УДК 539.214+539.374+548.735.6+621.7.043

РАЗРАБОТКА КРИТЕРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ РАСЧЁТОВ ФОРМОООБРАЗОВАНИЯ ВЫСОКОТЕКСТУРИРОВАННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ЗАГОТОВОК

© 2012 Ф. В. Гречников, Я. А. Ерисов

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Предложен критерий пластичности для расчётов формообразования высокотекстурированных анизотропных заготовок, полученный на основе энергетического критерия пластичности Р. Мизеса с учётом ориентационных факторов текстуры и констант кристаллической решетки.

Критерий пластичности, анизотропия, параметры текстуры, материальный тензор, ассоциированный закон течения, интенсивность напряжений, интенсивность деформаций, уравнения связи напряжений и деформаций.

Как известно, такие широко распространённые в производстве аэрокосмической техники полуфабрикаты как листы, ленты, профили, трубы и т.д. обладают явно выраженной анизотропией свойств, являющейся следствием кристаллического строения вещества и последующего его текстурообразования при пластической деформации. Игнорирование этой фундаментальной характеристики материалов в технологических расчётах не только снижает потенциальные деформационные возможности заготовок, но и приводит к целому ряду других нежелательных явлений: повышенному расходу металла, ограничению предельно допустимой деформации, искажению формы, размеров и снижению эксплуатационных параметров продукции. С другой стороны, рациональная анизотропия является серьёзным фактором интенсификации процессов формообразования материалов и повышения эксплуатационных характеристик изделий в определённых направлениях [1,2].

Однако в технологических расчётах процессов формообразования деталей летательных аппаратов, двигателей и других изделий машиностроения до сих пор используются соотношения теории пластичности, основанной на феноменологическом подходе, куда не входят параметры кристаллографической текстуры и константы кристаллической решётки, являющиеся причиной возникновения анизотропии свойств заготовок. Следовательно нет и основы для непосредственного анализа деформационных возможностей металла в конкретной операции, определения условий формирования и наиболее эффективного использования направленности свойств заготовок. Такие возможности появляются лишь при использовании структурного подхода и аппарата теории пластичности анизотропных сред, в которой критерий пластичности является совместным инвариантом тензора напряжений и материального тензора, учитывающего реальную структуру материала.

В общем случае такой критерий пластичности можно получить, исходя из функции текучести Р. Мизеса [3]:

$$f = s_i^2 = \frac{1}{2}\left(k_{ijkl} s_{ij} s_{kl} + k_{pq}^{rs} s_{pq}\right), \qquad (1)$$

где f – функция текучести; s_i – интенсивность напряжений; s_{ij} – тензор напряжений; k_{pq}^{rs} – тензор, учитывающий разницу в пределах текучести сжатия и растяжения; k_{ijkl} – материальный тензор.

Критерий пластичности (1) может быть использован в самом общем случае анизотропии. Однако для металлов и сплавов в этом нет необходимости, т.к.

листы, ленты, трубы имеют определённую симметрию свойств [4]. Следовательно для использования теории пластичности анизотропных сред при обработке металлов давлением достаточно рассмотреть случай ортотропного тела.

Если пренебречь различием пределов текучести на сжатие и растяжение [5], то функция пластичности (1) в главных осях симметрии ортотропного тела примет следующий вид:

$$f = s_i^2 = \frac{1}{2}K_{ijkl}s_{ij}s_{kl} = \frac{1}{2}\Big[K_{1111}s_{11}^2 + K_{2222}s_{22}^2 + K_{3333}s_{33}^2 + 2\left(K_{1122}s_{11}s_{22} + K_{2233}s_{22}s_{33} + K_{3311}s_{33}s_{11}\right) + 4\left(K_{1212}s_{12}^2 + K_{2323}s_{23}^2 + K_{3131}s_{31}^2\right)\Big], \tag{2}$$

где K_{ijkl} – компоненты материального тензора в главных осях анизотропии.

Компоненты K_{ijkl} могут быть представлены с точностью до постоянного множителя через компоненты тензора податливости S_{ijkl} [6]:

$$K_{ijkl} = h\left[S_{ijkl} - \frac{1}{3}d_{ij}d_{kl}\left(S_{ii11} + S_{ii22} + S_{ii33}\right)\right], \tag{3}$$

где h – коэффициент пропорциональности; $d_{ij} = \begin{cases}1, & i = j\\ 0, & i \neq j\end{cases}$ – символ Кронекера.

Для определения компонент тензора податливости S_{ijkl} по известным значениям констант кристаллической решетки S'_{ijkl} и ориентационных факторов текстуры Δ_i воспользуемся существующими зависимостями для упругой среды [7]:

$$\begin{aligned} S_{iiii} &= S'_{1111} - 2S'\Delta_i,\\ S_{ijij} &= S'_{2323} + 4S'\left(\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k\right),\\ S_{iijj} &= S'_{1122} + 2S'\left(\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k\right),\\ S' &= S'_{1111} - S'_{1122} - \frac{1}{2}S'_{2323}. \end{aligned} \tag{4}$$

После ряда преобразований получим отношение компонент K_{iijj}/K_{jjjj}, выраженное через константы кристаллической решётки S'_{ijkl} и ориентационные факторы текстуры Δ_i, в следующем виде:

$$\frac{K_{iijj}}{K_{jjjj}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_i - \Delta_k}{Q - \Delta_j} - 1\right), \tag{5}$$

где

$Q = \left(S'_{1111} - S'_{1122}\right) \Big/ \left(3S'_{1111} - 3S'_{1122} - \tfrac{3}{2}S'_{2323}\right)$

– характеристический параметр кристаллической решётки.

Для определения K_{iijj}/K_{ijij} воспользуемся формулами преобразования при повороте системы координат на угол 45° относительно оси 3 и получим:

$$\frac{K_{iijj}}{K_{ijij}} = -\frac{2}{3}\frac{Q + \Delta_k - \Delta_i - \Delta_j}{Q - \frac{2}{3}\left[\Delta_k - \Delta_i - \Delta_j + \frac{1}{2}\right]}. \tag{6}$$

Используя соотношения (5)-(6) и условие несжимаемости, выразим все компоненты материального тензора K_{ijkl} через одну из характерных компонент, например K_{1122}, параметры текстуры и константы кристаллической решётки:

$$\begin{aligned} K_{1111} &= -2\frac{Q - \Delta_1}{Q + \Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2}K_{1122},\\ K_{2222} &= -2\frac{Q - \Delta_2}{Q + \Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2}K_{1122},\\ K_{3333} &= -2\frac{Q - \Delta_3}{Q + \Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2}K_{1122},\\ K_{3311} &= \frac{Q + \Delta_2 - \Delta_1 - \Delta_3}{Q + \Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2}K_{1122},\\ K_{2233} &= \frac{Q + \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3}{Q + \Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2}K_{1122},\\ K_{1212} &= -\frac{3}{2}\frac{Q + \frac{2}{3}\left(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 - \frac{1}{2}\right)}{Q + \Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2}K_{1122},\\ K_{2323} &= -\frac{3}{2}\frac{Q + \frac{2}{3}\left(\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1 - \frac{1}{2}\right)}{Q + \Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2}K_{1122},\\ K_{3131} &= -\frac{3}{2}\frac{Q + \frac{2}{3}\left(\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2 - \frac{1}{2}\right)}{Q + \Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2}K_{1122}. \end{aligned} \tag{7}$$

Для того чтобы соотношения теории были инвариантными, выразим K_{1122} через один из инвариантов материального тензора K_{ijkl}, например I_1 [8]:

$$I_1 = K_{1212} + K_{2323} + K_{3131} - \\ -\left(K_{1122} + K_{2233} + K_{3311}\right) \quad (8)$$

и приравняем его соответствующему инварианту изотропной среды, в которой компоненты K_{ijkl} всегда имеют постоянные значения: $K_{iiii} = 2$, $K_{iijj} = -1$ и $K_{ijij} = 3/2$. Отсюда $I_1^{iso} = 15/2$.

Весь вывод основных соотношений теории сделан в предположении существования материального тензора K_{ijkl}, что было подтверждено экспериментально путём проверки существования инварианта I_1 в работе [9].

Подставляя в уравнение (8) выражения для компонентов материального тензора из (7), получим зависимости, связывающие компоненты материального тензора с текстурными параметрами и упругими постоянными кристаллической решётки:

$$K_{1111} = 2\frac{Q-\Delta_1}{Q-\frac{1}{5}},\ K_{1122} = -\frac{Q+\Delta_3-\Delta_1-\Delta_2}{Q-\frac{1}{5}},$$
$$K_{2222} = 2\frac{Q-\Delta_2}{Q-\frac{1}{5}},\ K_{2233} = -\frac{Q+\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3}{Q-\frac{1}{5}},$$
$$K_{3333} = 2\frac{Q-\Delta_3}{Q-\frac{1}{5}},\ K_{3311} = -\frac{Q+\Delta_2-\Delta_1-\Delta_3}{Q-\frac{1}{5}}, \quad (9)$$

$$K_{1212} = \frac{3}{2}\frac{Q-\frac{2}{3}\left(\Delta_3-\Delta_1-\Delta_2+\frac{1}{2}\right)}{Q-\frac{1}{5}},$$

$$K_{2323} = \frac{3}{2}\frac{Q-\frac{2}{3}\left(\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3+\frac{1}{2}\right)}{Q-\frac{1}{5}},$$

$$K_{3131} = \frac{3}{2}\frac{Q-\frac{2}{3}\left(\Delta_2-\Delta_1-\Delta_3+\frac{1}{2}\right)}{Q-\frac{1}{5}}.$$

Таким образом, найдены все составляющие материального тензора K_{ijkl} в главных осях анизотропии, которые включают в себя три ориентационных фактора текстуры Δ_i и характеристический параметр кристаллической решетки Q деформируемого материала.

Из анализа уравнений (9) следует, что в листах могут быть созданы практически любые сочетания компонентов материального тензора путём расчёта и подбора соответствующих кристаллографических ориентировок $\{hkl\}<uvw>$ или состава компонентов текстуры в целом для материалов с реальными параметрами Q.

Если же материал принимается изотропной (сплошной) средой, для которой $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1/5$ и $Q = const$ [1], то все компоненты K_{ijkl} в функциональных зависимостях (9) примут постоянные значения. Другими словами: при использовании изотропной модели среды фундаментальные свойства материала не учитываются и все материалы приравниваются друг к другу.

Выражение для интенсивности напряжений, учитывающей в явном виде параметры текстуры и константы кристаллической решётки, получим, подставив зависимости (9) в функцию пластичности (2):

$$s_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{h_{12}\left(s_{11}-s_{22}\right)^2 + h_{23}\left(s_{22}-s_{33}\right)^2 + \\ + h_{31}\left(s_{33}-s_{11}\right)^2 + 4\Big[\left(\frac{5}{2}-h_{12}\right)s_{12}^2 + \\ + \left(\frac{5}{2}-h_{23}\right)s_{23}^2 + \left(\frac{5}{2}-h_{31}\right)s_{31}^2\Big]\Big\}^{1/2}. \quad (10)$$

Здесь h_{ij} – обобщённый показатель текстурированного состояния материала:

$$h_{12}=\frac{Q+\Delta_3-\Delta_1-\Delta_2}{Q-\frac{1}{5}},$$

$$h_{23}=\frac{Q+\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3}{Q-\frac{1}{5}}, \qquad (11)$$

$$h_{31}=\frac{Q+\Delta_2-\Delta_1-\Delta_3}{Q-\frac{1}{5}}.$$

Для изотропной среды при $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=1/5$ получим $h_{12}=h_{23}=h_{31}=1$. Тогда выражение (11) упростится:

$$s_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(s_{11}-s_{22})^2+(s_{22}-s_{33})^2+(s_{33}-s_{11})^2+6\left(s_{12}^2+s_{23}^2+s_{31}^2\right)}, \qquad (12)$$

т.е. получим энергетический критерий пластичности Губера-Мизеса [10].

Уравнения связи между приращениями деформаций de_{ij} и напряжениями s_{ij} определим на основании ассоциированного закона пластического течения, согласно которому [10]:

$$de_{ij}=dl\,\frac{\partial s_i}{\partial s_{ij}}. \qquad (13)$$

Дифференцируя уравнение (2) по (13):

$$de_{ij}=\frac{dl}{2s_i}K_{ijkl}s_{kl}, \qquad (14)$$

где dl – неопределённый (пластический) множитель Лагранжа, постоянный для данных значений деформаций.

Сначала найдём неизвестную величину dl, записав выражение для работы пластической деформации dW, отнесённой к единице объёма [11]:

$$dW=s_{ij}de_{ij}=s_i de_i, \qquad (15)$$

где de_i – приращение интенсивности деформаций. Подставляя выражение (14) в (15), после преобразований с учётом формулы (2) получим:

$$dl=de_i. \qquad (16)$$

Окончательно, дифференцируя условие (10) согласно закону (13) и подставляя равенство (16), получим следующие уравнения связи деформаций и напряжений:

$$de_{11}=\frac{1}{2}\frac{de_i}{s_i}\left[h_{12}(s_{11}-s_{22})+h_{31}(s_{11}-s_{33})\right],$$

$$de_{22}=\frac{1}{2}\frac{de_i}{s_i}\left[h_{12}(s_{22}-s_{11})+h_{23}(s_{22}-s_{33})\right],$$

$$de_{33}=\frac{1}{2}\frac{de_i}{s_i}\left[h_{23}(s_{33}-s_{22})+h_{31}(s_{33}-s_{11})\right],$$

$$de_{12}=2\frac{de_i}{s_i}\left(\frac{5}{2}-h_{12}\right)s_{12},$$

$$de_{23}=2\frac{de_i}{s_i}\left(\frac{5}{2}-h_{23}\right)s_{23},$$

$$de_{31}=2\frac{de_i}{s_i}\left(\frac{5}{2}-h_{31}\right)s_{31}. \qquad (17)$$

Подставляя в (17) параметры текстуры изотропного тела: $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=1/5$ или $h_{12}=h_{23}=h_{31}=1$, получим известные уравнения обобщённого закона Гука [10]:

$$de_{11}=\frac{de_i}{s_i}\left[s_{11}-\frac{1}{2}(s_{22}+s_{33})\right],$$

$$de_{22}=\frac{de_i}{s_i}\left[s_{22}-\frac{1}{2}(s_{11}+s_{33})\right],$$

$$de_{33}=\frac{de_i}{s_i}\left[s_{33}-\frac{1}{2}(s_{11}+s_{22})\right], \qquad (18)$$

$$de_{12}=3\frac{de_i}{s_i}s_{12},\ de_{23}=3\frac{de_i}{s_i}s_{23},$$

$$de_{31}=3\frac{de_i}{s_i}s_{31}.$$

При ортогональной анизотропии уравнения связи (17), как и в случае изотропной среды, могут быть записаны через разности нормальных напряжений. Для этого решим систему (17) совместно с дополнительным соотношением $(s_{11}-s_{22})+(s_{22}-s_{33})+(s_{33}-s_{11})=0$:

$$s_{11}-s_{22}=2\frac{s_i}{de_i}\frac{1}{xh_{12}}\left(\frac{de_{11}}{h_{31}}-\frac{de_{22}}{h_{23}}\right),$$

$$s_{22}-s_{33}=2\frac{s_i}{de_i}\frac{1}{xh_{23}}\left(\frac{de_{22}}{h_{12}}-\frac{de_{33}}{h_{31}}\right),$$

$$s_{33}-s_{11}=2\frac{s_i}{de_i}\frac{1}{xh_{31}}\left(\frac{de_{33}}{h_{23}}-\frac{de_{11}}{h_{12}}\right), \quad (19)$$

$$s_{12}=\frac{1}{2}\frac{s_i}{de_i}\frac{de_{12}}{\frac{5}{2}-h_{12}},\ s_{23}=\frac{1}{2}\frac{s_i}{de_i}\frac{de_{23}}{\frac{5}{2}-h_{23}},$$

$$s_{31}=\frac{1}{2}\frac{s_i}{de_i}\frac{de_{31}}{\frac{5}{2}-h_{31}},\ x=\frac{1}{h_{12}}+\frac{1}{h_{23}}+\frac{1}{h_{31}}.$$

После подстановки полученных зависимостей (19) в выражение для интенсивности напряжений (10) определим величину приращения интенсивности деформаций de_i:

$$de_i=\sqrt{2}\left\{\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{h_{12}}\left(\frac{de_{11}}{h_{31}}-\frac{de_{22}}{h_{23}}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{h_{23}}\left(\frac{de_{22}}{h_{12}}-\frac{de_{33}}{h_{31}}\right)^2+\frac{1}{h_{31}}\left(\frac{de_{33}}{h_{23}}-\frac{de_{11}}{h_{12}}\right)^2\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{4}\left[\frac{\left(de_{12}\right)^2}{\frac{5}{2}-h_{12}}+\frac{\left(de_{23}\right)^2}{\frac{5}{2}-h_{23}}+\frac{\left(de_{31}\right)^2}{\frac{5}{2}-h_{31}}\right]\right\}^{1/2}. \quad (20)$$

При $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=1/5$ или $h_{12}=h_{23}=h_{31}=1$ из (20) получим классическое выражение для приращения интенсивности деформаций изотропной среды [10]:

$$de_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(de_{11}-de_{22}\right)^2+\left(de_{22}-de_{33}\right)^2+\left(de_{33}-de_{11}\right)^2+\frac{3}{2}\left[\left(de_{12}\right)^2+\left(de_{23}\right)^2+\left(de_{31}\right)^2\right]}. \quad (21)$$

При простом нагружении, когда отношение компонентов напряжений в процессе деформирования не изменяется, между приращениями деформации наблюдается линейная зависимость типа

$de_{11}=A\cdot de_{22}$,

где A – постоянная величина.

Она будет иметь место и при конечных деформациях, если компоненты K_{ijkl} сохраняют свое значение. Тогда в формулах (13)-(21) приращение деформации de_{ij} можно заменить деформациями e_{ij}, а вместо dl использовать l.

Выводы

1. Получена запись энергетического условия пластичности ортотропного тела, учитывающая в явном виде кристаллографическую природу анизотропии свойств через ориентационные факторы текстуры и константы кристаллической решётки металлов.

2. Полученные соотношения позволяют провести анализ влияния на процесс формообразования любой кристаллографической ориентировки {*hkl*}<*uvw*> и их совокупности, а также оценить степень предельного формообразования и другие параметры деформирования высокотекстурированных заготовок.

Библиографический список

1. Гречников, Ф. В. Деформирование анизотропных материалов (резервы интенсификации) [Текст] / Ф. В. Гречников. – М.: Машиностроение, 1998. – 448 с.

2. Гречников, Ф. В. Проектирование технологических режимов прокатки листов и лент для вытяжки изделий с минимальным фестонообразованием [Текст] / Ф. В. Гречников, Е. В. Арышенский, Я. А. Ерисов // Вестн. Самар. гос. аэрокосм. ун-та. – Самара, 2011. – №2(26).

3. Mises, R. Mechanik der plastischen Formanderung von Kristallen [Текст] / R. Mises // ZAMM. – 1928. – №8-3. – P. 161-185.

4. Смирнов, В. С. Текстурообразование металлов при прокатке [Текст] / В. С. Смирнов, В. Д. Дурнев. – М.: Металлургия, 1971. – 256 с.

5. Микляев, П. Г. Деформация и разрушение металлов с учетом анизотропии их механических свойств [Текст] / П. Г. Микляев, Я. Б. Фридманн // Прочность и деформация материалов в нерав-

номерных физических полях: сб. МИФИ. – М.: Атомиздат, 1968. – №11.

6. Арышенский, Ю. М. Теория и расчеты пластического формоизменения анизотропных материалов [Текст] / Ю. М. Арышенский, Ф. В. Гречников. – М.: Металлургия, 1990. – 304 с.

7. Адамеску, Р. А. Анизотропия физических свойств металлов [Текст] / Р. А. Адамеску, П. В. Гельд, Е. А. Митюшин. – М: Металлургия, 1985. – 136 с.

8. Спенсер, Э. Теория инвариантов [Текст] / Э. Спенсер. – М.: Мир, 1974. – 156 с.

9. Арышенский, Ю. М. Теория листовой штамповки анизотропных материалов [Текст] / Ю. М. Арышенский. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1973. – 112 с.

10. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности [Текст] / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

11. Соколовский, В. В. Теория пластичности [Текст] / В. В. Соколовский. – М.: Высш. школа, 1969. – 608 с.

DEVELOPMENT OF YIELD CRITERIA FOR THE CALCULATION OF FORMING HIGH-TEXTURED ANISOTROPIC BLANKS

© 2012 F. V. Grechnikov, Ya. A. Yerisov

Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolev
(National Research University)

In this article we propose the yield criteria for the calculation of forming high-textured anisotropic blanks, which was developed on the basis of Mises plasticity criterion with regard to the orientation factors and lattice constants.

Yield criteria, anisotropy, orientation factors, material tensor, associated flow rule, effective stress and strain, stress-strain equation.

Информация об авторах

Гречников Федор Васильевич, член-корреспондент РАН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой обработки металлов давлением, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: gretch@ssau.ru. Область научных интересов: деформирование анизотропных материалов.

Ерисов Ярослав Александрович, инженер кафедры обработки металлов давлением, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: yaroslav.erisov@mail.ru. Область научных интересов: исследование механизмов формирования кристаллографических ориентировок при прокатке.

Grechnikov Fyodor Vasilievich, corresponding member of RAS, doctor of engineering, professor, head of the metal forming department, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolev (National Research University). E-mail: gretch@ssau.ru. Area of research: anisotropic materials deforming.

Yerisov Yaroslav Alexandrovich, postgraduate student, engineer of the metal forming department, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolev (National Research University). E-mail: yaroslav.erisov@mail.ru. Area of research: mechanisms of crystallographic orientation formation during sheet rolling.