

УДК 539.374

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЯХ

© 2014 Т. Д. Каримбаев¹, Ш. Мамаев²¹Центральный институт авиационного моторостроения, Москва²Московский физико-технический институт

Рассматривается продольный упругопластический удар по двухслойному составному стержню с закреплённым противоположным концом. Составной стержень сформирован из мягкого (алюминий) и жёсткого (сталь) слоёв при различном их расположении. На контактной границе стержней выполняется условие неразрывности вектора скорости частиц и напряжения. Для описания волновых процессов используется сеточно-характеристический метод, позволяющий корректно строить вычислительные алгоритмы на границах области интегрирования и контактных границах. Изучалось взаимодействие отражённых, преломлённых волн напряжений на границе раздела составных стержней. Явления на границе раздела составных стержней усложнялись их взаимодействием с динамикой изменения, как приложенной внешней нагрузки, так и отражёнными от граничных поверхностей волнами напряжений. В результате численных исследований показаны возможность разрушений на контактной границе для составного стержня алюминий-сталь, а также быстрое затухание нелинейных эффектов в случае сталь-алюминий. Располагая стержни с определёнными механическими характеристиками в определённых расчётах порядке, оказалось возможным управлять уровнем динамической нагруженности каждого отдельного элемента составного стержня, а следовательно, и работоспособностью всего составного стержня.

Составной стержень, контактная граница, волна разгрузки, отражённая волна, преломлённая волна, предел текучести.

В технике получают распространение составные конструкции, основной целью создания которых является использование материалов с необходимыми качествами в соответствующих областях составной конструкции. Например, в дисках авиационных двигателей наиболее напряжённой областью является ступица, в то время как полотно менее нагружено. Использование материала с повышенной прочностью в области ступицы и материала, отвечающего менее жёстким требованиям, в полотне позволяет создать составную конструкцию с привлекательными техническими характеристиками: конструкция может быть более лёгкой, иметь повышенные параметры долговечности и другие технические преимущества. Для изготовления составных конструкций применяют методы сварки трением или диффузионной сварки. В настоящей работе рассматриваются динамические характеристики таких составных конструкций и исследуются особенности волновых процессов, происходящих в них.

1. Основные уравнения плоской продольной волны для неоднородных составных стержней

Процесс распространения продольных волн в неоднородных стержнях, составленных из произвольного числа стержней, характеристики которых изменяются скачком при переходе от одного стержня к другому, описывается следующей системой уравнения в частных производных [1]

$$\begin{cases} \rho_n \frac{\partial v_n}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_n}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_n}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial t} - \frac{1}{E_n} \frac{\partial \sigma_n}{\partial t} = F_n(\sigma_n, \chi_n), \end{cases} \quad (1.1)$$

где n – номер соответствующего стержня; σ_n , ε_n – осевое напряжение и деформация; v_n – скорость смещения частиц; E_n – модуль упругости; ρ_n – плотность материала стержня; первое уравнение – уравнение движения, второе – уравнение неразрывности, третье – уравнение состояния для

соответствующих стержней. Правая часть третьего уравнения зависит от скорости пластической деформаций и при отсутствии вязкости преобразуется в известное соотношение пластического течения [2]

$$F_n(\sigma_n, \chi_n) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma \leq \sigma_n^s, \\ \left(\frac{1}{(E_k)_n} - \frac{1}{E_n} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} & \text{при } \sigma > \sigma_n^s, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $E_k = d\sigma/d\varepsilon$ – касательный модуль к кривой деформирования ($\sigma - \varepsilon$), χ_n – накопленная пластическая деформация.

Решение системы уравнений (1.1) удобно искать относительно безразмерных параметров и безразмерных переменных

$$\bar{\sigma}_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_k^s} = \frac{\sigma_n}{\rho_k c_k^2}, \quad \bar{\varepsilon}_n = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_k^s}, \quad \bar{v}_n = \frac{v_n}{c_k \varepsilon_k^s}, \quad (1.2)$$

$$\bar{\rho}_n = \frac{\rho_n}{\rho_k}, \quad \bar{t} = \frac{t c_k}{l}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l},$$

где l – характерная длина, $\sigma_n^s, \varepsilon_n^s$ – пределы упругости стержня по напряжению и деформации, k – номер стержня, где скорость распространения волн $c_n = (E_n/\rho_n)^{1/2}$ максимальная ($c_k = \max c_n$).

В матричной форме данная система уравнений (1.1) относительно безразмерных параметров и переменных представляется в виде

$$\bar{U}_{n,t} + A_n \bar{U}_{n,x} + \bar{B}_n = 0, \quad (1.3)$$

где

$$\bar{U}_n = \{v_n, \varepsilon_n, \sigma_n\}^T, \quad \bar{B}_n = \{0, 0, E_n F_n\}^T,$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_n} \\ -1 & 0 & 0 \\ -E_n & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Запятая перед индексом означает частное дифференцирование по соответствующей переменной, T – знак транспонирования.

Система уравнений (1.4) является гиперболической [3] и имеет три семейства действительных характеристик

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{E_n}{\rho_n}}, \quad \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{E_n}{\rho_n}}, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad (1.5)$$

вдоль которых выполняются следующие дифференциальные соотношения

$$\begin{aligned} d\sigma_n - \sqrt{\rho_n E_n} dV_n &= -E_n F_n dt, \\ d\sigma_n + \sqrt{\rho_n E_n} dV_n &= -E_n F_n dt, \\ d\varepsilon_n - \frac{1}{E_n} d\sigma_n &= F_n dt. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Интегрирование уравнений вдоль характеристик реализуется конечно-разностным представлением основных соотношений (1.6).

2. Конечно-разностное представление разрешающих уравнений

Интегрируя соотношения (1.6) вдоль характеристик, можно получить систему уравнений для определения неизвестных величин $\sigma_n^{j+1}, v_n^{j+1}, \varepsilon_n^{j+1}$:

$$\begin{cases} \sigma_{ni}^{j+1} - \sigma_{ni+}^j - \sqrt{\rho_n E_n} \cdot (v_{ni}^{j+1} - v_{ni+}^j) = -E_n (F_{ni}^{j+1} + F_{ni+}^j) \tau / 2, \\ \sigma_{ni}^{j+1} - \sigma_{ni-}^j + \sqrt{\rho_n E_n} \cdot (v_{ni}^{j+1} - v_{ni-}^j) = -E_n (F_{ni}^{j+1} + F_{ni-}^j) \tau / 2, \\ \varepsilon_{ni}^{j+1} - \varepsilon_{ni}^j - \frac{1}{E_n} \cdot (\sigma_{ni}^{j+1} - \sigma_{ni}^j) = \frac{\tau}{2} (F_{ni}^{j+1} + F_{ni}^j), \end{cases} \quad (2.1)$$

n – номер стержня, i – номер узла по пространственной переменной, $j, j+1$ – номер нижнего и верхнего слоя по времени, значки “+” и “-” – точки пересечения характеристики нижним слоем по времени (неузловые точки шаблона), опущенной из точки $A(i, j+1)$ верхнего слоя по времени. Детали получения уравнения (2.1) приведены в [4].

Для вычисления величин $\sigma_{ni\pm}^j, v_{ni\pm}^j, F_{ni\pm}^j$ в неузловых точках шаблона проводится интерполирование значений функции через их значения в узловых точках сетки [5]. При этом для того, чтобы ошибка, вводимая на одном шаге по времени, имела третий и более высокие порядки точности относительно σ, v и не ниже второго порядка точности относительно F , что позволяет обеспечить расчёт со вторым порядком точности относительно искомых величин, следует использовать следующие соотношения квадратичного интерполирования для вычисления $\sigma_{ni\pm}^j, v_{ni\pm}^j$ и линейного интерполирования для вычисления $F_{ni\pm}^j$.

При линейном интерполировании используется формула

$$R_{n\pm} = R_{in} - \frac{\sqrt{E_n/\rho_n}\tau}{h} \cdot (R_{in} - R_{(i\mp 1)n}) + O(\tau^2). \quad (2.2)$$

Квадратичное интерполирование для внутренних точек

$$R_{n\pm} = \frac{\sqrt{E_n/\rho_n}\tau \cdot (\sqrt{E_n/\rho_n}\tau \pm h)}{2h^2} \cdot R_{(i-1)n} - \frac{(E_n/\rho_n)\tau^2 - h^2}{h^2} \cdot R_{in} + \frac{\sqrt{E_n/\rho_n}\tau (\sqrt{E_n/\rho_n}\tau \mp h)}{2h^2} R_{(i+1)n} + O(\tau^3) \quad (2.3)$$

и для граничных точек и точек контактных границ стержней

$$R_{n\pm} = \frac{(\sqrt{E_n/\rho_n}\tau - h) \cdot (\sqrt{E_n/\rho_n}\tau - 2h)}{2h^2} R_{in} - \frac{\sqrt{E_n/\rho_n}\tau \cdot (\sqrt{E_n/\rho_n}\tau - 2h)}{h^2} R_{(i\mp 1)n} + \frac{\sqrt{E_n/\rho_n}\tau \cdot (\sqrt{E_n/\rho_n}\tau - h)}{2h^2} \cdot R_{(i\mp 2)n} + O(\tau^3). \quad (2.4)$$

Шаги по времени τ и пространственной переменной h выбираются в соответствии с требованием условия устойчивости [4]: $c\tau/h \leq 1$.

3. Расчетная схема решения уравнений

При реализации расчётной схемы конечно-разностным методом разрешающие уравнения отличаются во внутренних и граничных точках и в точках контактных границ стержней.

3.1. Решения во внутренних точках. Во внутренних точках неизвестные величины $\sigma_i^{j+i}, \varepsilon_i^{j+i}, v_i^{j+i}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений (2.1)

$$\begin{cases} v_{ni}^{j+1} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{ni-}^j - \sigma_{ni+}^j - 0.5\tau \cdot E_n (F_{ni-}^j - F_{ni+}^j)) / \sqrt{\rho_n E_n} + v_{ni-} + v_{ni+} \right] \\ \sigma_{ni}^{j+1} = \sigma_{ni+}^j + \sqrt{\rho_n E_n} (v_{ni}^{j+1} - v_{ni+}^j) - 0.5\tau \cdot E_n (F_{ni}^{j+1} + F_{ni+}^j), \\ \varepsilon_{ni}^{j+1} = \sigma_{ni}^{j+1} + (\varepsilon - \sigma)_{ni}^j + \frac{\tau}{2} (F_{ni}^{j+1} + F_{in}^j). \end{cases} \quad (3.1)$$

3.2. Решения в граничных точках.

Обычно на границе задаются напряжение σ или скорость частицы v . Граничные условия в общем случае можно записать в виде

$$x = 0, \quad (3.2)$$

$$A_1 \cdot \sigma(0, t) + B_1 \cdot v(0, t) = Q_1(t),$$

$$x = L, \quad (3.3)$$

$$A_2 \cdot \sigma(L, t) + B_2 \cdot v(L, t) = Q_2(t),$$

в которых A_1, B_1, A_2, B_2 – некоторые постоянные. В зависимости от конкретных значений A_i, B_i можно сформулировать граничные условия различного типа.

В граничных точках одна из характеристик выходит за предел рассматрива-

емой области. В связи с этим в системе уравнений (2.1) нельзя использовать одно из уравнений, которое соответствует характеристике, выходящей из области исследования. Если присоединить к оставшимся при этом двум уравнениям одно из граничных условий (3.2) или (3.3), то получается замкнутая система уравнений относительно искомых величин σ, ε, v в граничной точке.

3.3. Решение в точках контактной границы стержней. Точка контактной границы стержней одновременно принадлежит обоим стержням (n -му и $(n+1)$ -му). По отношению к n -му стержню эта граница будет считаться как правая, а по отношению к $(n+1)$ -му стержню – как левая, поэтому получается следующая система двух уравнений

$$\sigma_{ni}^{j+1} - \sigma_{ni+}^j - \sqrt{\rho_n E_n} \cdot (v_{ni}^{j+1} - v_{ni+}^j) = -E_n (F_{ni}^{j+1} + F_{ni+}^j) \tau / 2, \quad (3.4)$$

$$\sigma_{(n+1)i}^{j+1} - \sigma_{(n+1)i-}^j + \sqrt{\rho_{n+1} E_{n+1}} \cdot (v_{(n+1)i}^{j+1} - v_{(n+1)i-}^j) = -E_{n+1} (F_{(n+1)i}^{j+1} + F_{(n+1)i-}^j) \tau / 2.$$

На контактной границе стержней принимается условие неразрывности вектора скорости частиц и напряжения

$$\sigma_{ni}^{j+1} = \sigma_{(n+1)i}^{j+1}, \quad v_{ni}^{j+1} = v_{(n+1)i}^{j+1}. \quad (3.5)$$

Таким образом, на контактной границе стержней имеются четыре уравнения (3.4), (3.5) с четырьмя неизвестными

$$\sigma_{ni}^{j+1}, \quad v_{ni}^{j+1}, \quad \sigma_{(n+1)i}^{j+1}, \quad v_{(n+1)i}^{j+1}.$$

4. Постановка задачи

Исследуется распространение плоских продольных упругопластических волн

в биметаллическом стержне конечной длины l . Составными частями биметаллического стержня являются алюминий и сталь при различных способах их расположения (алюминий–сталь, сталь–алюминий). Нелинейное поведение материалов стержня задано экспериментальными кривыми деформирования, заданными в табличной форме и приведёнными в табл. 1 и 2. Модули упругости и плотности материалов исследуемых стержней составляют:

$$E^{cm} = 200 \text{ ГПа},$$

$$E^{al} = 68,5 \text{ ГПа}$$

$$\rho^{cm} = 7,9511 \cdot 10^{-10} \text{ кг} \cdot \text{сек}^2 / \text{мм}^4.$$

$$\rho^{al} = 2,755 \cdot 10^{-10} \text{ кг} \cdot \text{сек}^2 / \text{мм}^4.$$

Таблица 1. Экспериментальная зависимость напряжение – деформация (сталь)

$\varepsilon_i \cdot 10^4$	$\frac{\sigma_i}{9.8} \text{ МПа}$	$\sigma_i = \frac{\sigma_i}{\rho c_1^2} \cdot 10^4$	$\varepsilon_i \cdot 10^4$	$\frac{\sigma_i}{9.8} \text{ МПа}$	$\sigma_i = \frac{\sigma_i}{\rho c_1^2} \cdot 10^4$
0	0	0	22	28,0	1,4
10	20,00	1,0	32	30,0	1,5
11	20,75	1,0375	46	32,0	1,6
12	21,50	1,075	72	34,0	1,7
14	23,00	1,15	133	36,0	1,8
16	24,50	1,225	3600	74,0	3,7
18	26,00	1,3		0	

Таблица 2. Экспериментальная зависимость напряжение – деформация (алюминиевый сплав Д-16 АТ)

$\varepsilon_i \cdot 10^4$	$\frac{\sigma_i}{9.8} \text{ МПа}$	$\sigma_i = \frac{\sigma_i}{\rho c_1^2} \cdot 10^4$	$\varepsilon_i \cdot 10^4$	$\frac{\sigma_i}{9.8} \text{ МПа}$	$\sigma_i = \frac{\sigma_i}{\rho c_1^2} \cdot 10^4$
0	0	0	14	31,75	1,5875
2,77	19,00	0,95	20	33,5	1,675
3,6	24,00	1,2	27,5	35,00	1,75
4,1	26,00	1,3	47,5	37,50	1,875
5,0	27,50	1,375	71,87	40,0	2,0
6,5	29,00	1,45	140	44,0	2,2
8,75	30,00	1,50			

На конце стержня $x=0$ действует нестационарная нагрузка

$$\sigma_1(0,t) = f(t) \quad \text{при } x = 0. \quad (4.1)$$

Другой конец стержня $x = l$ жёстко закреплён, т.е.

$$v_2(l,t) = 0 \quad \text{при } x = l. \quad (4.2)$$

На контактной границе стержней принято условие неразрывности вектора скорости частиц и напряжения

$$\sigma_1(l_1,t) = \sigma_2(l_1,t), \quad v_1(l_1,t) = v_2(l_1,t). \quad (4.3)$$

Здесь $l = l_1 + l_2$ – общая длина стержня, l_1, l_2 – длины соответствующих стержней.

Стержень в начальный момент времени находится в состоянии покоя

$$\sigma_n(x,0) = v_n(x,0) = \varepsilon_n(x,0) = 0 \quad (n=1,2) \quad \text{при } t=0 \text{ и } 0 \leq x \leq l \quad (4.4)$$

При $t > 0$ от начального сечения $x=0$ начинает распространяться возмущение со скоростью упругих волн. Перед фронтом волны точки стержня находятся в состоянии покоя, т.е.

$$\sigma_n(x,t) = v_n(x,t) = \varepsilon_n(x,t) = 0 \quad (n=1,2) \quad \text{при } x \geq t \quad (4.5)$$

Внешняя динамическая нагрузка $f(t)$ в начале до момента времени t_0 линейно возрастает, а затем так же линейно убывает до нуля, т.е.

$$f(t) = \begin{cases} At & \text{при } t \leq t_0, \\ At_0 - B(t-t_0) & \text{при } t_0 < t \leq t_1, \\ 0 & \text{при } t > t_1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Здесь A, B – постоянные, характеризующие скорости возрастания и убывания внешней нагрузки, t_0 – время, соответствующее максимуму внешней нагрузки,

t_1 – общее время действия внешней нагрузки.

Задача сводится к интегрированию системы уравнений (1.3) при граничных условиях (4.1)-(4.3) и нулевых начальных условиях (4.4). Задача решалась при следующих данных:

$$h = \tau = 0,025; l = 100h; l_1 = l_2 = 50h; A = 3; \\ B = 2; t_0 = 20\tau = 0,5; t_1 = 50\tau = 1,25.$$

Здесь h, τ – шаг по координате и по времени, $\sigma_s^{cm} = \varepsilon_s^{cm} = 1, \sigma_s^{al} = 0,95, \varepsilon_s^{al} = 2,77$ – пределы упругости по напряжению и деформации. $f(t_0) = 1,5$ – максимальное значение внешней нагрузки.

5. Анализ численных результатов

На рис. 1, а представлено распределение напряжений по оси x для составного стержня алюминий-сталь в фиксированные моменты времени. Из приведённых кривых 1, 2 при $t=20\tau$ и $t=50\tau$ видно, что со временем $t > t_0 = 20\tau$ стержень начинает разгружаться и по нему распространяется волна разгрузки, максимальные значения напряжений падают. В момент времени $t=50\tau$ возмущение доходит до контактной границы (раздела) стержней. В этот момент времени обширная область ($18h \leq x \leq 37h$) первого стержня находится в зоне пластических деформаций. В дальнейшем с ростом времени область пластических деформаций приближается к контактной границе стержней. Известно [6], что при увеличении акустического импеданса $R = \rho_i c_i$ упругих слоёв волна напряжения увеличивается, скорость её распространения снижается (при уменьшении акустического импеданса ситуация будет обратной). Этим обстоятельством объясняется то, что при прохождении возмущений в стержень с большей жёсткостью:

– уровни напряжений повышаются и второй стержень в приведённые на рис.1, а моменты времени находится в пластически нагруженном состоянии;

– передний фронт упругой волны в расчётное время не достигает нулевого значения (кривые 3 и 4).

Так как уровни напряжений во втором стержне повышаются и выполняется условие равенства напряжений на контактной границе (4.3), то в менее жёстком и прочном первом стержне могут появиться граничные повреждения.

Из-за отставания заднего фронта пластической волны расширяется время действия нагрузки в области нелинейных деформаций. После отражения волны от жёстко закрепленного конца (кривая 6) напряжение в зафиксированный момент времени $t = 120\tau$ достигает максимального значения и волна напряжения движется в обратном направлении. Отражённая от закреплённой поверхности волна в моменты времени $t < 150\tau$ (кривые 3, 4, 5, 6 и 7) ещё не достигает контактной границы. Те же кривые 3, 4, 5, 6 и 7 в первом стержне характеризуют распределения напряжений в соответствующие моменты времени отражённой от контактной границы волны напряжений.

В моменты времени $t = 160\tau, t = 200\tau$ характер распределения напряжений определяется:

– во втором стержне наложением волн, отражённых от закреплённой поверхности и отражённых и преломлённых от контактной границы;

– в первом стержне наблюдается наложение отражённых от свободной поверхности волны, отражённой от контактной границы и преломлённой из второго стержня (отражённая от закреплённого конца) волны напряжений.

На рис. 1, б представлен график распределения напряжений для составного стержня при обратном расположении стержней по жёсткости (сталь, алюминий). Здесь картина существенно изменилась. Все события, как правило, происходят в первом (жёстком) стержне. Пик начального пластического деформирования в первом

стержне постепенно снижается, стержень начинает разгружаться (кривые 1 и 2). На переднем участке этих кривых имеется область постоянных напряжений, которая с возрастанием времени растёт. Эта область соответствует отставанию пластической волны от упругой волны.

Волна разгрузки, последовательно разгружая заданный внешний импульс, превращает его в упругий сигнал в форме трапеции (кривые 3, 4). В соответствии с импедансом стержней уровни напряжений во втором стержне меньше, чем в первом.

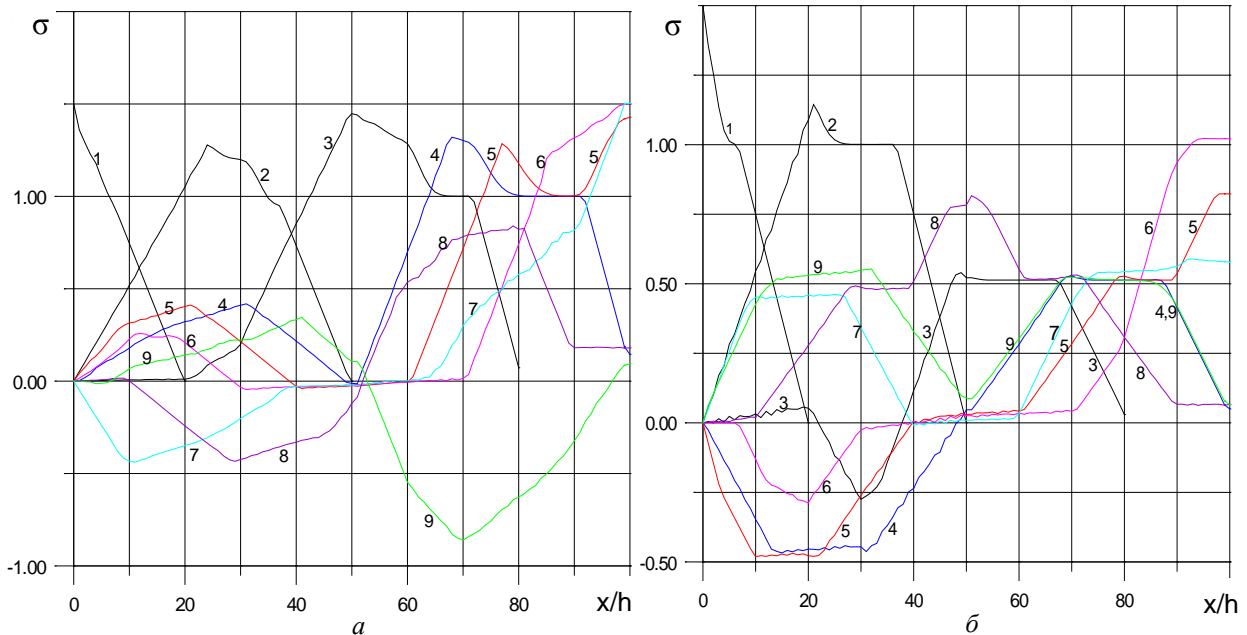


Рис. 1. Составной стержень алюминий-сталь (а) и сталь-алюминий (б).
 Распределение напряжений по оси x в фиксированные моменты времени t :
 1(20τ), 2(50τ), 3(80τ), 4(100τ), 5(110τ), 6(120τ), 7(140τ), 8(160τ), 9(200τ)

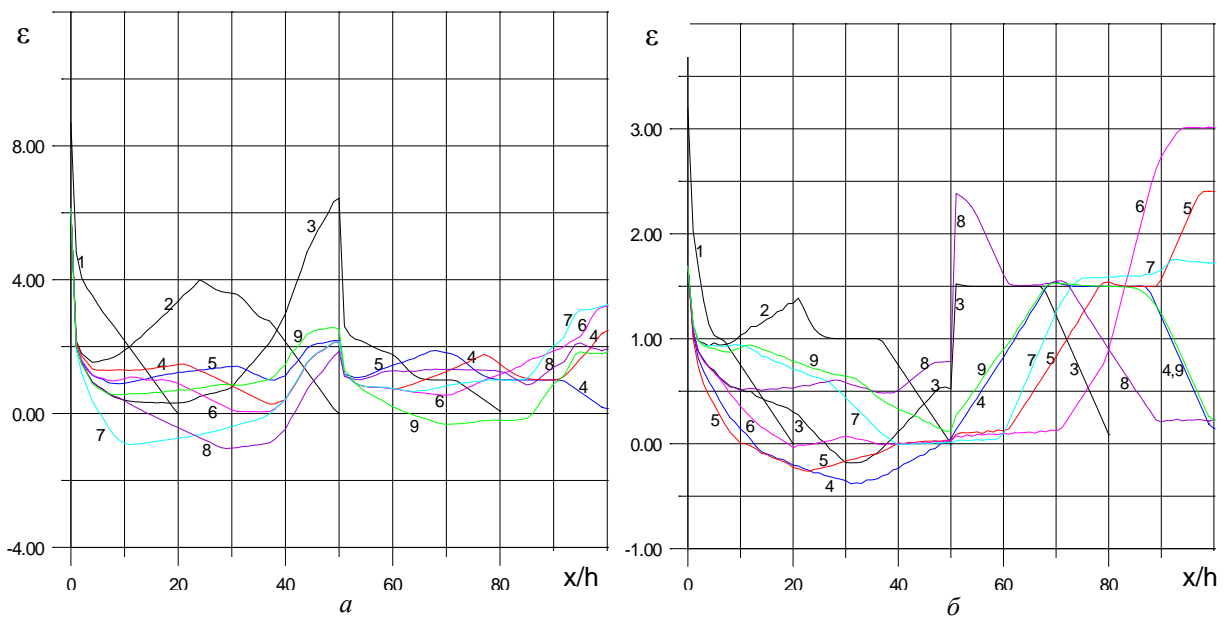


Рис. 2. Составной стержень алюминий-сталь (а) и сталь-алюминий (б).
 Распределение деформаций по оси x в фиксированные моменты времени t :
 1(20τ), 2(50τ), 3(80τ), 4(100τ), 5(110τ), 6(120τ), 7(140τ), 8(160τ), 9(200τ)

Кривая 3 демонстрирует, что передний фронт отражённой от контактной границы волны напряжений в первом стержне и передний фронт преломлённой волны напряжений во втором стержне находятся практически на равном удалении от контактной поверхности. В момент времени $t=120\tau$ (кривая 6) при отражении волны от закреплённого конца точки в его окрестности пластически деформированы. До момента времени $t=150\tau$ отражённые в первом стержне волны и преломлённые во втором не взаимодействуют друг с другом (кривые 3, 4, 5, 6, 7). При переходе преломлённой волны в моменты времени $t > 150\tau$ на её состояние оказывает влияние

отражённая волна, а на состояние первого стержня – преломлённая из второй области волна. Это обстоятельство можно видеть на кривых 8 и 9, соответствующих моментам времени $t=160\tau$ и $t=200\tau$.

Из рис. 2 видно, что в районе перехода от слоя к слою градиент деформации большой и деформации практически здесь терпят разрыв. При переходе от мягкого слоя к жёсткому на границе раздела стержней деформация резко падает (рис. 2, а), а при переходе из жёсткого слоя к мягкому слою деформация резко возрастает (рис. 2, б). Это обстоятельство в некоторой мере может быть обусловлено принятыми в расчётах пределами текучести материалов.

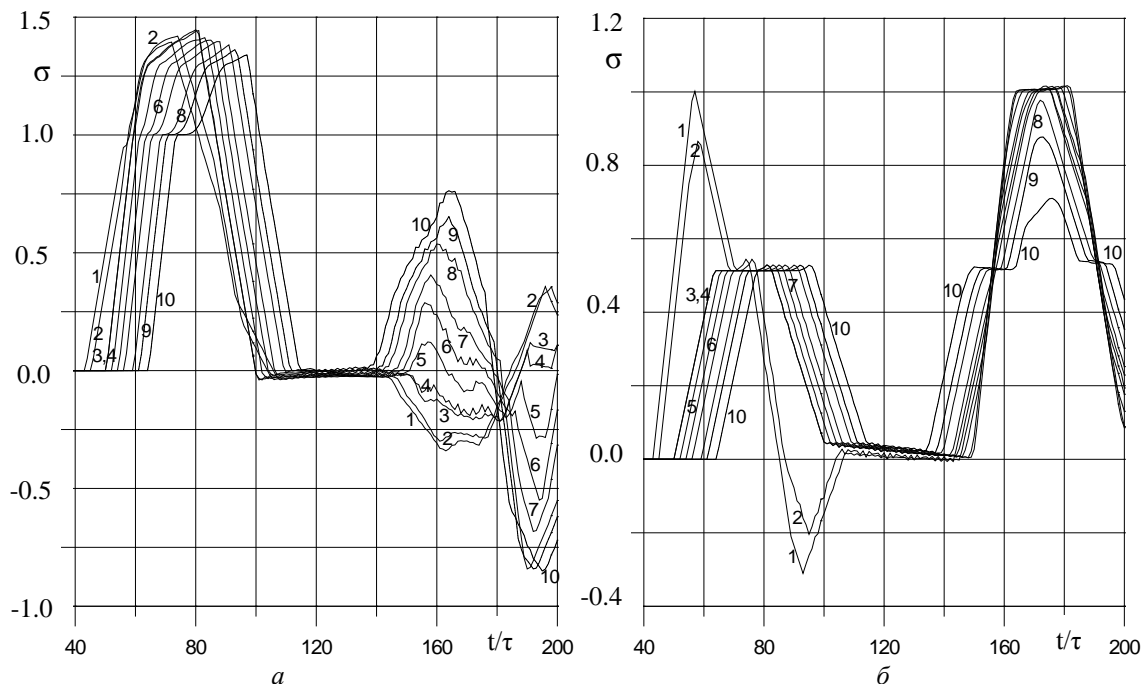


Рис. 3. Составной стержень алюминий-сталь (а) и сталь-алюминий (б).

Осциллограммы напряжений для сечений x :

43h (1), 45h (2), 50h (3), 51h (4), 53h (5), 55h (6), 57h (7), 60h (8), 62h (9), 65h (10)

На рис. 3, б приведены осциллограммы напряжений для точек, расположенных в окрестности контактной границы стержней $x=43, 45, 50, 51, 53, 55, 57, 60, 62, 65h$ составного стержня сталь-алюминий. Из осциллограммы видно, что в точках, лежащих в отрезке (50h, 65h), уровни напряжений в течение определённого времени держатся на постоянном

уровне. Это состояние области постоянных упругих напряжений во времени, образованной волной разгрузки (сравни с кривой 3, 4 рис. 1, б). В рассматриваемых точках с момента времени $t=100\tau$ по $t=140\tau$ напряжения практически равны нулю. Это означает, что упругая волна в рассматриваемой точке заканчивает своё действие и через некоторое время

накладывается отражённая от закреплённого конца волна напряжения, которая вырастает до максимального значения, равного 1. В случае, когда волна возвращается к свободному концу ($x=0$) $t > 150\tau$, напряжения в рассматриваемых точках для комбинации алюминий-сталь (рис. 3, а) могут принимать как отрицательные, так и положительные значения, в то время как для другого расположения стержней они принимают только положительные значения. Отмеченный результат легко объясняется анализом распространения волны на характеристической плоскости (x, t). Сначала рассмотрим точку $x=45h$ (2), расположенную в первом стержне, а поведение точек 1–4 аналогичное. В момент времени $t=45\tau$ внешнее возмущение вступает в точку $x=45h$ (2), заканчивает своё действие в момент времени $t=95\tau$, а в момент времени $t=55\tau$ в эту точку вступает отражённая волна от

контактной границы и происходит наложение волн, и этот процесс продолжится до момента времени $t=105\tau$, уровень напряжения понизится, становится отрицательным. В момент времени $t=145\tau$ в эту точку вступает отражённая от свободного конца (отражённая от контактной границы волна отражается от свободного конца) волна, а в момент времени $t=155\tau$ вступает отражённая волна от закреплённого конца. Начиная с момента времени $t > 155\tau$ происходит наложение волн, отражённых от свободного и закреплённого концов. Отражённая волна от свободного конца отрицательная, поэтому до момента времени $t=185\tau$ напряжение отрицательное, а затем становится положительным. Для точек $x > 51h$, расположенных ближе к закреплённому сечению, картина будет обратная (смотри кривые 5–10).

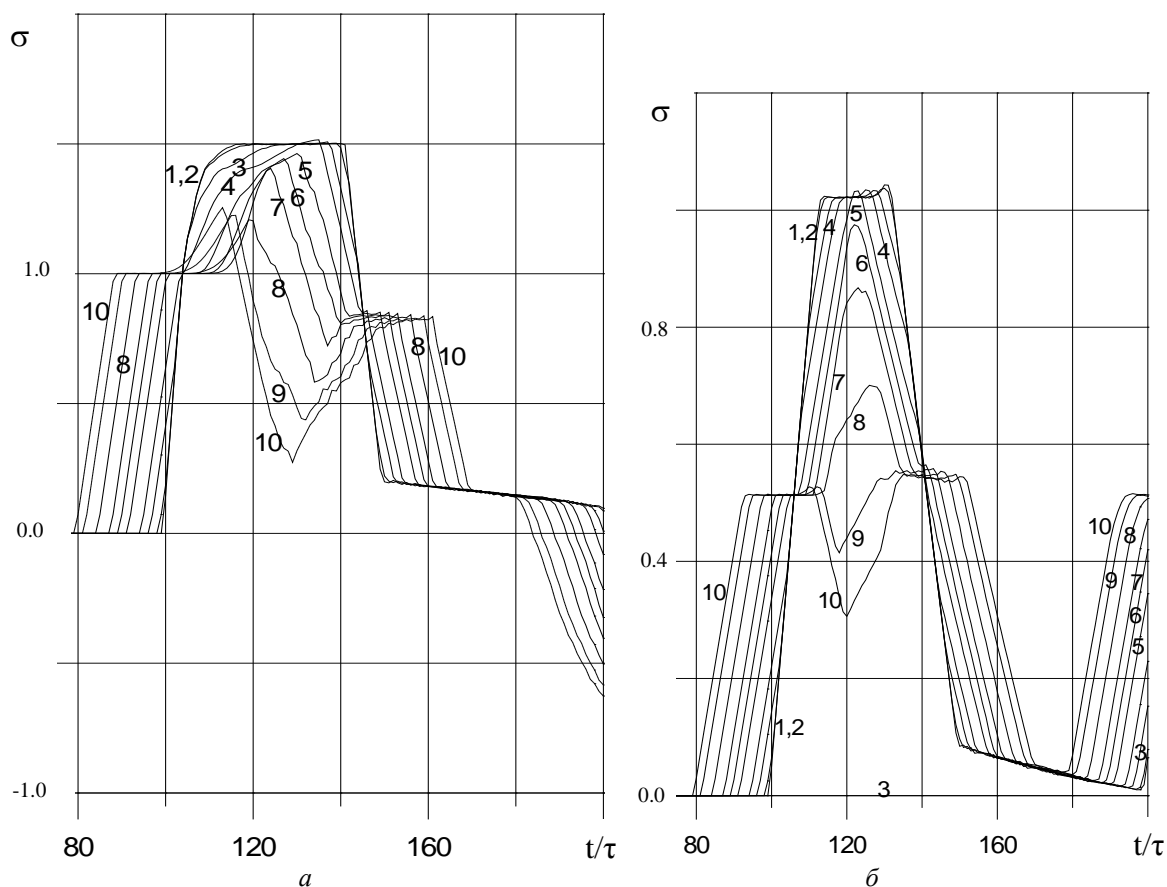


Рис. 4. Составной стержень алюминий-сталь (а) и сталь-алюминий (б).

Осциллограммы напряжений для сечений x :

100h (1), 99h (2), 97h (3), 95h (4), 92h (5), 90h (6), 88h (7), 85h (8), 82h (9), 80h (10)

На рис. 4 приведены осциллограммы напряжений для точек, расположенных в окрестности закреплённого конца $80h \leq x \leq 100h$ стержня.

Из рис 4, а для стержня (алюминий-сталь) видно, что максимальное значение напряжений превышает предел текучести стали в 1,5 раза, т.е. $\sigma_{ст}^{max} = 1,5 = 1,5\sigma_s^{ст}$. Все точки указанного интервала находятся в пластическом состоянии.

Для стержня (сталь-алюминий) (рис. 4, б) максимальное значение напряжений превышает предел текучести алюминия в 1,1 раза, т.е. $\sigma_{ал}^{max} = 1,043 = 1,1\sigma_s^{ал}$ и область пластических деформации, примыкающая к закреплённому концу, сужается, т.е. $90h < x \leq 100h$.

В первом случае (алюминий-сталь) максимальное значение напряжений в закреплённом конце в 1,44 раза превышает максимальное значение напряжений, реа-

лизованном при другом расположении стержней, т.е. $\sigma_{ст}^{max} = 1,44\sigma_{ал}^{max}$.

Выводы

Результаты расчётов находятся в полном соответствии с общими законами перехода от области к области согласно акустическому импедансу, в том числе в области нелинейных деформаций.

Расчётами показана возможность появления разрушений на границе контакта разнородных материалов в случае составной конструкции с материалом меньшей жёсткости на материал большей жёсткости.

Составная конструкция с комбинацией «жёсткий» материал – «мягкий» материал способствует относительно быстрому затуханию нелинейных эффектов в ней.

Библиографический список

1. Ержанов Ж.С., Каримбаев Т.Д., Байтелиев Т.Б. Волны напряжений в однородных и неоднородных средах. Алматы: Гылым, 1998. 171 с.
2. Каримбаев Т.Д., Мамаев Ш. Теория течения при переменных скоростях деформаций // Прикладные задачи механики деформируемого твёрдого тела. Алма-Ата, 1989. С. 52-58.
3. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 416 с.
4. Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждения и разрушение неупругих материалов и конструкций: учеб. пособие. М.: МФТИ, 2008. 215 с.
5. Турчак Л.И. Основы численных методов. М.: Наука, 1987. 320 с.
6. Лаптев В.И., Тришин Ю.А. Увеличение начальной скорости и давления при ударе по неоднородной преграде // Прикладная механика и техническая физика. 1974. № 6. С. 128-132.

Информация об авторах

Каримбаев Тельман Джамалдинович, доктор технических наук, профессор, заведующий отделом композиционных материалов, Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Москва. E-mail: karimbayev@ciam.ru. Область научных интересов: динамика сплошной среды.

Мамаев Шари, кандидат физико-математических наук, доцент, стажёр кафедры «Вычислительная математика», Московский физико-технический институт. E-mail: sch_mamaev@mail.ru. Область научных интересов: моделирование нестационарных процессов в деформируемых твёрдых телах.

PECULIARITIES OF DISTRIBUTION OF DYNAMIC DISTURBANCES IN COMPOSITE RODS

© 2014 T. D. Karimbayev¹, Sh. Mamayev²

¹Central Institute of Aviation Motors, Moscow, Russian Federation

²Moscow institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation

The paper deals with longitudinal elastic-plastic impact on a two-layer composite rod with a fixed opposite end. The composite rod consists of a soft layer (aluminum) and a hard layer (steel), with their position varying. The condition of the continuity of the particle velocity vector and the stress is met on the contact boundary of the rods. To describe the wave processes the grid-characteristic method is used which makes it possible to construct computational algorithms on the borders of the integration area and the interfaces correctly. The interaction of reflected and refracted stress waves at the interface of composite rods is analyzed. The phenomena on the interface of composite rods are made more complicated by their interaction with the dynamics of changing both the applied external load and the stress waves reflected from the boundary surfaces. As a result of numerical studies we have shown the possibility of damages on the interface for an aluminum-steel composite rod and rapid decay of non-linear effects in the case of steel-aluminum. Positioning rods with specific mechanical characteristics in the order specified by the calculations, we found a possibility to control the level of dynamic loading of each individual element of the composite rod, and hence the operability of the whole composite rod.

Composite rod, interface, unloading wave, reflected wave, refracted wave, yield strength.

References

1. Erzhanov Zh.S., Karimbaev T.D., Bajteliev T.B. Volny naprjazhenij v odnorodnyh i neodnorodnyh sredah [Stress waves in homogeneous and nonhomogeneous media.]. Alma-ty: Gylym Publ., 1998. 171 p.
2. Karimbaev T.D., Mamaev Sh. Teorija techenija pri peremennyh skorostjah deformacij. Prikladnye zadachi mehaniki deformiruemogo tverdogo tela. [Flow theory for variable deformation velocities]. Alma-Ata, 1989. P. 52-58.
3. Godunov S.K. Uravnenija Matematicheskoj fiziki [Equations of mathematical physics.]. Moscow: Nauka Publ., 1971. 416 p.
4. Kukudzhанov V.N. Komp'juternoe modelirovanie deformirovanija, povrezhdaemosti i razrushenie neuprugih materialov i konstrukcij [Computer simulation of deformation, damage resistance and destruction of non-elastic materials and structures]. Moscow: Moscow Inst. of Phys. and Tech. St. Univ. Publ., 2008. 215 p.
5. Turchak L.I. Osnovy chislennyh metodov [Foundations of numerical methods]. Moscow: Nauka Publ., 1987. 320 p.
6. Laptev V.I., Trischin Yu.A. Increase of initial velocity and pressure in case of impact on an inhomogeneous obstacle // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1974. No.6. P.128-132.

About the authors

Karimbayev Telman Dzhamaldinovich, Doctor of Science (Engineering), Professor, Head of the Department of Composite Materials, Central Institute of Aviation Motors (CIAM), Moscow, Russian Federation. E-mail: karimbayev@ciam.ru. Area of Research: continuum dynamics.

Mamayev Shari, Candidate of Science (Engineering), research assistant of the Department of Computational Mathematics, Moscow institute of Physics and Technology (State University), Moscow, Russian Federation. E-mail: sch_mamaev@mail.ru. Area of Research: modeling non-stationary processes in deformable solid bodies.