

УДК 534.83

РАСЧЁТ ЗВУКОИЗОЛЯЦИИ МНОГОСЛОЙНОЙ КОНСТРУКЦИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА «ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ»

© 2014 П. А. Попов¹, А. С. Осипов², А. А. Синдюков¹¹Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)²ОАО «РКЦ «ПРОГРЕСС», г. Самара

Многослойные конструкции широко применяются в строительстве жилых помещений, судостроении, в авиационной и ракетно-космической технике. При проектировании таких конструкций для прогнозирования уровней шума, возникающего внутри того или иного помещения или отсека, необходима оценка их звукоизоляционной способности. В данной работе описывается методика расчёта звукоизоляции многослойной конструкции, разработанная на основе решения волновых уравнений в каждом из слоёв с учётом угла падения звуковых волн и потерь в слоях; ввода граничных условий, устанавливающих равенство на границах сред нормальных составляющих колебательных скоростей и акустических давлений; составления системы алгебраических комплексных уравнений и соответствующего им матричного уравнения, составления обратной матрицы коэффициентов при функциях акустического давления. Приводятся примеры расчётов коэффициентов звукоизоляции для многослойных конструкций с различными параметрами (поверхностными массами, толщинами слоёв, различными углами падения), приводится графическое сравнение результатов расчётов методами «обратной матрицы» и импедансным методом, а также графическое сравнение результатов лётно-конструкторских измерений (ЛКИ) звукоизоляции штатного головного обтекателя (ГО), состоящего из слоёв углеродной стеклоткани, алюминиевых сот и слоя пенополиуретана, и результаты расчёта методом «обратной матрицы», указывается преимущество используемого метода.

Акустическое давление, звукоизоляция, коэффициент потерь, обратная матрица, импеданс, коэффициент распространения, волновое число, частота.

Звукоизоляционные характеристики различных панелей условно разделяют на «резонансные» и «нерезонансные». Звукоизоляционный спектр, где перепад интенсивности акустического давления зависит лишь от инерционных свойств обечайки, называют «нерезонансной» звукоизоляцией. Наиболее интенсивное прохождение акустических волн наблюдается в местах совпадения собственных частот звукоизолирующей панели и частот акустических волн, а также на частотах, соответствующих возникновению стоячих волн в замкнутых объёмах («резонансная звукоизоляция»). Наиболее простые закономерности «нерезонансной» звукоизоляции, получившие практическое применение, могут быть сформулированы и проанализированы при рассмотрении прохождения звука через плоскопараллельный слой произвольной толщины и бесконечной длины. Будем предполагать, что

распространение звука в слое происходит только в виде продольных волн.

В соответствии с классическим определением *звукоизоляции* [1] имеем:

$$R = 10 \lg \left(\frac{I_{11}}{I_{31}} \right),$$

где I_{11} – интенсивность падающей волны, Вт/м²; I_{31} – интенсивность прошедшей волны, Вт/м².

Если среды по разные стороны конструкции одинаковые, получим:

$$R = 10 \lg \left(\frac{P_{11}^2}{P_{31}^2} \right). \quad (1)$$

Рассмотрим волновое уравнение:

$$\Delta P - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа;

c – скорость звука в веществе, м/с; P – функция пульсаций давления, Па.

Его решение представляет собой распространение акустических волн внутри каждой из сред. В нашем, частном, случае – это распространение акустического давления соответственно слева, внутри и справа («отраженная часть» отсутствует) от границы с конструкцией панели:

$$\begin{aligned} P_1(x, t) &= P_{11}e^{i(\omega t - k_1 x)} + P_{12}e^{i(\omega t + k_1 x)}, \\ P_2(x, t) &= P_{21}e^{i(\omega t - k_2 x)} + P_{22}e^{i(\omega t + k_2 x)}, \\ P_3(x, t) &= P_{31}e^{i(\omega t - k_3 x)}. \end{aligned}$$

Амплитуды (константы интегрирования) P_{sj} находят из граничных условий, выражающих III закон Ньютона:

$$P_s = P_{s+1}, \quad (2)$$

а также закон равенства нормальных составляющих колебательных скоростей, которые на границе равны между собой [1]:

$$v_s^n = v_{s+1}^n. \quad (3)$$

При этом связь между нормальными составляющими колебательных скоростей и давления на границе имеет вид:

$$v_s^n = \frac{P_{sj} - P_{s,j+1}}{\rho_s c_s}, \quad (4)$$

где s – количество сред (в данном случае $s = 1, 2$), $j = 1, 2$ – индекс падающей «1» и отраженной «2» волн.

Установим граничные условия, для этого воспользуемся выражениями (1) – (4):

1) На границе воздуха и левого края конструкции при $x=0$ получим:

$$\begin{aligned} P_{11} + P_{12} &= P_{21} + P_{22}, \\ \frac{P_{11} - P_{12}}{\rho_1 c_1} &= \frac{P_{21} - P_{22}}{\rho_2 c_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

2) На границе правого края конструкции и воздуха при $x=h$:

$$\begin{aligned} P_{21}e^{i(\omega t - k_2 h)} + P_{22}e^{i(\omega t + k_2 h)} &= P_{31}e^{i(\omega t - k_3 h)}, \\ \frac{P_{21}e^{i(\omega t - k_2 h)} - P_{22}e^{i(\omega t + k_2 h)}}{\rho_2 c_2} &= \frac{P_{31}e^{i(\omega t - k_3 h)}}{\rho_1 c_1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Как легко заметить, выражения (6) можно сократить на $e^{i\omega t}$ при $x=h$:

$$\begin{aligned} P_{21}e^{-ik_2 h} + P_{22}e^{ik_2 h} &= P_{31}e^{-ik_3 h}, \\ \frac{P_{21}e^{-ik_2 h} - P_{22}e^{ik_2 h}}{\rho_2 c_2} &= \frac{P_{31}e^{-ik_3 h}}{\rho_1 c_1}. \end{aligned} \quad (7)$$

В соответствии с определением звукоизоляции (1) найдём из 4 уравнений (5)

и (7) отношение $\frac{P_{11}^2}{P_{31}^2}$. Для этого выразим

амплитуды падающей, отражённой и прошедшей волн P_{11} , P_{21} , P_{22} через амплитуду прошедшей волны P_{31} .

В результате получим следующее выражение для расчёта «нерезонансной» звукоизоляции произвольной толщины [1]:

$$R = 10 \lg(\cos^2(hk_2) + \frac{1}{4}(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1})^2 \sin^2(hk_2)),$$

где h – толщина слоя, k_2 – волновое число материала конструкции, $\rho_1 c_1$ – акустическое сопротивление воздуха, $\rho_2 c_2$ – акустическое сопротивление материала конструкции.

Для многослойных конструкций, учитывая потери в веществе, наклонный угол падения, можно написать следующую систему уравнений, выражающих граничные условия (2), (3), (4):

$$\begin{aligned} P_{11} + P_{12} &= P_{21} + P_{22}, \\ \frac{P_{11} - P_{12}}{Z_{11}} &= \frac{P_{21} - P_{22}}{Z_{22}}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{P_{21}e^{\gamma_2(-d_{11}\sin(\alpha_2)-d_1\cos(\alpha_2))} + P_{22}e^{\gamma_2(-d_{11}\sin(\alpha_2)+d_1\cos(\alpha_2))}}{Z_{22}} = \frac{P_{31}e^{\gamma_3(-d_{11}\sin(\alpha_3)-d_1\cos(\alpha_3))} + P_{32}e^{\gamma_3(-d_{11}\sin(\alpha_3)+d_1\cos(\alpha_3))}}{Z_{33}},$$

$$\frac{P_{21}e^{\gamma_2(-d_{11}\sin(\alpha_2)-d_1\cos(\alpha_2))} - P_{22}e^{\gamma_2(-d_{11}\sin(\alpha_2)+d_1\cos(\alpha_2))}}{Z_{22}} = \frac{P_{31}e^{\gamma_3(-d_{11}\sin(\alpha_3)-d_1\cos(\alpha_3))} - P_{32}e^{\gamma_3(-d_{11}\sin(\alpha_3)+d_1\cos(\alpha_3))}}{Z_{33}},$$

...

$$P_{j1}e^{\gamma_j(-d_{j-1,j-1}\sin(\alpha_j)-d_{j-1}\cos(\alpha_j))} + P_{j2}e^{\gamma_j(-d_{j-1,j-1}\sin(\alpha_j)+d_{j-1}\cos(\alpha_j))} =$$

$$= P_{j+1,1}e^{\gamma_{j+1}(-d_{j-1,j-1}\sin(\alpha_{j+1})-d_{j-1}\cos(\alpha_{j+1}))} + P_{j+1,2}e^{\gamma_{j+1}(-d_{j-1,j-1}\sin(\alpha_{j+1})+d_{j-1}\cos(\alpha_{j+1}))},$$

$$\frac{P_{j1}e^{\gamma_j(-d_{j-1,j-1}\sin(\alpha_j)-d_{j-1}\cos(\alpha_j))}}{Z_{jj}} - \frac{P_{j2}e^{\gamma_j(-d_{j-1,j-1}\sin(\alpha_j)+d_{j-1}\cos(\alpha_j))}}{Z_{jj}} =$$

$$= \frac{P_{j+1,1}e^{\gamma_{j+1}(-d_{j-1,j-1}\sin(\alpha_{j+1})-d_{j-1}\cos(\alpha_{j+1}))}}{Z_{j+1,j+1}} - \frac{P_{j+1,2}e^{\gamma_{j+1}(-d_{j-1,j-1}\sin(\alpha_{j+1})+d_{j-1}\cos(\alpha_{j+1}))}}{Z_{j+1,j+1}},$$

$$P_{n-1,1}e^{\gamma_{n-1}(-d_{n-2,n-2}\sin(\alpha_{n-1})-d_{n-2}\cos(\alpha_{n-1}))} + P_{n-1,2}e^{\gamma_{n-1}(-d_{n-2,n-2}\sin(\alpha_{n-1})+d_{n-2}\cos(\alpha_{n-1}))} = P_{n,1}e^{\gamma_n(-d_{n-2,n-2}\sin(\alpha_n)-d_{n-2}\cos(\alpha_n))},$$

$$\frac{P_{n-1,1}e^{\gamma_{n-1}(-d_{n-2,n-2}\sin(\alpha_{n-1})-d_{n-2}\cos(\alpha_{n-1}))}}{Z_{n-1,n-1}} - \frac{P_{n-1,2}e^{\gamma_{n-1}(-d_{n-2,n-2}\sin(\alpha_{n-1})+d_{n-2}\cos(\alpha_{n-1}))}}{Z_{n-1,n-1}} = \frac{P_{n,1}e^{\gamma_n(-d_{n-2,n-2}\sin(\alpha_n)-d_{n-2}\cos(\alpha_n))}}{Z_{n,n}},$$

где α_j – угол падения звуковой волны, отсчитываемый от нормали,

$\alpha_{j+1} = \arcsin\left(\frac{c_{j+1}}{c_j}\sin(\alpha_j)\right)$ – угол преломления в материале (закон Снеллиуса),

$Z_{jj} = \frac{Z_j}{\cos(\alpha_j)}$ – импеданс материала конструкции или воздуха с учётом угла падения,

$Z_j = \rho_j c_j \sqrt{1 + i\eta_j}$ – акустическое сопротивление в материале конструкции или воздухе с учётом коэффициента потерь η_j , $d_{jj} = d_j \operatorname{tg}(\alpha_j)$, d_j – толщины слоёв, P_{jk} – амплитуды давлений акустических волн, $k=1,2$.

Суть предлагаемой методики заключается в следующем.

1. Составляется матрица из коэффициентов при амплитуде давлений акустических волн P_{jk} , при этом $P_{11} = 1 \text{ Па}$ (входное воздействие можно задать единичным).

Коэффициенты при неизвестных амплитудах обозначим следующим образом:

$$A_{j,k}^- = P_{j1}e^{\gamma_j(-d_k\sin(\alpha_j)-d_k\cos(\alpha_j))},$$

$$A_{j,k}^+ = P_{j2}e^{\gamma_j(-d_k\sin(\alpha_j)+d_k\cos(\alpha_j))}.$$

В табл. 1 представлены коэффициенты при P_{j1} и P_{j2} уравнений (8) в матричной форме.

Таблица 1. Представление коэффициентов при P_{j1} и P_{j2}

1	1	-1	-1	0	0	0	0	...	0
$\frac{1}{Z_{11}}$	$-\frac{1}{Z_{11}}$	$-\frac{1}{Z_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}}$	0	0	0	0	...	0
0	0	A_{21}^-	A_{21}^+	$-A_{31}^-$	$-A_{31}^+$	0	0	...	0
0	0	$\frac{A_{21}^-}{Z_{22}}$	$-\frac{A_{21}^+}{Z_{22}}$	$-\frac{A_{31}^-}{Z_{33}}$	$\frac{A_{31}^+}{Z_{33}}$	0	0	...	0
...
0	0	0	...	$A_{j,j-1}^-$	$A_{j,j-1}^+$	$-A_{j+1,j-1}^-$	$A_{j+1,j-1}^+$...	0
0	0	0	...	$\frac{A_{j,j-1}^-}{Z_{jj}}$	$-\frac{A_{j,j-1}^+}{Z_{jj}}$	$-\frac{A_{j+1,j-1}^-}{Z_{j+1,j+1}}$	$\frac{A_{j+1,j-1}^+}{Z_{j+1,j+1}}$...	0
...
0	0	0	0	0	0	...	$A_{n-1,n-2}^-$	$A_{n-1,n-2}^+$	$-A_{n,n-2}^+$
0	0	0	0	0	0	...	$\frac{A_{n-1,n-2}^-}{Z_{n-1,n-1}}$	$-\frac{A_{n-1,n-2}^+}{Z_{n-1,n-1}}$	$-\frac{A_{n,n-2}^+}{Z_{n,n1}}$

Данные табл. 1 обозначим через символ [Matr], амплитуды падающих и отраженных от слоёв конструкции акустических волн запишем в виде

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ P_{12} \\ P_{21} \\ P_{22} \\ \dots \\ P_{i1} \\ P_{i2} \\ \dots \\ P_{n+1,1} \end{pmatrix},$$

кроме того, введём в рассмотрение следующий вектор

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{Z_{11}} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Используя эти обозначения, уравнения (8) можно записать в матричном виде:

$$[\text{Matr}] \times \vec{p} = \vec{a}. \tag{9}$$

2. Для нахождения вектора \vec{p} необходимо найти матрицу, обратную матрице [Matr], которую обозначим $[\text{Matr}]^{-1}$, такую что $[\text{Matr}]^{-1} \times [\text{Matr}] = [E]$, где

$$[E] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ – единичная матрица}$$

(метод нахождения обратной матрицы представлен в [2]). При этом решение уравнения (9) представится в виде:

$$\vec{p} = [\text{Matr}]^{-1} \times \vec{a}. \tag{10}$$

Из (10) находится амплитуда $p_{n+1,1}$, затем вычисляется звукоизоляция

$$R = 10 \lg\left(\frac{1}{P_{n+1,1}^2}\right).$$

Результаты расчёта для трёх конструкций, состоящих из двух дюралевых панелей с поверхностными массами $M=t=2 \text{ кг/м}^2$; $M=3 \text{ кг/м}^2$, $t=1 \text{ кг/м}^2$; $M=3,6 \text{ кг/м}^2$, $t=0,4 \text{ кг/м}^2$ и воздухом между ними, представлены на рис. 1.

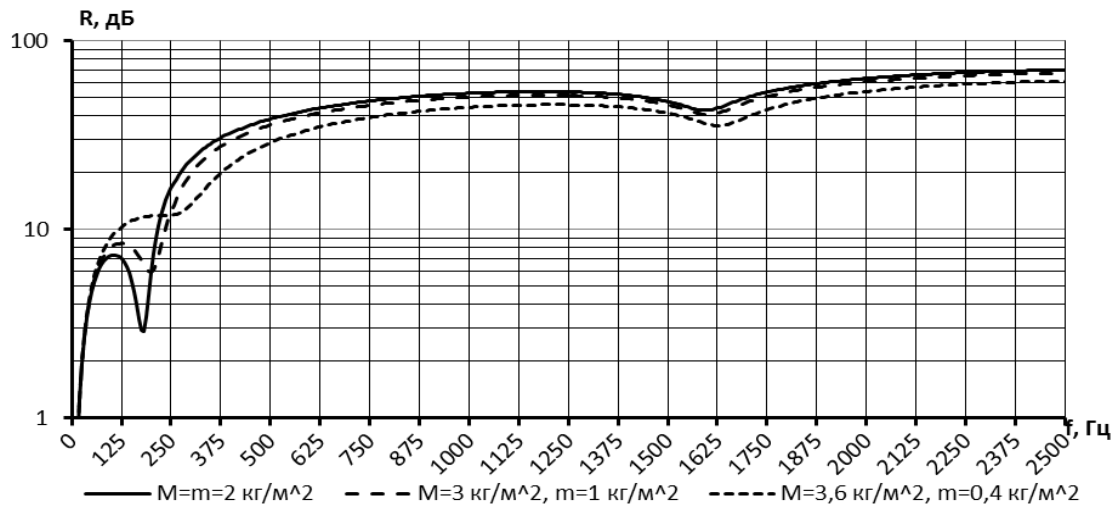


Рис. 1. Звукоизоляционные характеристики конструкции с различными поверхностными массами используемых в ней панелей

Как видно из рис. 1, при рассогласовании поверхностных масс пластин так называемый резонанс слоя (на рисунке он показан как снижение звукоизоляции) смещается в высокочастотную область и при этом демпфируется, но на более высоких частотах, большее рассогласование поверхностных масс приводит к сниже-

нию звукоизоляционной способности конструкции.

Для сравнительного анализа на рис. 2 представлены параметры звукоизоляции конструкций с различными по толщине воздушными слоями, но одинаковыми поверхностными массами панелей в конструкции.

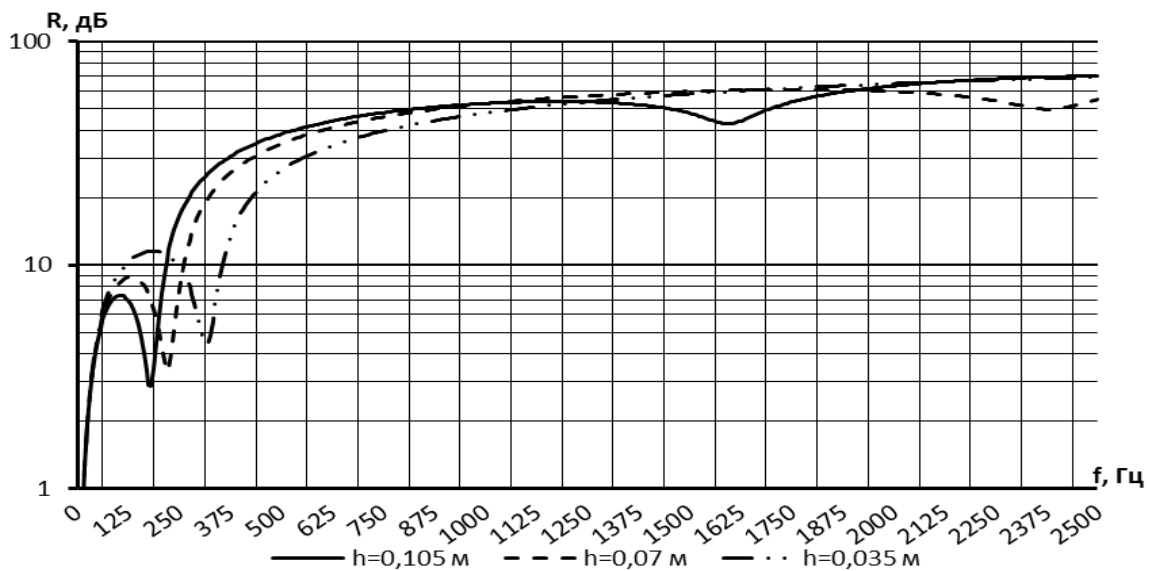


Рис. 2. Звукоизоляционные характеристики панелей с различными толщинами воздушного слоя

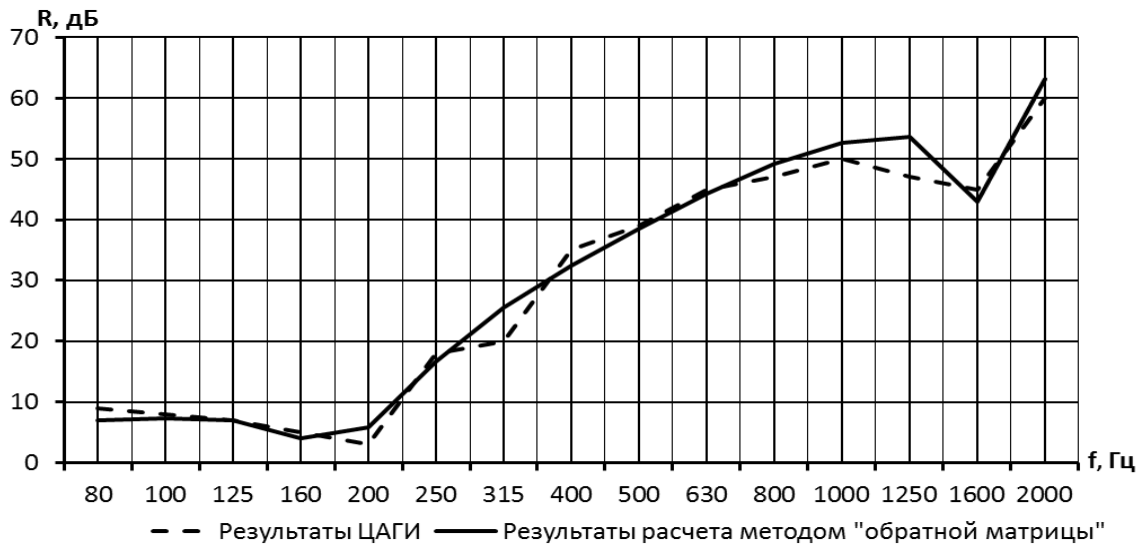


Рис. 3. Сравнение результатов расчёта звукоизоляции импедансным методом (ЦАГИ) и методом «обратной матрицы» при $M=t=2 \text{ кг/м}^3$

Как видно из рис. 2, уменьшение расстояния между панелями конструкции ведёт к смещению упомянутого выше резонанса слоя в высокочастотную область.

Похожие результаты были получены ранее ЦАГИ и представлены в статье [3] для аналогичной по конструкции трёхслойной панели (рис. 3).

Метод «обратной матрицы» позволяет находить звукоизоляцию при падении волн под различными углами, что является преимуществом по сравнению с алгоритмами, представленными в [1, 3].

На рис. 4 представлены уровни звукоизоляции для панелей с поверхностными массами $M = m = 2 \text{ кг/м}^2$ при перпендикулярном падении акустических волн и при угле падения 45° .

Данный метод был использован для оценки звукоизоляционного коэффициента штатного ГО в полосе частот от 625 Гц, при этом до 625 Гц применялась модель «резонансной звукоизоляции» [1]. Результаты расчёта (рис. 5) даны в сравнении с результатами ЛКИ.

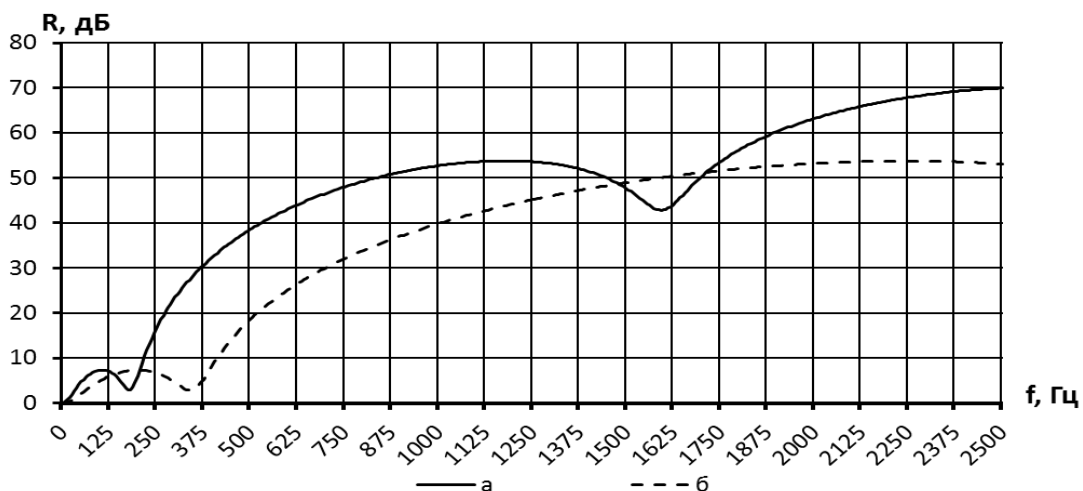


Рис. 4. Уровни звукоизоляции при перпендикулярном падении акустических волн (а) и при угле падения 45° (б)

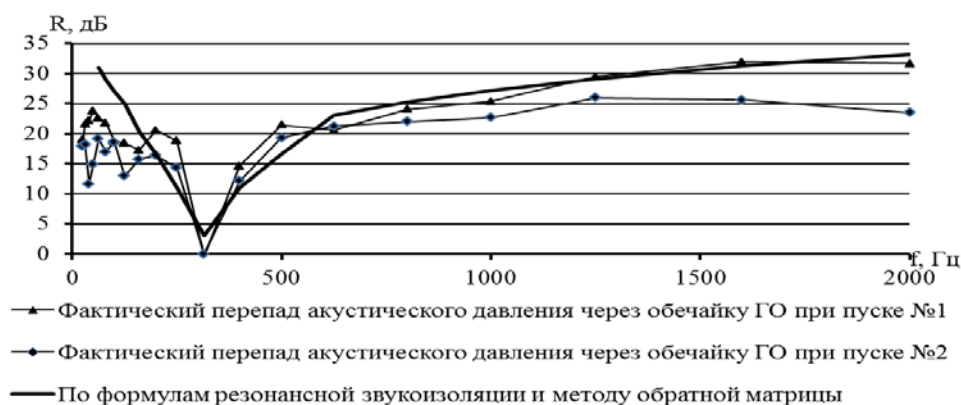


Рис. 5. Результаты расчёта и фактическая звукоизоляция, полученная при лётно-конструкторских испытаниях

Падение коэффициента звукоизоляции в полосе частот до 200 Гц по сравнению с расчётными данными является следствием возникновения стоячих колебаний среды между обечайкой ГО и космическим аппаратом (КА). Минимум, попадающий в 1/3-октавную полосу частот с центральной частотой 315 Гц, является следствием поперечного резонанса конструкции, который для такого ГО равен 338 Гц.

Посредством метода «обратной матрицы», описанного в данной статье, мож-

но оценить только нерезонансную передачу акустической энергии, так как в данном случае учитываются лишь инерционные свойства механического импеданса обечайки ГО.

Полученный алгоритм позволяет выявить особенности многослойной конструкции с точки зрения её звукоизоляции и подобрать необходимые характеристики слоёв, которые бы соответствовали спектральному составу нагрузки, действующей на объект исследования.

Библиографический список

1. Боголепов И. И. Промышленная звукоизоляция. Л.: Судостроение, 1986. 367 с.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
3. Калинина Л.Н. Кудисова Л.Я. Расчет на ЭВМ звукоизоляции двухстенных и трёхстенных конструкций // Труды ЦАГИ. 1978. Вып. 1902. С. 23-28.

Информация об авторах

Попов Павел Александрович, аспирант кафедры автоматических систем энергетических установок, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: banduir@rambler.ru. Область научных интересов: динамика машин.

Осипов Александр Сергеевич, специалист отдела грузов ОАО «РКЦ «Прогресс», г. Самара. E-mail:

oas89@inbox.ru. Область научных интересов: звукоизоляция и акустические нагрузки.

Синдюков Артём Арсентьевич, аспирант кафедры автоматических систем энергетических установок, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: sindyukovart@mail.ru. Область научных интересов: динамика машин.

CALCULATING SOUND INSULATION OF A SANDWICH STRUCTURE ON THE BASIS OF THE «INVERSE MATRIX» METHOD

© 2014 P. A. Popov¹, A. S. Osipov², A. A. Sindyukov¹

¹Samara State Aerospace University, Russian Federation

²Open Joint-Stock Company “Space Rocket Centre “Progress”, Samara, Russian Federation

Multilayered structures are widely used in housing construction, shipbuilding, aviation and space-rocket engineering. In designing such structures it is necessary to estimate their sound insulation capacity for the forecasting of levels of noise taking place in this or that premise or compartment. The paper presents a methodology of calculating sound insulation of a multilayered structure developed on the basis of solving wave equations in each of the layers taking into account the incident angle of sound waves and losses in layers; introduction of boundary conditions establishing equality on the borders of media of normal oscillatory speeds and acoustic pressure; drawing up a system of algebraic complex equations and a matrix equation corresponding to them; drawing up an inverse matrix of factors at functions of acoustic pressure. Examples of calculating factors of sound insulation for multilayered structures with various parameters are presented (superficial weights, thickness of layers, various incident angles). A graphic comparison of the results of calculations using the methods of “inverse matrix” and the impedance method as well as a graphic comparison of results of flight-design measurements (FDM) of the sound insulation of a regular head part, consisting of layers of coal tape, fiber glass fabrics, aluminum honeycombs and a layer of polyurethane foam are given. The results of calculation using the “inverse matrix” method are given and the advantage of the method is emphasized.

Acoustic pressure, sound insulation, factor of losses, inverse matrix, impedance, distribution factor, wave number, frequency.

References

1. Bogolepov I.I. Promyshlennaya zvukozolyatsiya [Industrial sound insulation]. Leningrad: Sudostroenie Publ., 1986. 367 p.
2. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov [Guidebook on mathematics for research workers and engineers]. Moscow: Nauka Publ., 1970. 720 p.
3. Kalinina L.N., Kudisova L.Y. Calculation of sound insulation of two-wall and three-wall structures using a computer // Trudy TsAGI. 1978. Issue 1902. P. 23-28. (In Russ.)

About the authors

Popov Pavel Aleksandrovich, post-graduate student of the Department of Automatic Systems of Power Plants, Samara State Aerospace University, Russian Federation. E-mail: banduir@rambler.ru. Area of Research: dynamics of machines.

Osipov Alexander Sergeevich, expert of the Load Department, Open Joint-Stock Company Space Rocket Center «Progress»,

Samara, Russian Federation. E-mail: oas89@inbox.ru. Area of Research: sound insulation and acoustic loads.

Sindyukov Artem Arsentevich, post-graduate student of the Department of Automatic Systems of Power Plants, Samara State Aerospace University. E-mail: sindyukovart@mail.ru. Area of Research: dynamics of machines.