УДК 517.9

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ В КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ПРИ МАЛОМ МНОГОЗНАЧНОМ ВОЗМУЩЕНИИ

©2012 А. Н. Лепилов

ФГУП ГНПРКЦ «ЦСКБ–Прогресс», г. Самара

Рассматривается задача определения максимальной амплитуды гармонических колебаний при малом внешнем многозначном воздействии. Для её решения строится усреднённое дифференциальное включение, которое взаимно аппроксимирует исходную систему по медленным переменным на промежутке времени $[0,1/m]$, m – малый параметр. Возникает задача вычисления предела максимального среднего для периодической функции, которая решается приближённым методом.

Колебательная система, предел максимального среднего, дифференциальное включение.

Рассмотрим колебательную систему, находящуюся под воздействием малой внешней периодической силы с постоянной амплитудой. Исследуем ситуацию, когда фазовый угол внешней силы «плывёт» и известна лишь оценка скорости его изменения. Для этой системы рассмотрим задачу Коши:

$$\ddot{x} + w^2 x = mA\cos g,\ x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = x_1,\qquad (1)$$
$$\dot{g} \in [w_1, w_2] + mH(t, x, g),\ g(0) = y_0,$$

где ω – собственная частота колебаний, $A > 0$ – амплитуда внешней силы, m – малый параметр, $0 < \omega_1 < \omega_2$, $H(t, x, \gamma)$ – ограниченное измеримое по t и липшицево по x, γ многозначное отображение. Решения дифференциального включения $\dot{g} \in [w_1, w_2]$ рассматриваются в смысле Каратеодори.

Поставим задачу вычисления максимальной амплитуды $\max\limits_t |x(t)|$ на отрезке $0 \le t \le 1/m$.

Заменой переменных $x = a(t)\cos y(t)$, $\dot{x} = -a(t)w\sin y(t)$, $y(t) = wt + q(t)$ переводим исходную задачу (1) к переменным $a(t)$, $q(t)$ [1]. Получаем

$$\begin{cases} \dot{a} = -m\dfrac{A}{w}\sin y(t)\cos g(t), \\ \dot{q} = -m\dfrac{A}{a(t)w}\cos y(t)\cos g(t), \\ \dot{g} \in [w_1, w_2] + mH(t, a(t)\cos y(t), g(t)), \\ a(0) = a_0,\quad q(0) = q_0,\quad g(0) = y_0, \end{cases}\qquad (2)$$

где $\theta_0 = arctan(-x_1/\omega x_0)$, $a_0 = x_0/\cos q_0$. Система (2) может быть переписана в виде

$$\begin{cases} \dot{z} = -mF(a(t), q(t), g(t), t) \\ \dot{g} \in [w_1, w_2] + mH(t, a(t)\cos y(t), g(t)), \\ z(0) = z_0,\quad g(0) = y_0, \end{cases}\qquad (3)$$

где $z = (a(t), q(t))$ – медленные, t, $\gamma(t)$ – быстрые переменные. Рассмотрим эволюцию медленных переменных z на асимптотически большом промежутке времени $[0,1/m]$, $m > 0$. Сопоставим системе (3) усреднённое дифференциальное включение

$$\dot{x} \in mF_0(x),\quad \xi(0) = \xi_0,\qquad (4)$$

где $F_0 : R^2 \to Kv(R^2)$ - совокупность непустых компактных выпуклых множеств из R^2, $x = (x_1, x_2)$, $\xi_0 = (a_0, \theta_0)$. Дифференциальное включение (4) взаимно аппроксимирует систему (3) по медленным переменным [2] (на асимптотически большом промежутке времени), если $\forall e > 0\ \exists m_0 > 0\ \ \forall m \in (0, m_0]$ и произвольного решения $z(t,m)$, $\gamma(t)$ задачи (3) найдётся решение $x(mt)$ задачи (4) такое, что

$$\|z(t,m)-x(mt)\|<e \quad \forall t\in[0,1/m], \qquad (5)$$

и, наоборот, для любого решения $x(mt)$ задачи (4) существует решение $z(t,m)$, $\gamma(t)$ задачи (3), для которого имеет место оценка (5).

Для построения правой части аппроксимирующей задачи (4) применяем технику опорных функций [2, 3].

Потребуется порождающая система, которая получается из (3), если принять $m=0$, а в качестве начальных условий в момент времени $t=0$ рассматривать произвольные значения $\tilde{z}_0=(x_1,x_2)$, $x_1\in R$, $x_2\in R$ и $\tilde{y}_0\in \mathrm{R}$:

$$\dot{z}=0, \qquad z(0)=\tilde{z}_0,$$

$$\dot{g}\in[w_1,w_2], \quad g(0)=\tilde{y}_0.$$

Отсюда $a(t)=x_1$, $q(t)=x_2$.

Опорная функция множества $F_0(x_1,x_2)$ в направлении вектора $h=(h_1,h_2)$ сводится к вычислению предела максимального среднего вида

$$c(F_0(x_1,x_2),h)=$$

$$=\lim_{\Delta\to\infty}\sup_g\frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta}c\Big(F(\tilde{a}_0,\tilde{q}_0,g(t),t),h\Big)dt,$$

где точная верхняя грань вычисляется по всем решениям типа Каратеодори задачи

$$\dot{g}\in[w_1,w_2], \quad g(0)=\tilde{y}_0.$$

Опорную функцию множества $F=(F_1,F_2)$, в рассматриваемом случае сводящегося к точке, на решениях порождающей системы представим в виде

$$c\big(F((x_1,x_2,g(t),t),h\big)=\sup_{f\in F}\langle f,h\rangle=$$

$$=F_1h_1+F_2h_2=-\frac{A}{w}\cos g(t)\Big(h_1\sin(wt+\tilde{q}_0)+$$

$$+\frac{h_2}{\tilde{a}_0}\cos(wt+\tilde{q}_0)\Big).$$

Тогда опорная функция к множеству $F_0(x_1,x_2)$ определяется соотношением

$$c(F_0(\tilde{a}_0,\tilde{q}_0),h)=$$

$$=B\lim_{\Delta\to\infty}\sup_g\frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta}f(t,g(t),\tilde{a}_0,\tilde{q}_0,h)dt, \qquad (6)$$

где $f(t,g(t),\tilde{a}_0,\tilde{q}_0,h)=-\sin(wt+j_0)\cos g$,

$$\dot{g}\in[w_1,w_2], \qquad g(0)=\tilde{y}_0,$$

$$B=\frac{A}{w}\sqrt{h_1^2+h_2^2/\tilde{a}_0^2}, \quad j_0=\tilde{q}_0+\arctan\frac{h_2}{\tilde{a}_0h_1}.$$

Отметим, что поскольку функция f непрерывная, а компакт $\{1\}\times[w_1,w_2]\subset R^2$ является невырожденным (не содержится в подпространстве размерности единица), то предел максимального среднего (6) существует и не зависит от начальных условий, более того существует и оптимальное решение задачи (6) [4]. Обозначим значение предела (6) через M. Положим $x_1=\tilde{a}_0$, $x_2=\tilde{q}_0$. Тогда выражение для опорной функции к $F_0(x_1,x_2)$ примет вид

$$c(F_0(x_1,x_2),h)=\frac{AM}{w}\sqrt{h_1^2+h_2^2/x_1^2}.$$

Известно, что такую же опорную функцию имеет эллипс [3]:

$$F=\big\{(x_1,x_2):(x_1/a)^2+(x_2/b)^2\le 1\big\},$$

$$c(F,h)=\sqrt{(ah_1)^2+(bh_2)^2}.$$

Получаем, что множество скоростей изменения медленных переменных $F_0(x_1,x_2)$ есть эллипс:

$$F_0(\xi)=\left\{(\dot{\xi}_1,\dot{\xi}_2):\frac{\dot{\xi}_1^2}{(AM/\omega)^2}+\frac{\dot{\xi}_2^2}{(AM/\omega\xi_1)^2}\le 1\right\}.$$

Таким образом, правая часть в усреднённом дифференциальном включении (4) определена.

Покажем, что для задачи (4) $x_1(t)\le mAMt/w+a_0$ на $0\le t\le 1/m$.

В силу того, что скорость изменения $x_1(t)$ не превосходит правой полуоси эллипса $\dot{x}_1\le mAM/w$, то наибольшее $x_1(t)$ найдём, выбрав следующий селектор из эллипса $F_0(x_1,x_2)$:

$$\begin{cases} x_1=mAM/w,\ x_1(0)=a_0,\\ x_2=0, \qquad x_2(0)=q_0.\end{cases}$$

Следовательно, $x_1(t) = mMAt/w + a_0$, $q = q_0$. Получаем, что на промежутке $t \in [0,1/m]$ $x_1(t) \le mMAt/w + a_0$.

Так как дифференциальное включение (4) взаимно аппроксимирует систему (3) по медленным переменным, то есть $\forall e > 0$ $\exists m_0 > 0$ $\forall m \in (0, m_0]$ $|a(t,m) - x_1(mt)| < e$, $|q(t,m) - x_2(mt)| < e$ $\forall t \in [0,1/m]$, тогда для задачи (1) имеем

$$\max_t |x(t)| = \max_t |a(t)| \le \mu MAt/\omega + a_0 + \varepsilon. \quad (7)$$

Для сравнения приведём выражение для амплитуды в случае резонансного воздействия внешней силы на колебательную систему, в частности, если в задаче (1) $H(t,x,g) = 0$ и $\dot{g} = w$, то

$$|x(t)| \le m(1/2)At/w + \hat{a}_0. \quad (8)$$

В формуле (7) присутствует значение предела максимального среднего M функции f. Для вычисления M примем $\omega = 1$. В силу независимости значения предела M от начальных условий функция имеет вид:

$f(t,\gamma(t)) = -\sin t \cos \gamma(t)$

и является $2p$-периодической по переменным t, g. Оценим предел, используя метод, предложенный в [5]. Для этого введём максимальное среднее на $[0,2\pi]$:

$$M^{2p} = B \sup_{y_0 \in [0,2p)} \sup_g \frac{1}{2p} \int_0^{2p} -\sin t \cos g(t) dt, \quad (9)$$

$\dot{g} \in [w_1, w_2]$, $g(0) = \tilde{y}_0$. Тогда справедлива оценка предела M:

$M^{2p} - k \le M \le M^{2p}$,

где $k = 2C/(w_2 - w_1)$, $w_2 - w_1 > 1$, $C = \max_{t,g} |f(t,g)|$. Для рассматриваемой функции $C \le 1$, следовательно, $k = 2/(w_2 - w_1)$.

Для приближённого вычисления максимального среднего (9) разработан численный метод, основанный на принципе максимума Понтрягина для задачи со свободным концом [6]. Согласно этому принципу, оптимальным решением задачи (9) является решение следующей краевой задачи на отрезке $[0,2p]$:

$$\dot{p} = -\frac{\partial}{\partial \gamma} f(t,\gamma), \quad p(2\pi) = 0,$$

$$\dot{\gamma} \in G_0(p), \quad \gamma(0) = y_0,$$

$$G_0(p) = \{u \in [\omega_1, \omega_2] : \max_{v \in [\omega_1, \omega_2]} \langle p, v \rangle = \langle p, u \rangle\}.$$

Решения этой краевой задачи содержатся в совокупности решений задачи Коши на отрезке $[0,2\pi]$:

$$\dot{p} = -\frac{\partial}{\partial \gamma} f(t,\gamma), \quad p(2\pi) = 0,$$

$$\dot{\gamma} \in G_0(p), \quad \gamma(2\pi) = y_{2\pi}. \quad (10)$$

Для определения оптимального управления в (9) численно решается задача (10), которая имеет вид:

$$\dot{p} = -\sin t \cos g(t), \quad p(2p) = 0,$$

$$\dot{g}(t) = \begin{cases} w_1, & если\ p(t) < 0, \\ w_2, & если\ p(t) \ge 0, \end{cases} \quad g(2p) = y_{2p},$$

y_{2p} выбирается из отрезка $[0,2p]$ в силу $2p$-периодичности функции $f(t,g(t))$. Заметим, что равенство $p(t) = 0$ в данной задаче реализуется на множестве меры нуль (по Лебегу) из отрезка $[0,2p]$. Предложенный метод реализован программно в среде Delphi. Некоторые результаты вычислений представлены в табл. 1 ($\tilde{M}^{2p}$ – значение максимального среднего M^{2p}, вычисленное программно).

Таблица 1. Результаты вычислений

ω_1	w_2	k	$\tilde{M}^{2p}$	$\tilde{M}^{2p} - k$
0.25	8	0.25807	0.56333	0.30526
	128	0.01566	0.52941	0.51375
0.5	8	0.26667	0.55146	0.28479
	128	0.01569	0.52497	0.50928
0.75	8	0.27586	0.47526	0.19940
	128	0.01572	0.47215	0.45643

Примечание: Результаты приведены без учёта резонансных случаев для задачи (1), содержащихся в отрезке $[\omega_1, \omega_2]$.

Отметим, что при $[w_1, w_2] = [0.25,128]$ величина M из правой части (7), как видно из табл. 1, оценивается снизу числом 0.51375, что превосходит коэффициент $1/2$, который присутствует в выражении для главного резонанса (8).

Библиографический список

1. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [Текст] / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. - М.: Наука, 1974. – 504 с.

2. Филатов, О. П. Усреднение дифференциальных включений и пределы максимальных средних [Текст] / О. П. Филатов. - Самара: Изд-во «Универс групп», 2009. – 176 с.

3. Благодатских, В. И. Введение в оптимальное управление [Текст] / В. И. Благодатских. - М.: Высшая школа, 2001. – 239 с.

4. Филатов, О. П. Вычисление пределов максимальных средних для периодических функций [Текст] / О. П. Филатов // Вестн. СамГУ. – Самара, 2011. - № 2. - С. 75-79.

5. Лепилов, А. Н. Вычисление пределов максимальных средних в периодическом случае [Текст] / А. Н. Лепилов // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2011: материалы научной конференции. – Спб.: ООО «ПаркКом», 2011 – С. 85-88.

6. Алексеев, В. М. Оптимальное управление [Текст] / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 408 с.

CALCULATING MAXIMUM AMPLITUDE IN AN OSCILLATORY SYSTEM WITH MANY-VALUED PERTURBATION

©2012 A. N. Lepilov

Space Rocket Center «TsSKB-Progress», Samara

The paper deals with the task of determining maximum amplitude of harmonic oscillations with a small external many-valued perturbation. An averaged differential inclusion is constructed in order to solve it using the method of support functions. It mutually approximates the initial system on slow variables over the time interval $[0,1/m]$, where m is perturbation. The problem of calculating the maximum average for the periodic function arises which is solved by an approximate method.

Oscillatory system, maximum average limit, differential inclusion.

Информация об авторе

Лепилов Александр Николаевич, начальник группы, ФГУП ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс». Область научных интересов: математические модели, теория управления, дифференциальные включения.

Lepilov Aleksandr N., Head of Unit, Space Rocket Center «TsSKB-Progress». Area of research: mathematical models, control theory, differential inclusion.