ББК 65.050

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОГОПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ С ПОМОЩЬЮ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТРУКТУР

© 2012 А. С. Пивоварова

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Моделируются логопериодические колебания, наблюдаемые в системах перед критическими явлениями. Рассматривается иерархическая модель, предложенная Джохансеном и Сорнеттом, описывающая механизм возникновения логопериодических колебаний, предшествующих финансовым крахам, и проводится её численный анализ. Предлагаются обобщения данной модели на основе введения зависимости степени влияния агентов друг на друга от ультраметрического расстояния между ними. С помощью построения распределений точек краха при различном числе агентов исследуются свойства критических точек в рассматриваемых моделях.

*Математическое моделирование, логопериодические колебания и степенной рост, ультраметрическое расстояние, иерархические структуры, финансовые крахи.*

## Введение

Явление наложения на основной динамический тренд логопериодических колебаний встречаются в некоторых системах, развивающихся в режиме с обострением [1-4]. Колебания в таких случаях неограниченно ускоряются при приближении к моменту обострения. С другой стороны, известно, что степенной закон поведения динамической системы, умноженный на сумму логопериодических гармоник, является следствием дискретной масштабной инвариантности системы. Кроме того, любая система, характеризуемая некоторым типом масштабной инвариантности, имеет критическую точку. Актуальность исследований в этом направлении основана на том, что описанное поведение систем характерно, в частности, для сейсмических и экономических [2] явлений, и могло бы дать понимание природы момента обострения, возникающего в этих случаях как сгущение точек постоянной фазы колебаний. В связи с этим возникает задача построения математических моделей систем, обладающих свойством дискретной масштабной инвариантности, в которых реализуются режимы с обострением.

Данная работа направлена на исследование таких моделей и их расширение. Одной из самых известных моделей такого типа является иерархическая модель, описанная в работе Джохансена и Сорнетта [1]. Авторы предложили подход к моделированию предкрахового поведения цен, основанный на предположении об иерархической организации агентов на рынке. В начальный момент времени каждый агент проводит свой независимый фундаментальный анализ, в результате которого выбирает своё время для покупки акций. Однако агент понимает, что его анализ может быть неполным или необъективным, и поэтому старается узнать больше о действиях других ближайших агентов. При этом агент не проводит никакого технического анализа, т.е. цена не несёт для него никакой информации. Другое важное упрощение состоит в том, что на рынке существует некоторый постоянный уровень предложения и все рассматриваемые агенты заинтересованы только в покупке акций. Тогда задача сводится к определению количества активных покупателей среди всех агентов-покупателей.

Рассматривается иерархическая структура агентов, которая во многом отражает реальную иерархическую организацию фондового рынка. Такая организация может быть как постоянным свойством рынка, так и спонтанно возникшим [5, 6]. Примером постоянной может быть организационная иерархия: на нижнем уровне иерархии находятся индивидуальные трейдеры, представляющие свои фирмы и банки, которые являются агентами следующего уровня, далее выше по иерархии располагаются города, где находятся эти фирмы и банки, и т.д. Важным следствием иерархической организации является то, что действия агента влияют только на ограниченное число соседних агентов, а именно находящихся на том же уровне иерархии и ниже. В результате каскадного эффекта решение агентов на нижнем уровне в свою очередь влияет на более высокие уровни.

### Иерархическая модель финансовых крахов Джохансена-Сорнетта

В модели индивидуальные трейдеры (агенты нулевого уровня) объединяются в группы по $m$ агентов (агенты первого уровня), далее такие группы также объединяются в группы по $m$ агентов, формируя агентов 2 уровня и т.д. В результате получается иерархическая организация, в которой агенты порядка $n$ состоят из $m^n$ индивидуальных трейдеров (рис. 1). Для простоты можно положить $m = 2$.

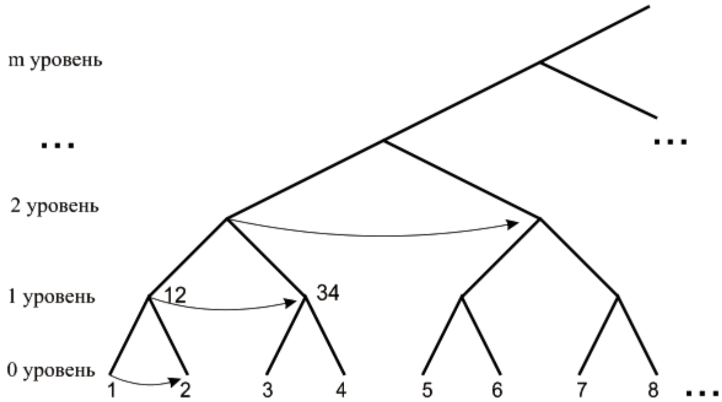


*Рис. 1. Иерархическая организация агентов на рынке.*
*Стрелками указано влияние сработавших агентов на соседнего агента того же уровня*

Предполагается, что каждый агент $i$ обладает предпочтительным временем $t_i$ для покупки акций, все такие времена $t_i$ имеют функцию распределения Пуассона $P_0(t) = 1 - \exp\{-l\,t\}$. Параметр $l$ характеризует ширину начального распределения времён покупки агентов.

Один из способов описания взаимодействия агентов состоит в учёте неуверенности агентов в своём собственном решении. При этом информация о том, что некоторый агент уже совершил покупку, является для ещё не вступивших в торговлю агентов поводом пересмотреть принятое ранее решение о времени покупки.

Влияние агента $i$ в момент времени $t_i$ на агента $j$ состоит в изменении времени совершения покупки:

$$t_{ij} = t_i + 2^{-b}\left(t_j - t_i\right),$$

где $b \geq 0$ - коэффициент влияния. Так как $2^{-b} \leq 1$, новое время действия удовлетворяет условию: $t_i \leq t_{ij} \leq t_j$. При этом функция распределения времени действия для агента $j$ принимает вид

$$\begin{aligned}\tilde{P}(t) &= P\left(\frac{t - \left(1 - 2^{-\beta}\right)t_i}{2^{-\beta}}\right) = \\ &= 1 - \exp\left\{-\lambda\left[t_i + 2^{\beta}\left(t - t_i\right)\right]\right\}\end{aligned}. \qquad (1)$$

Для простоты вычислений данное влияние полагается однородным в том смысле, что все агенты на всех уровнях имеют одинаковое $b$ .

Рассмотренный механизм, в сущности, является некоторым правилом подражания. Введение такой положительной обратной связи позволяет смоделировать сильно нелинейное (пороговое) поведение агентов. Ввиду ограниченного доступа к информации влиять друг на друга могут только агенты, находящиеся на одном уровне иерархии внутри одного кластера. При этом считается, что агент более высокого уровня иерархии совершил покупку, если совершили покупку все его дочерние элементы.

Для случая двоичного дерева можно записать выражение для вероятности того, что агент уровня $N$ совершит покупку в момент времени $t$. Пусть $p_N(t)dt$ - вероятность того, что агент уровня $N$ сработает на рынке в интервале времени $(t, t+dt)$. Это событие равносильно тому, что один из его дочерних агентов $N-1$ уровня сработает раньше второго в интервале времени $(t_1, t_1+dt_1)$, а второй затем сработает в интервале $(t, t+dt)$. Соответствующие вероятности этих двух событий - $p_{N-1}(t_1)dt_1$ и $\tilde{p}_{N-1}(t)dt$. Здесь обозначение $\tilde{p}_{N-1}(t)$ введено для плотности вероятности срабатывания второго агента при условии, что сработал первый. Тогда из уравнения (1) получим

$$\tilde{p}_{N-1}(t) = \frac{1}{2^{-b}} p_{N-1}\left(\frac{t-\left(1-2^{-b}\right)t_1}{2^{-b}}\right).$$

Учитывая все возможные значения времени $t_1 \in (0, t)$,окончательно получим

$$p_N(t) = \\ = \frac{2}{2^{-b}} \int_0^t p_{N-1}(t_1) p_{N-1}\left(\frac{t-\left(1-2^{-b}\right)t_1}{2^{-b}}\right) dt_1 , \qquad (2)$$

где множитель 2 появляется, так как любой из двух агентов уровня $N-1$ может совершить покупку первым.

В рамках предложенной модели можно дать определение краха. В пределе бесконечного числа агентов (т.е. бесконечного числа уровней иерархии), наличие краха в некоторый момент времени $t_c$ означает, что при $t < t_c$ число активных покупателей остаётся относительно небольшим. Со временем это число постепенно увеличивается, и к моменту времени $t_c$ происходит насыщение рынка. Математически критическая точка, определённая как срабатывание всех агентов на рынке, означает, что при увеличении $N$, $p_N(t)$ стремится к дельта-функции $p_N(t) \to p_\infty(t) \equiv d(t-t_c), \quad N \to \infty$.

Таким образом, рассматривая данное выше определение краха, можно получить плотность вероятности возникновения краха в данной иерархической структуре, применяя выражение (2) $N$ раз, начиная с $p_0(t)$.

В случае $b = 1$ можно получить точное выражение для критической точки. Подставляя начальное распределение $p_0(t) = l \exp\{-lt\}$ в рекуррентное соотношение (2), получаем следующее выражение для вероятности совершения покупки агентом уровня $N$:

$$p_N(t) = C_N t^{2^N-1} l^{2^N} \exp\{-2^N l t\}. \qquad (3)$$

На рис. 2 приведены графики полученных распределений для некоторых итераций.

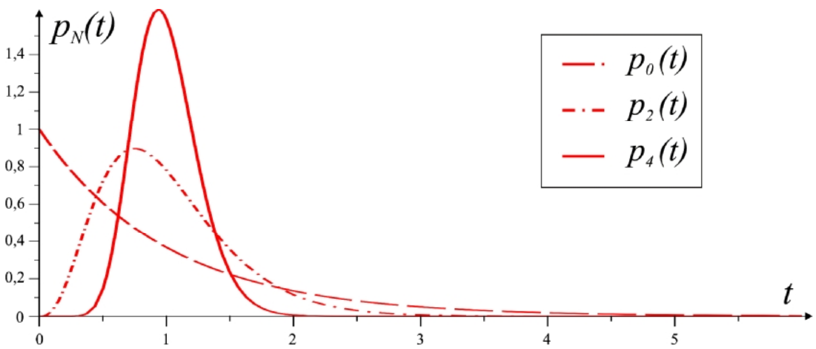


*Рис. 2. Функции плотности распределения времен покупки агентов, находящихся на* $N$ *уровне иерархии*

Очевидно, что распределение (3) стремится к $d$ - функции. Максимум этих распределений есть

$$t_c = \frac{2^N - 1}{2^N l} \xrightarrow[N \to \infty]{} \frac{1}{l}.$$

Полученное время краха в пределе бесконечного числа агентов является математическим ожиданием начального распределения времен действия, т.е. просто средним временем действия всех агентов.

При $b \neq 1$ аналитическую формулу для $t_c$ получить затруднительно. При численном исследовании данной модели получена зависимость количества агентов, выставивших заявки на покупку от времени, т.е. фактически спроса от времени (параметры системы: количество уровней дерева $N = 13$, $l = 0.01$, $b = 5$) (рис. 3). Видно, что при приближении к критической точке на разных временных масштабах наблюдаются логопериодические колебания, наложенные на степенную зависимость.

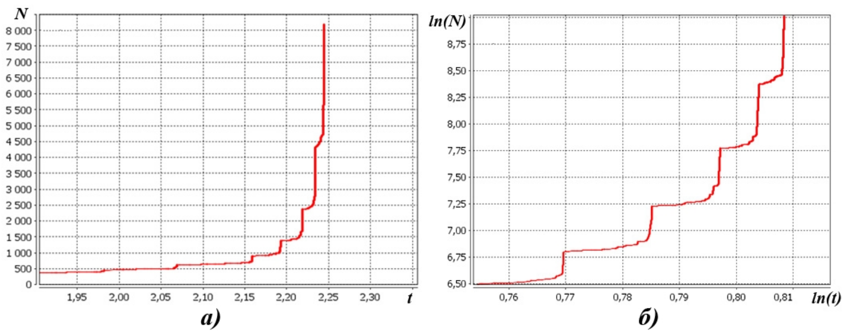


*Рис. 3. Количество агентов, выставивших заявку на покупку акций к моменту времени* $t$ *в обычном (а) и логарифмическом (б) масштабах*

Таким образом, можно сделать вывод о том, что логопериодические колебания и степенной рост цен перед обвалами являются следствием дискретной иерархической структуры фондовых рынков и наличия на них положительной обратной связи.

В пределе при $N \to \infty$ время краха $t_c$ в системе одно и то же при любой начальной реализации распределения времен действий агентов. При численном анализе системы количество агентов всегда ограничено, поэтому время краха $t_c$ будет различным для различных начальных реализаций. Однако при увеличении числа агентов разброс таких значений должен уменьшаться, т.е. плотность распределения времен краха $t_c^{\,j}$ должна стремиться к дельта-функции. Для подтверждения этого факта были построены функции плотности распределения времен крахов для систем с различным числом агентов (рис. 4). Для построения каждой функции рассматривалось 200 реализаций системы и полученный интервал значений $t_c^{\ j}$ разбивался на 20 промежутков.

Из рис. 4 видно, что распределение точек краха действительно сужается с увеличением числа агентов, однако данное сужение происходит довольно медленно.

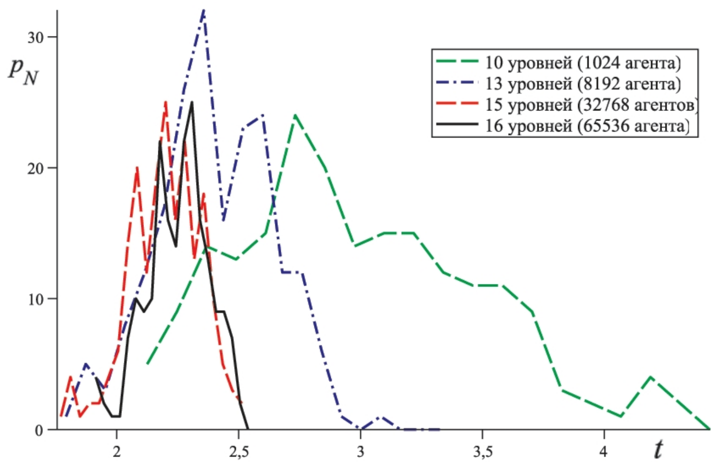


*Рис. 4. Ненормированные плотности распределения времен крахов* $t_c^{\ j}$ *для систем с различным числом агентов*

## Ультраметрическое обобщение модели Джохансена-Сорнетта

Одним из недостатков вышеприведённой модели является то, что агенты являются однородными по взаимодействию друг с другом. Такое упрощение не является вполне оправданным, поскольку введение иерархической структуры агентов в модели означает наличие ограниченности доступа одного агента к другому. Поэтому целесообразно рассмотреть зависимость степени влияния агентов друг на друга от некоторого расстояния между ними, введённого на данной иерархической структуре.

Расстояние между двумя агентами $i$ и $j$ предлагается определить в виде $d_{ij} = m^{n_{i,j}}$, где $m$ - арность дерева, $n_{ij}$ - количество уровней дерева до первого общего предка от элементов $i$ и $j$. Данная метрика является ультраметрикой, т.е. $d_{ik} \le \max(d_{ij}, d_{jk})$. В данной модели предполагается, что агенты влияют друг на друга не одинаково, как в предыдущей модели, а их влияние уменьшается с расстоянием. Пусть $t_i$ и $t_j$ исходные времена действия агентов $i$ и $j$, соответственно; причём $t_i < t_j$. Тогда в момент времени $t_i$ сработает агент $i$ и данная информация поступит к агенту $j$. Тогда его время действия уменьшится до $t_{ij}$, равного

$$t_{ij} = t_j - \frac{1}{(d_{ij})^b}(t_j - t_i).$$

В результате численных экспериментов обнаружено, что в некоторой области параметров модели, её решения представляют собой самоподобные нелинейные колебания, наложенные на возрастающий тренд (рис.5).

Плотность распределения точек краха также стремится к $d$ - функции. Сравнение распределений для исходной иерархической модели и её ультраметрического обобщения приведены на рис.6.

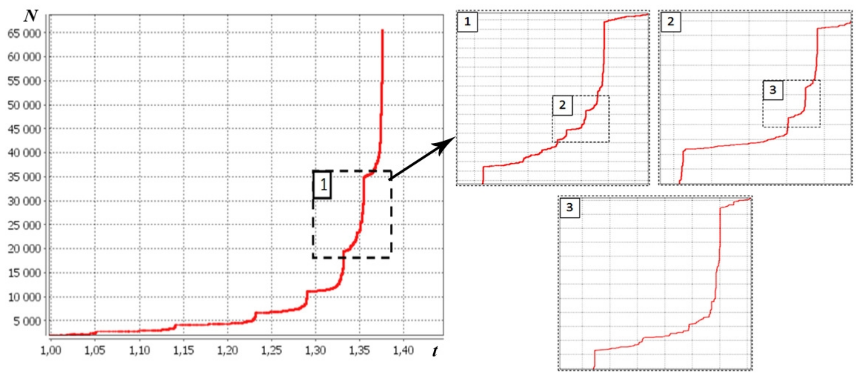


*Рис. 5. Самоподобность полученных колебаний на разных временных масштабах*

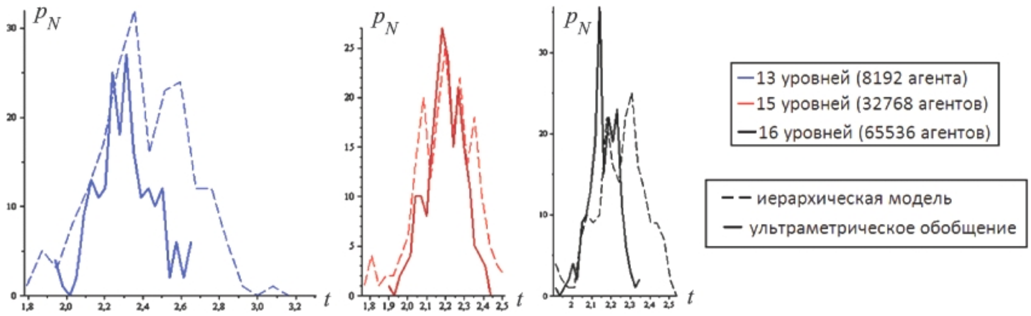


*Рис. 6. Сравнение ненормированных плотностей распределения времён крахов* $t_c^{\,j}$ *в двух моделях при различном числе агентов*

## Ультраметрическая модель финансовых крахов

Следует отметить, что случай влияния сработавшего кластера лишь на соседний кластер является довольно грубым приближением реальных процессов распространения информации на рынке, поскольку влияние агентов друг на друга сильно неоднородно и зависит от взаимного расположения агентов внутри иерархической структуры.

Предполагается, что в момент, когда агент с наименьшим временем выставляет свою заявку, информация о его действиях начинает влиять на всех агентов на рынке, однако данное влияние тем меньше, чем дальше в ультраметрическом смысле находятся трейдеры от данного сработавшего агента.

Тогда новые времена действия ещё не сработавших агентов при условии, что некоторый агент вступил в торговлю в момент времени $t_1$, определяются соотношением

$$t_i^* = t_i - \frac{1}{(d_{i1})^b}(t_i - t_1).$$

Принципиальным отличием данной модели от иерархических моделей, описанных ранее, является то, что влияние агентов начинает учитываться не только при срабатывании некоторого кластера, а оно присутствует всегда. Каждый сработавший агент сокращает время срабатывания всех оставшихся агентов.

Численное исследование данной модели показало, что в малой окрестности критической точки, т.е. времени срабатывания всех агентов, наблюдается сильное пороговое изменение количества вступивших в торговлю агентов с увеличивающейся амплитудой и частотой. Стоит отметить, однако, что визуальное наблюдение такого поведения затруднено из-за быстрого убывания периода полученных колебаний. На рис. 7 приведены распределения точек краха в данной модели. Данные распределения также сужаются с увеличением числа агентов, однако положение их максимумов смещается. Дальнейшие исследования предполагают решение вопроса о наличии некоторого отличного от нуля предельного значения, к которому сходятся данные распределения.

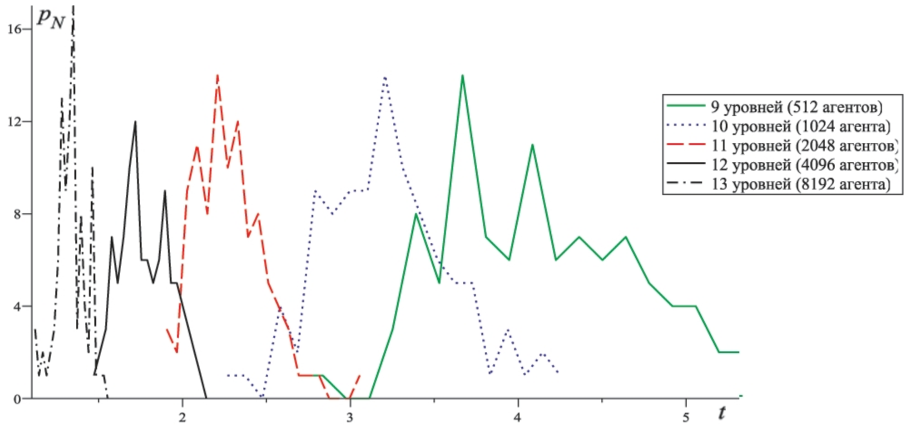


*Рис. 7. Ненормированные плотности распределения времен крахов* $t_c^{\,j}$ *для систем с различным числом агентов*

## Основные результаты и выводы

Иерархическая модель финансовых крахов Джохансена-Сорнетта и её модификации, приведённые в данной работе, могут рассматриваться как общий подход к моделированию любых иерархически организованных систем, элементы которых оказывают влияние друг на друга, образуя тем самым положительную или отрицательную обратную связь в системе. Численные исследования показывают, что распределения точек краха в моделях действительно сужаются при увеличении числа агентов в системе, т.е. в системе существует вполне определённая точка краха, положение которой в случае большого числа элементов не зависит от начальной реализации случайных времён покупки агентов. Такой результат говорит о потенциальной возможности предсказания моментов обострения в реальных системах.

Реальные иерархические системы всегда имеют конечное число элементов, и очень важно на практике найти наиболее быстрый и эффективный метод вычисления положения реальной критической точки в системе. Ультраметрическое обобщение модели Джохансена-Сорнетта показывает, что можно найти способ уменьшить ширину распределения критических точек при данном числе агентов, т.е. более точно определить наиболее вероятное время краха. Причём свойство универсальности критической точки при этом сохраняется.

Следует отметить, что новая ультраметрическая модель, представленная в работе, имеет принципиальное отличие от двух, описанных ранее, заключающееся в способе введения положительной обратной связи в системе. А именно, в отличие от предыдущих моделей изначально не вводится искусственное пороговое влияние в модель. Поэтому наличие динамики в виде скачков с увеличивающейся амплитудой и частотой доказывает, что логопериодические колебания, наблюдаемые в реальных системах, являются следствием их ультраметрической структуры, а не следствием специфического способа влияния элементов системы друг на друга.

В [7] показано, что рассмотрение агентов на финансовом рынке как независимых неприемлемо при построении имитационных моделей рынка. Именно влияние агентов друг на друга объясняет многие хорошо известные статистические свойства финансовых временных рядов, например, наличие «тяжёлых хвостов» в распределении доходностей акций. Описываемые модели представляют собой один из способов введения влияния рыночных агентов друг на друга и могут быть использованы при построении компьютерных симуляторов финансовых рынков.

**Библиографический список**

1. Sornette, D. A hierarchical model of financial crashes [Text] / D. Sornette, A. Johansen // Physica A - 1998 - Vol. 261. - P. 581 - 598.

2. Sornette, D. Stock market crashes, Precursors and Replicas [Text] / D. Sornette, A. Johansen, J.-Ph. Bouchaud // Journal de Physique, France. - 1996 - Vol. 6. - P. 167 - 175.

3. Бикулов, А. Х. Иерархическая динамическая модель финансового рынка вблизи точки обвала и p-адический математический анализ [Текст] / А. Х. Бикулов, А. П. Зубарев, Л. В. Кайдалова // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. - 2006 - № 42. - С. 135 - 140.

4. Подлазов, А. В. Режимы с обострением с комплексными показателями. Лог-периодические колебания в модели разрыва пучка волокон [Текст] / А. В. Подлазов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. - 2009 - № 35. - 22 с.

5. Huang, Y. Spontaneous generation of discrete scale invariance in growth models [Text] / Y. Huang, G. Ouillon, H. Saleur, D. Sornette // Phys. Rev. E - 1997 - Vol. 55. - P. 6433 - 6447.

6. Tostesen, E. Dynamics of hierarchically clustured cooperative agents [Text] / E. Tostesen - Cand. Scient. Thesis, University of Copenhagen, 1995.

**7.** Cont, R. Herd behavior and aggregate fluctuations in speculative markets [Text] / R. Cont, J.P. Bouchaud // Macroeconomic dynamics - 2000 - Vol. 4, No.2.

## LOG-PERIODIC OSCILLATIONS IN HIERARCHICAL MODELS

©2012 A. S. Pivovarova

Samara State Aerospace University
named after academician S. P. Korolyov (National Research University)

We explore the log-periodic behavior which is known to precede the critical events of some complex systems. Particularly, we consider the hierarchical model of financial crashes introduced by A. Johansen and D. Sornette which reproduces the log-periodic power law behavior of the price before the critical point. In order to build the generalization of this model we introduce the dependence of an influence exponent on an ultrametric distance between agents. Much attention is being paid to the problem of critical point universality which is investigated by comparison of probability density functions of the crash times corresponding to systems with various total numbers of agents.

*Mathematical modeling, log periodic power law, ultrametric distance, hierarchical structure, financial crashes.*

### Информация об авторе

**Пивоварова Анна Сергеевна**, аспирант кафедры физики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: a-pivovarova@mail.ru. Область научных интересов: математическое моделирование, эконофизика.

**Pivovarova Anna Sergeevna,** post-graduate student of the physics department, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University). E-mail: a-pivovarova@mail.ru. Area of research: mathematical modeling, econophysics.