ изображений.

NONPARAXIAL ITERATIVE CALCULATION OF DIFFRACTIVE OPTICAL ELEMENTS FOCUSING IN A SUBWAVE LIGHT SPOT

© 2014 E. Y. Bogdanova, S. N. Khonina

Samara State Aerospace University, Samara, Russian Federation

The main efforts in overcoming the diffraction limit have been recently concentrated on the use of damped waves. The implementation, however, is connected with a serious drawback: superresolution is attained only in the immediate vicinity of the device, namely, at a distance of less than the wavelength. It is, therefore, impossible to use the available results, in particular, to reduce information on optical media. The aim of the paper is calculation of optical elements for subwave focusing of a monochromatic wave at a distance of several dozens of wave lengths. The problem of overcoming the diffraction limit expressed in accordance with the Abby theory and the Raleigh criterion dealt with in multiple fundamental and applied investigations is discussed in the paper. The analysis of subwavelength localization of radiation based on the interference effect that makes it possible to reduce the sizes of a light spot due to redistribution of energy in the peripheral area holds a prominent place in the paper. Calculations are performed using the iterative algorithm based on the method of plane wave expansion and the method of main directions. The problem is considered for the cylindrical and radial cases. Special attention is given to the search of solutions that would be more convenient for practical implementation. Prospective viability of developing the solution of the problem for data storage, contactless probing and nanolithography is demonstrated.

Super-oscillating waves, subwavelength focusing, diffraction limit, method of plane wave expansion.

About the authors

Bogdanova Ekaterina Yurievna, student in the Master's programme, Department of Engineering Cybernetics, Samara State Aerospace University. E-mail: fwinter@yandex.ru. Area of Research: optical image processing.

Khonina Svetlana Nikolaevna, Doctor of Science (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Engineering Cybernetics, Samara State Aerospace University. E-mail: khonina@smr.ru. Area of Research: singular optics, diffractive optics, optical image processing.