

УДК 531.36+629.78

## ДИНАМИКА БУКСИРОВКИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ТРОСЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

© 2012 В. С. Асланов, В. В. Юдинцев

Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Рассматривается движение космического аппарата как твёрдого тела, соединённого вязкоупругим тросом с космическим буксиром в центральном гравитационном поле. На основе формализма Лагранжа получены уравнения пространственного движения космического аппарата и орбитального движения центра масс системы в оскулирующих элементах. Изучено влияние на движение космического аппарата параметров системы и начальных условий движения. Показана возможность существования критических режимов движения, приводящих к запутыванию троса.

*Космический буксир, упругий трос, твёрдое тело, центральное гравитационное поле, оскулирующие элементы.*

### 1. Введение

Статья посвящена изучению пространственного движения космического аппарата (КА) как твёрдого тела на тросовой связи с КА-буксиром. Динамике твёрдого тела в космическом пространстве посвящено большое число работ. Отметим, в частности, монографию Белецкого В.В. [1] об орбитальном движении космических аппаратов относительно центра масс, монографии Ярошевского В.А. [2] и Асланова В.С. [3] о движении твёрдого тела в атмосфере. Движение КА относительно центра масс на упругой связи в составе космической тросовой системы рассматривалось в работах Асланова В. С. [4,5,6], Асланова В. С. и Ледкова А. С. [7], Асланова В. С. и Стратилатова Н. Р. [8], Заболотнова Ю. М. и Наумова О. Н. [9]. В этих работах описана и проанализирована ситуация, когда одно из концевых тел тросовой системы совершает заданное орбитальное движение.

В представленной статье рассматривается движение тросовой системы, когда одно из тел системы – КА-буксир является активным, оказывающим влияние как на движение всей системы, так и на движение вокруг центра масс твёрдого тела – пассивного КА. Это необходимо при детальном исследовании динамики системы

в целом и отдельных её элементов. На основе формализма Лагранжа формируются уравнения пространственного движения твёрдого тела на вязкоупругом тросе вокруг центра масс тела и относительно центра масс всей системы, а оскулирующие элементы используются для изучения эволюции орбиты системы. Предложенный в работе выбор обобщённых координат позволяет упростить анализ относительного движения пассивного КА и троса.

### 2. Уравнения движения

Будем рассматривать активный КА в виде материальной точки, пассивный КА как осесимметричное твёрдое тело, а трос упруговязким и невесомым. Предполагаем, что центры масс тел в процессе движения остаются в плоскости орбиты. Для построения математической модели используются четыре правые системы координат:

1. Инерциальная система координат  $O'x_p y_p z_p$ , расположенная в точке перицентра с плоскостью  $O'x_p y_p$ , совпадающей с плоскостью орбиты, осью  $O'y_p$ , совпадающей с прямой, проведённой через центр притяжения и перицентр и осью

$O'x_p$ , направленной по вектору орбитальной скорости в перигентре.

2. Подвижная орбитальная система координат  $Ox_oy_oz_o$  с началом в центре масс системы, осью  $Oy_o$ , направленной от притягивающего центра и осью  $Ox_o$ , лежащей в плоскости орбиты и направленной в сторону направления орбитальной скорости.

3. Подвижная система координат  $Sx_cy_cz_c$  с началом координат в центре масс пассивного КА: ось  $Sx_c$  направлена по прямой, соединяющей центры масс пассивного и активного КА, ось  $Sy_c$  параллельна плоскости  $Ox_oy_o$ .

4. Четвёртая система координат  $Sxyz$  является главной центральной системой координат пассивного КА (рис. 1).

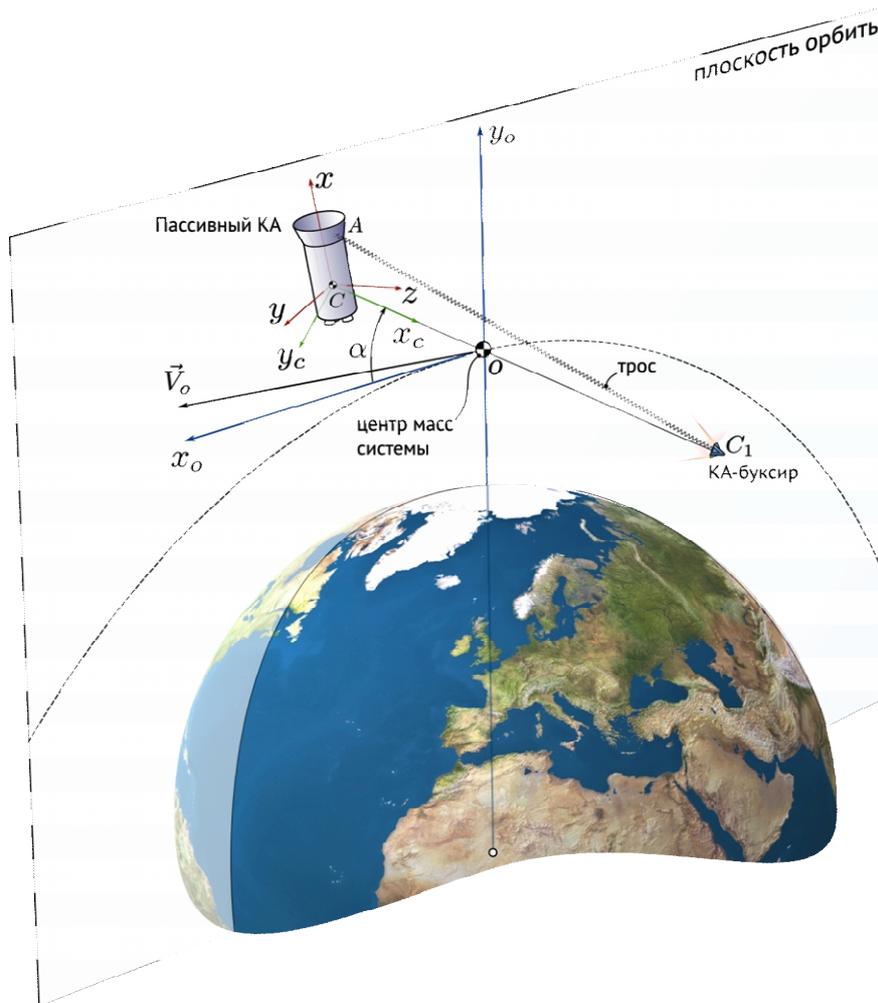


Рис. 1. Схема тросовой системы

Для построения уравнений движения системы вокруг центра масс будем использовать формализм Лагранжа, а для уравнений движения центра масс системы – оскулирующие элементы.

### 2.1. Уравнения движения вокруг центра масс

Для определения положения системы относительно общего центра масс и положения пассивного КА относительно-

го собственного центра масс выберем следующие **обобщённые координаты**:  $q_1 \equiv a$  – угол поворота системы координат  $Sx_cy_cz_c$  относительно  $Ox_oy_oz_o$  вокруг оси  $Oz_o$  (рис. 1);  $q_2 \equiv s$  – расстояние между центрами КА;  $q_3 \equiv \gamma$ ,  $q_4 \equiv \varphi$ ,  $q_5 \equiv \psi$  – углы, задающие положение базиса  $Sxyz$ , связанного с твёрдым телом, относительно базиса  $Sx_cy_cz_c$ . Уравнения движения

запишем в форме уравнений Лагранжа II-го рода [10]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (1)$$

**Кинетическая энергия** системы имеет вид:

$$T = T_v + T_w, \quad (2)$$

где  $T_v$ ,  $T_w$  – кинетические энергии поступательного и вращательного движений, соответственно.

Кинетическую энергию поступательного движения будем определять в виде:

$$T_v = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \quad (3)$$

где индекс 1 отвечает активному КА, индекс 2 – пассивному КА.

Абсолютная скорость центров масс КА определяется как сумма скорости центра масс системы и скорости движения центров масс КА относительно центра масс системы:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + d\mathbf{R}_i / dt, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

где  $d\mathbf{R}_i / dt$  – локальная производная радиус-вектора положения  $i$ -го КА относительно центра масс системы в орбитальном подвижном базисе.

Координатный столбец вектора скорости центра масс системы  $\mathbf{v}_0$  в проекциях

$$T_v = \frac{m_2 m_1 \left( 2e^2 m + 4em \cos J + 2m + p \left( s^2 (\mathbf{a} - \mathbf{J})^2 + \mathbf{a}^2 \right) \right)}{2(m_1 + m_2) p} + \frac{m m_1^2 (e^2 + 2e \cos(J) + 1) + m m_2^2 (e^2 + 2e \cos(J) + 1)}{2(m_1 + m_2) p}. \quad (8)$$

Для определения кинетической энергии вращательного движения  $T_w$  в выражении (2) найдём абсолютную угловую скорость твёрдого тела как сумму угловой скорости базиса  $S_{x_c y_c z_c}$  и угловой скорости тела относительно этого базиса:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_c + \boldsymbol{\omega}_{2c}. \quad (9)$$

на оси орбитальной подвижной системы координат определяется следующим образом:

$$\mathbf{v}_0 = \sqrt{\frac{m}{p}} \begin{bmatrix} 1 + e \cos J \\ e \sin J \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где  $\vartheta$  – угол истинной аномалии,  $p$  – фокальный параметр,  $e$  – эксцентриситет орбиты,  $m$  – гравитационный параметр. Радиус-векторы пассивного и активного КА относительно центра масс системы в проекциях на оси  $Ox_0 y_0 z_0$  имеют вид:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} s_1 \cos a \\ s_1 \sin a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} -s_1 \cos a \\ s_1 \sin a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$s_1 = s \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad s_2 = s \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad (7)$$

где  $s_1$ ,  $s_2$  – расстояния от центра масс системы до центров масс КА 1 и 2, соответственно;  $s$  – расстояние между центрами масс КА. Дифференцируя (6) с учётом формул (3), (4) и (7), получим кинетическую энергию поступательного движения:

Угловая скорость базиса  $S_{x_c y_c z_c}$  определяется изменением угла  $\alpha$  и угла истинной аномалии  $J$ :

$$\boldsymbol{\omega}_c = \mathbf{k}_0 (\dot{\alpha} - \dot{J}), \quad (10)$$

где  $\mathbf{k}_0$  – орт оси  $Cz_0$  базиса  $Ox_0 y_0 z_0$ . Угловая скорость твёрдого тела относительно собственного базиса  $S_{x_c y_c z_c}$  записывается следующим образом [11]:

$$\omega_{2c} = \begin{bmatrix} j\& + y\& \cos q \\ q\& \cos j + y\& \sin q \sin j \\ -q\& \sin j + y\& \sin q \cos j \end{bmatrix} \quad (11)$$

Кинетическая энергия вращательно-го движения твёрдого тела относительно центра масс определяется как

$$T_w = \frac{1}{2} \left[ A_2 \left( -(\& + \mathcal{J}) \sin q \cos y + y\& \cos q + \mathcal{I}^2 \right) + B_2 \left( (\& + \mathcal{J}) (\cos q \sin f \cos y + \cos f \sin y) + y\& \sin q \sin f + q\& \cos f \right)^2 + B_2 \left( (\& + \mathcal{J}) (\cos q \cos f \cos y - \sin f \sin y) + y\& \sin q \cos f - q\& \sin f \right)^2 \right]$$

**Обобщённые силы** включают в себя силу тяги реактивного двигателя, приложенную к активному КА, силу натяжения троса и центральную гравитационную силу. Силу натяжения троса определим как

$$F_t = H_v \left[ c_t (l - l_0) + k_t l^{\mathcal{K}} \right],$$

где  $l$  – длина троса,  $l_0$  – свободная длина троса,  $c_t$  – жёсткость троса,  $k_t$  – коэффициент демпфирования троса; функция Хевисайда:

Длина троса в общем случае равна

$$l = |\mathbf{R}_{12}| = \sqrt{s^2 - 2s[r_x \cos q + \sin q(r_y \sin j + r_z \cos j)] + r^2}.$$

Будем считать, что длина троса  $l$  существенно больше модуля вектора  $\mathbf{r}$ :

$$l \approx s - r_x \cos q - \sin q(r_y \sin j + r_z \cos j),$$

скорость деформации троса равна

$$\dot{l} = \dot{s} + \dot{q} \cdot [r_x \sin q - (r_y \sin j + r_z \cos j) \cos q] + j\& \sin q (r_z \sin j - r_y \cos j).$$

Вектор силы натяжения троса, действующий на тела 1 и 2, определим следующим образом:

$$\mathbf{F}_{t2} = -\mathbf{F}_{t1} = \mathbf{i}_c P,$$

где  $\mathbf{i}_c$  – орт оси  $Sx_c$ . Радиус-вектор точки приложения силы натяжения троса на пассивном КА равен:

$$\mathbf{r}_{t2} = \mathbf{r}_2 + \rho.$$

$$2T_w = \omega_{2c} \cdot \mathbf{J} \cdot \omega_{2c}. \quad (12)$$

Для осесимметричного твёрдого тела с двухосным эллипсоидом инерции  $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, B)$  с учётом (8)–(10) и (11) выражение  $T_w$  примет вид:

$$H_v = \begin{cases} 0, & l \leq l_0, \\ 1, & l > l_0. \end{cases}$$

Радиус-вектор  $\mathbf{R}_{12}$ , соединяющий точку крепления троса на твёрдом теле с активным КА, определяется следующим образом:

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_2 + \rho - \mathbf{R}_1,$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки крепления троса на твёрдом теле относительно его центра масс.

Точка приложения силы натяжения троса на первом теле определяется радиус-вектором  $\mathbf{r}_{t1} = \mathbf{r}_1$ .

Обобщённые силы записываются с помощью выражения [10]:

$$Q_i = \mathbf{F}_{t1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{t1}}{\partial q_i} + \mathbf{F}_{t2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{t2}}{\partial q_i} + \mathbf{F}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i} + \mathbf{F}_{g1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i} + \mathbf{F}_{g2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_i}, \quad i = 1 \dots 7,$$

где  $\mathbf{F}_1$  – активная сила;  $\mathbf{F}_{g1}$ ,  $\mathbf{F}_{g2}$  – силы притяжения, действующие на тела 1 и 2:

$$\mathbf{F}_{gi} = -\frac{mm_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2.$$

Найденное значение кинетической энергии системы и обобщённые силы по-

звоняют сформировать уравнения движения рассматриваемой системы.

2.2. Уравнения движения центра масс системы

Для записи уравнений движения центра масс системы воспользуемся оскулирующими элементами [12]. Для возмущающей орбиту силы  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{i}_0 P$ , действующей вдоль оси  $Ox_0$  орбитальной подвижной системы координат, уравнения движения примут вид:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{m}} a_x \left( 1 + \frac{r_0}{p} \right) \sin J,$$

$$\Omega = \Omega_0 = const, \quad i = i_0 = const,$$

$$\frac{dp}{dt} = 2a_x r_0 \sqrt{p/m},$$

$$\frac{de}{dt} = a_x \sqrt{\frac{p}{m}} \left( \frac{e r_0}{p} + \left( 1 + \frac{r_0}{p} \right) \cos J \right),$$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\sqrt{mp}}{r_0^2} - a_x \frac{1}{e} \sqrt{\frac{p}{m}} \left( 1 + \frac{r_0}{p} \right) \sin J,$$

где  $w$  – аргумент перигея,  $\Omega$  – долгота восходящего узла,  $i$  – наклонение орбиты,  $p$  – аргумент перигея,  $e$  – эксцентриситет орбиты,  $J$  – угол истинной аномалии,  $a_x = P / (m_1 + m_2)$  – проекция на ось  $Ox_0$  возмущающего ускорения.

3. Численное моделирование

С целью изучения влияния начальных условий и параметров системы на её поведение рассмотрим четыре случая, отличающиеся начальными значениями расстояния между КА, начальной угловой скоростью пассивного КА и его моментами инерции.

Пусть на КА-буксир действует постоянная сила, направленная в сторону, противоположную оси  $Ox_0$ :  $P = -1$  Н. Система имеет следующие неизменные параметры:  $B = C = 15000$  кг·м<sup>2</sup>,  $m_1 = 500$  кг,  $m_2 = 3000$  кг,  $r_x = 1$  м;  $c_t = 83$  ГПа,  $k_t = 0,1$  Н·с/м,  $l_0 = 200$  м,  $m = 3.987 \cdot 10^{14}$  и элементы орбиты:  $e_0 = 0.01$ ,  $p_0 = 6871$  км,  $i_0 = \pi/3$ ,  $\Omega_0 = 0$ ,  $\omega_0 = \pi/2$ ,  $\vartheta_0 = 0$ . Во всех рассматриваемых случаях в начальный момент угол между осью симметрии

твёрдого тела и прямой  $CC_1$   $q_0 = \pi/3$ , угол  $a_0 = 0$  и  $\dot{q}_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$ .

3.1. Движение твёрдого тела при постоянно натянутом тросе и начальной угловой скорости  $\dot{\varphi}_0 = 0,05$  с<sup>-1</sup>, момент инерции  $A = 3500$  кг·м<sup>2</sup>

Пусть система совершает движение при постоянно натянутом тросе:  $l > l_0$ . График изменения угла нутации  $q$  на протяжении половины орбитального периода приведен на рис. 2. Начальная угловая скорость пассивного КА  $\varphi_0$  приводит к возникновению гироскопического эффекта, что при наличии возмущающей силы натяжения троса вызывает увеличение угла  $q$ . На рис. 3 представлен график изменения высоты орбиты под действием силы, приложенной к КА-буксиру.

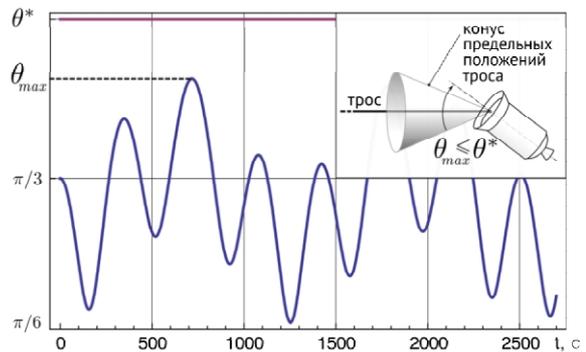


Рис. 2. Изменение угла  $q$  по времени для первого случая

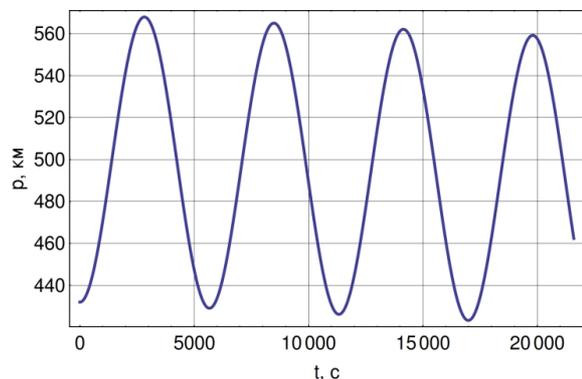


Рис. 3. Изменение высоты орбиты по времени для первого случая в течение 4 орбитальных периодов

3.2. Движение твёрдого тела при периодических ослаблениях троса

Рассмотрим случай, когда начальное расстояние между телами меньше свободной длины троса  $s_0=190$  м. Трос воздействует на пассивный КА в течение коротких промежутков времени. Импульсные воздействия троса приводят существенным изменениям угла  $q$ , и этот угол может превысить некоторое критическое значение  $q^*$  (рис. 4), которое определяется формой пассивного КА.

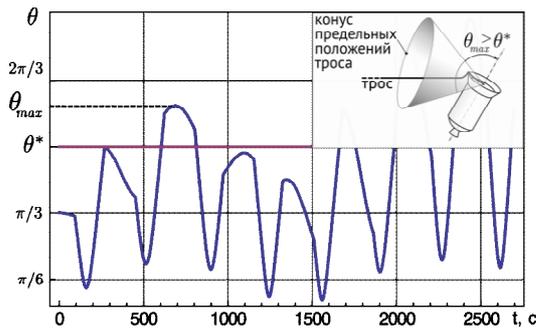


Рис. 4. Изменение угла  $q$  по времени для второго случая

### 3.3. Движение твёрдого тела при постоянно натянутом тросе и большем моменте инерции пассивного КА

Рассмотрим случай, отличающийся от первого большим значением продольного момента инерции КА:  $A=12000$  кгм<sup>2</sup>. Как показано на рис. 5, увеличение кинетического момента пассивного КА приводит к большему отклонению угла  $q$  от начального значения. Как и во втором случае, значение угла  $q$  в процессе движения превышает некоторое критическое значение  $q^*$ .

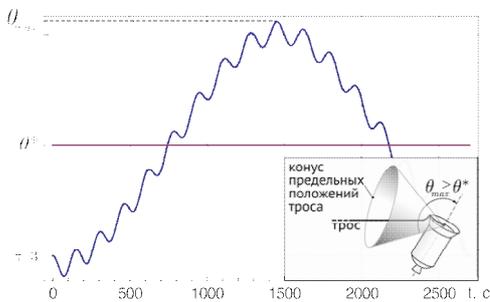


Рис. 5. Изменение угла  $q$  по времени для третьего случая

### 3.4. Движение твёрдого тела при постоянно натянутом тросе и начальной угловой скорости $j_{k_0} = 0,1$ с<sup>-1</sup>

Результаты численного моделирования, представленные на рис. 6, показывают, что при увеличении начальной угловой скорости собственного вращения КА в два раза по сравнению с первым случаем наблюдаются эффекты аналогичные тем, что представлены на рис. 5.

Таким образом, при некоторых значениях начальной угловой скорости собственного вращения пассивного КА, величины продольного момента инерции и начального натяжения троса могут возникать режимы движения, когда угол между линией троса и продольной осью КА превышает некоторое критическое значение  $q^*$ , что может привести к зацеплению троса за элементы конструкции КА.

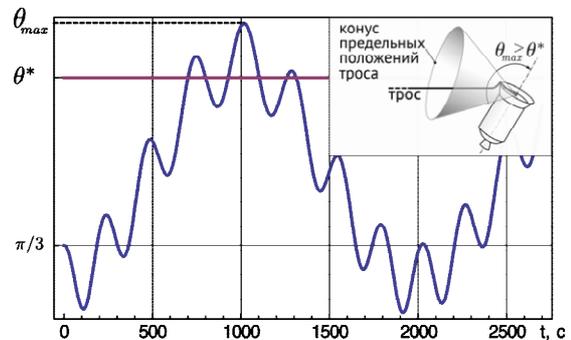


Рис. 6. Изменение угла  $q$  по времени для четвёртого случая

## 4. Заключение

На основе формализма Лагранжа построена математическая модель движения тросовой системы, состоящей из пассивного КА, вязкоупругого троса и космического буксира в центральном гравитационном поле. Анализ результатов численного моделирования показывает, что при буксировке КА необходимо учитывать его движение вокруг центра масс. В процессе движения пассивного КА возможны режимы движения, приводящие к большим колебаниям продольной оси КА, что может привести к запутыванию троса. Эти режимы определяются с начальными условиями движения и параметрами буксируемого КА.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12-01-00317-а).

### Библиографический список

1. Белецкий, В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле [Текст] / В. В. Белецкий – М.: Наука, 1975.

2. Ярошевский, В. А. Движение неуправляемого тела в атмосфере [Текст] / В. А. Ярошевский – М.: Машиностроение, 1978.

3. Асланов, В. С. Пространственное движение тела при спуске в атмосфере [Текст] / В. С. Асланов – М.: Физматлит, 2004.

4. Асланов, В. С. Колебания тела с орбитальной тросовой системой [Текст] / В. С. Асланов // Прикладная математика и механика. – 2007. – Т. 71, Вып. 6. – С. 1027-1033.

5. Асланов, В. С. Влияние упругости орбитальной тросовой системы на колебания спутника [Текст] / В. С. Асланов // Прикладная математика и механика. – 2010. – Т. 74. Вып. 4. – С. 582-593.

6. Асланов, В. С. Колебания спутника с вертикальным упругим тросом на орбите [Текст] / В. С. Асланов // Известия РАН «Механика твердого тела». – 2011. – №5. – С. 3-15.

7. Асланов, В. С. Хаотические колебания КА с упругим радиально ориентированным тросом [Текст] / В. С. Асланов, А. С. Ледков // Космические исследования. – 2012. – Т. 50, № 2. – С. 194-204.

8. Асланов, В. С. Малые колебания осесимметричного космического аппарата с тросовой системой [Текст] / В. С. Асланов, Н. Р. Стратилатов // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. Механика. – 2008. – 6 (65). – С. 202-208.

9. Заболотнов, Ю. М. Движение спускаемой капсулы относительно центра масс при разворачивании орбитальной тросовой системы [Текст] / Ю. М. Заболотнов, О. Н. Наумов // Космические исследования. – 2012. – Т. 50 № 2. – С. 183-193.

10. Бухгольц, Н. Н. Основы курса теоретической механики [Текст]: учеб. для гос. ун-тов / Н. Н. Бухгольц. – 4-е изд., перераб. и доп. С. М. Таргом. – М.: Наука, 1966. Ч. 2: Динамика системы материальных точек.

11. Виттенбург, Й. Динамика систем твёрдых тел [Текст] / Й. Виттенбург – М.: Мир, 1980.

12. Охоцимский, Д. Е. Основы механики космического полёта [Текст]: учеб. пособие / Д. Е. Охоцимский, Ю. Г. Сихарулидзе – М.: Наука. 1990.

## DYNAMICS OF TOWING TETHERED SPACECRAFT IN THE CENTRAL GRAVITATIONAL FIELD

© 2012 V. S. Aslanov, V. V. Yudintsev

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov  
(National Research University)

The motion of spacecraft as a rigid body connected to a space tow with a viscoelastic tether in the central gravitational field is discussed in the paper. The equations of spacecraft spatial motion and the orbital motion of the system's center of mass in osculating elements are obtained on the basis of Lagrange formalism. The influence of the system's parameters and the initial conditions of motion on the motion of the spacecraft is analyzed. The possibility of critical modes of motion leading to the entanglement of the tether is shown.

*Space tow, elastic tether, rigid body, central gravitational field, osculating elements.*

### Информация об авторах

**Асланов Владимир Степанович**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: [aslanov\\_vs@mail.ru](mailto:aslanov_vs@mail.ru). Область научных интересов: динамика твёрдого тела, динамика систем тел, хаотическая динамика, динамика космических тросовых систем.

**Юдинцев Вадим Вячеславович**, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: [yudintsev@classmech.ru](mailto:yudintsev@classmech.ru). Область научных интересов: динамика твёрдого тела, динамика систем тел, хаотическая динамика, динамика космических тросовых систем.

**Aslanov Vladimir Stepanovich**, doctor of technical science, professor, head of the department of theoretical mechanics, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: [aslanov\\_vs@mail.ru](mailto:aslanov_vs@mail.ru). Area of research: rigid-body dynamics, dynamics of body systems, chaotic dynamics, dynamics of space tether systems.

**Yudintsev Vadim Vyacheslavovich**, candidate of technical science, associate professor, the department of theoretical mechanics, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: [yudintsev@classmech.ru](mailto:yudintsev@classmech.ru). Area of research: rigid-body dynamics, dynamics of body systems, chaotic dynamics, dynamics of space tether systems.