УДК 539.3

РЕШЕНИЕ НЕСВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ С ЗАДАННЫМИ НА ГРАНИЦЕ ТЕЛА ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ И ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ

© 2012 И.С. Макарова

Самарский государственный университет путей сообщения

Предложен метод решения несвязанной задачи термоупругости с граничными условиями первого рода. Найдено аналитическое решение поставленной задачи для однородного изотропного тела произвольной формы, ограниченного кусочно-гладкой поверхностью.

Краевая задача термоупругости, граничные условия первого рода, задача теплопроводности, задача Неймана, преобразование Фурье.

Повышение прочности и надёжности узлов и конструкций летательных аппаратов предполагает необходимость диагностики теплового и термонапряжённого состояния элементов, работающих в условиях нестационарного нагрева, что требует предварительных исследований как экспериментального, так и теоретического характера. Моделирование процессов деформирования тел, находящихся в условиях нагрева, может быть основано на численном и аналитическом решении краевых задач термоупругости.

Ограничимся случаем квазистатической несвязанной задачи термоупругости, представляющей наибольший интерес с точки зрения экспериментальных исследований машин и конструкций. Рассмотрим линейно-упругое, однородное, механически и термически изотропное тело произвольной формы объёма V, ограниченное поверхностью S. На поверхности S известны вектор термоупругих перемещений $u_i(\bar{r}, t)$ и тепловой поток. Требуется в односвязной области V найти решение нестационарной квазистатической задачи термоупругости:

$$\sigma_{ij,j}(\bar{r}, t) + F_i(\bar{r}, t) = 0, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij}(\bar{r}, t) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}(\bar{r}, t) + u_{j,i}(\bar{r}, t)\right), \tag{2}$$

$$\sigma_{ij}(\bar{r}, t) = E_{ijpq}\varepsilon_{pq}(\bar{r}, t) - c_{ij}\,\Theta(\bar{r}, t), \tag{3}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{\chi}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Theta(\bar{r}, t) = -\frac{1}{\chi}Q(\bar{r}, t), \tag{4}$$

$$u_i(\bar{r}, t)\Big|_{\bar{r}\in S} = u_i^S(\bar{r}, t),$$

$$\Theta(\bar{r}, 0) = \Theta_0(\bar{r}),$$

$$\frac{\partial\Theta(\bar{r}, t)}{\partial\bar{n}}\bigg|_{\bar{r}\in S} = \psi^S(\bar{r}, t).$$

Здесь $\sigma_{ij}(\bar{r}, t)$, $\varepsilon_{ij}(\bar{r}, t)$ – компоненты тензоров напряжения и деформации; $F_i(\bar{r}, t)$ – составляющие массовой силы; $u_i^S(\bar{r}, t)$ – значения компонентов вектора перемещений на поверхности тела S; E_{ijpq} – компоненты тензора упругих постоянных; c_{ij} – компоненты тензора термоупругих постоянных; Δ – оператор Лапласа; $\bar{r} = \bar{r}(x_1, x_2, x_3)$; $\Theta = T - T_0$ – малое приращение температуры (T_0 и T – начальная и текущая температура тела); $\chi = \dfrac{K}{\delta}$ – коэффициент температуропроводности, K – коэффициент теплопроводности, δ – удельная теплоёмкость единицы объёма; $Q(\bar{r}, t) = \dfrac{q(\bar{r}, t)}{\delta}$, $q(\bar{r}, t)$ – количество тепла, производимое в единице объёма за единицу времени; $\psi^S(\bar r,t)=-\dfrac{1}{K}q_s(\bar r,t)$, $q_s(\bar r,t)$ – плотность теплового потока через поверхность тела. Соотношение (1) является уравнением равновесия тела под действием массовых сил, соотношение (2) представляет собой формулы Коши, соотношение (3) – закон Дюамеля-Неймана, (4) – уравнение теплопроводности.

Рассматриваемая краевая задача несвязанной термоупругости распадается на начально-краевую задачу теплопроводности с заданным на границе тепловым потоком (задача Неймана):

$$\left(\Delta-\frac{1}{\chi}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Theta(\bar r,t)=-\frac{1}{\chi}Q(\bar r,t),$$
$$\Theta(\bar r,0)=\Theta_0(\bar r), \qquad (5)$$

$$\left.\frac{\partial\Theta(\bar r,t)}{\partial n}\right|_{\bar r\in S}=\psi^S(\bar r,t)$$

и краевую задачу линейной теории упругости

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij,j}(\bar r,t)+F_i(\bar r,t)=0,\\
&\varepsilon_{ij}(\bar r,t)=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}(\bar r,t)+u_{j,i}(\bar r,t)\right),\\
&\sigma_{ij}(\bar r,t)=E_{ijpq}\varepsilon_{pq}(\bar r,t)-c_{ij}\,\Theta(\bar r,t),\\
&\left.u_i(\bar r,t)\right|_{\bar r\in S}=u_i^S(\bar r,t).
\end{aligned} \qquad (6)$$

Решение начально-краевой задачи (5) получено методом опорных функций и имеет вид [1, 2]:

$$\Theta(\bar r,t)=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}\left[\int_{R^3}\frac{\hat F^*(\bar k,p)+\varphi^S(\bar k,p)}{\hat F^*_{on}(\bar k,p)+\varphi^S_{on}(\bar k,p)}\times\right. \qquad (7)$$
$$\left.\times\hat\Theta^*_{on}(\bar k,p)\,e^{i\bar k\cdot\bar r}\right]d\bar k\,dp$$

Здесь символом ^ (крышка) обозначены изображения функций, полученные в результате преобразования Лапласа, символом * обозначены Фурье-образы соответствующих величин, p – параметр преобразования Лапласа, индекс *on* относится к опорной функции задачи,

$$\hat F(\bar r,p)=\Theta_0(\bar r)+\hat Q(\bar r,p), \qquad (8)$$

$$\hat F_{on}(\bar r,p)=\Theta^0_{on}(\bar r)+\hat\Phi(\bar r,p), \qquad (9)$$

$$\varphi^S(\bar k,p)=\chi\int_S\hat\psi^S(\bar r,p)\,e^{-i\bar k\cdot\bar r}\,dS(\bar r), \qquad (10)$$

$$\varphi^S_{on}(\bar k,p)=\chi\int_S\hat\psi^S_{on}(\bar r,p)\,e^{-i\bar k\cdot\bar r}\,dS(\bar r), \qquad (11)$$

$$\begin{aligned}
&\hat\Theta^*_{on}(\bar k,p)=\hat F^*_{on}(\bar k,p)\,\hat G^*(\bar k,p)+\\
&+\hat G^*(\bar k,p)\,\chi\int_S\hat\psi^S_{on}(\bar r,p)e^{-i\bar k\cdot\bar r}dS(\bar r)
\end{aligned}, \qquad (12)$$

функция $\Phi(\bar r,t)$ есть результат действия оператора $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-\chi\cdot\Delta\right)$ на опорную функцию, $\hat G^*(\bar k,p)$ – Фурье-образ трансформанты Лапласа функции Грина исходной начально-краевой задачи (5).

Краевая задача (6) с помощью тензора Кельвина – Сомильяны $K_{ip}(\bar r,\bar\xi)$ сводится к однородной краевой задаче в перемещениях [3]:

$$\begin{aligned}
&L_{ip}u''_p(\bar r,t)=0,\\
&\left.u''_i(\bar r,t)\right|_{\bar r\in S}=u_i^S(\bar r,t)-\left.u'_i(\bar r,t)\right|_{\bar r\in S}.
\end{aligned} \qquad (13)$$

Здесь $L_{ip}=\dfrac{1}{2}\left(E_{ijpq}+E_{ijqp}\right)\dfrac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_q}$ – компоненты оператора Ламе,

$$u''_i(\bar r,t)=u_i(\bar r,t)-u'_i(\bar r,t), \qquad (14)$$

$$u'_i(\bar r,t)=-\int_{R^3}K_{ip}(\bar r,\bar\xi)\,\Phi_p(\bar\xi,t)\,d\bar\xi, \qquad (15)$$

$$\Phi_i(\bar r,t)=c_{ij}\Theta_{,j}(\bar r,t)+F_i(\bar r,t) \qquad (16)$$

– компоненты вектора обобщённых массовых сил.

Будем искать решение краевой задачи (13) в виде:

$$u_i''(\bar{r},t) = -\int\limits_{V'} K_{ip}(\bar{r}-\bar{\xi})\,\Phi_p'(\bar{\xi},t)\,d\bar{\xi}\,. \qquad (17)$$

Здесь $\Phi_p'(\bar{\xi},t)$ – компоненты вектора массовых сил, распределённых по объёму $V' = R^3 - V$.

Подберём функцию $\Phi_p'(\bar{\xi},t)$ таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия краевой задачи (13). Для этого положим в уравнении (17) $\bar{r} \in S$:

$$u_i''(\bar{r}_S,t) = -\int\limits_{V'} K_{ip}(\bar{r}_S-\bar{\xi})\,\Phi_p'(\bar{\xi},t)\,d\bar{\xi}\,. \qquad (18)$$

Последнее соотношение запишем в матрично-векторной форме:

$$\mathbf{u}''(\bar{r}_S,t) = -\int\limits_{V'} \mathbf{K}(\bar{r}_S-\bar{\xi}) \bullet \mathbf{\Phi}'(\bar{\xi},t)\,d\bar{\xi}\,.$$

Свёртка $\mathbf{K} \bullet \mathbf{\Phi}'$ в декартовой системе определяется как умножение матрицы $\mathbf{K}$ на вектор-столбец $\mathbf{\Phi}'$. С учётом граничных условий исходной краевой задачи последнее соотношение можно записать в виде:

$$\mathbf{u}^S(\bar{r}_S,t) - \mathbf{u}'(\bar{r}_S,t) = -\int\limits_{V'} \mathbf{K}(\bar{r}_S-\bar{\xi}) \bullet \mathbf{\Phi}'(\bar{\xi},t)d\bar{\xi}\,. \qquad (19)$$

Умножим обе части равенства (19) скалярно на величину $\mathbf{n}_l(\bar{r})\,e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}$ и проинтегрируем по поверхности тела S (здесь $\mathbf{n}_l(\bar{r})$ является l-ой компонентой вектора нормали к поверхности тела):

$$\int\limits_S \left[\mathbf{u}^S(\bar{r}_S,t) - \mathbf{u}'(\bar{r}_S,t)\right]\mathbf{n}_l(\bar{r})\,e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}\,dS(\bar{r}) =$$
$$= -\int\limits_S \left[\int\limits_{V'} \mathbf{K}(\bar{r}_S-\bar{\xi}) \bullet \mathbf{\Phi}'(\bar{\xi},t)\,d\bar{\xi}\right]\times \qquad (20)$$
$$\times\,\mathbf{n}_l(\bar{r})\,e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}\,dS(\bar{r}).$$

Введём обозначение для левой части соотношения (20):

$$u_l^*(\bar{k},t) = \int\limits_S \left[\mathbf{u}^S(\bar{r}_S,t) - \mathbf{u}'(\bar{r}_S,t)\right]\times$$
$$\times\,\mathbf{n}_l(\bar{r})\,e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}\,dS(\bar{r}). \qquad (21)$$

Тогда соотношение (20) можно записать в виде:

$$u_l^*(\bar{k},t) = -\int\limits_S \left[\int\limits_{V'} \mathbf{K}(\bar{r}_S-\bar{\xi}) \bullet \mathbf{\Phi}'(\bar{\xi},t)\,d\bar{\xi}\right]\times$$
$$\times\,\mathbf{n}_l(\bar{r})\,e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}\,dS(\bar{r}). \qquad (22)$$

Используя теорему Гаусса – Остроградского, переходим в правой части равенства (22) от интеграла по поверхности к интегралу по объёму:

$$u_l^*(\bar{k},t) = -\int\limits_V \mathrm{div}_l\left[e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}\int\limits_{V'} \mathbf{K}(\bar{r}-\bar{\xi}) \bullet \mathbf{\Phi}'(\bar{\xi},t)\,d\bar{\xi}\right]d\bar{r}.$$

Выполняя дифференцирование в правой части последнего соотношения и переходя к компонентной форме, получим:

$$u_l^*(\bar{k},t) = -\int\limits_V\int\limits_{V'} \left[K_{lj,l}(\bar{r}-\bar{\xi}) - ik_l K_{lj}(\bar{r}-\bar{\xi})\right]\times$$
$$\times\,e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}\,\Phi_j'(\bar{\xi},t)\;d\bar{\xi}\;d\bar{r}. \qquad (23)$$

Производя замену переменных $\bar{w} = \bar{r} - \bar{\xi}$, $\bar{r} = \bar{w} + \bar{\xi}$ и применяя теорему о свёртке по конечной области, окончательно находим:

$$u_l^*(\bar{k},t) = \left[ik_l K_{lj}^*(\bar{k}) - K_{lj,l}^*(\bar{k})\right]\cdot\Phi_j^*(\bar{k},t)\,. \qquad (24)$$

Здесь

$$K_{lj}^*(\bar{k}) = \int\limits_W K_{lj}(\bar{w})\cdot e^{-i\bar{k}\cdot\bar{w}}d\bar{w},$$
$$K_{lj,l}^*(\bar{k}) = \int\limits_W \frac{\partial K_{lj}(\bar{w})}{\partial w_l}\cdot e^{-i\bar{k}\cdot\bar{w}}d\bar{w}, \qquad (25)$$
$$\Phi_j'^*(\bar{k},t) = \int\limits_W \Phi_j'(\bar{\xi},t)\cdot e^{-i\bar{k}\cdot\bar{\xi}}d\bar{\xi},$$

объём W определяется объёмами V, V' и равенством $\bar{w} = \bar{r} - \bar{\xi}$.

Из соотношений (24) определяем неизвестные компоненты Фурье-образа обобщённых массовых сил $\Phi_j'^*(\bar{k},t)$:

$$\Phi_j'^*(\bar{k},t) = R_{jl}(\bar{k})\, u_l^*(\bar{k},t)\,. \qquad (26)$$

Здесь $R_{jl}(\bar{k})$ – матрица, обратная матрице $\left[ik_l K_{lj}^*(\bar{k}) - K_{lj,l}^*(\bar{k})\right]$, то есть удовлетворяющая уравнению:

$$R_{jl}\cdot\left[ik_l K_{lm}^*(\bar{k}) - K_{lm,l}^*(\bar{k})\right] = \delta_{jm}\,.$$

Применяя к соотношению (26) обратное преобразование Фурье, получим выражение для компонент вектора массовых сил:

$$\Phi_j'(\bar{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{R^3} R_{jl}(\bar{k}) u_l^*(\bar{k},t) e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}}\, d\bar{k}. \qquad (27)$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (18), находим:

$$u_i''(\bar{r},t) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{V'}\int\limits_{R^3} K_{ip}(\bar{r}-\bar{\xi}) R_{pl}(\bar{k}) \times \\ \times u_l^*(\bar{k},t)\, e^{i\bar{k}\cdot\bar{\xi}}\, d\bar{k}\, d\bar{\xi}. \qquad (28)$$

Окончательно, соотношение для нахождения решения краевой задачи (6) при заданных начальных и граничных условиях записывается в виде:

$$u_i(\bar{r},t) = -\int\limits_{R^3} K_{ip}(\bar{r}-\bar{\xi})\, \Phi_p(\bar{\xi},t)\, d\bar{\xi} - \\ -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{V'}\int\limits_{R^3} K_{ip}(\bar{r}-\bar{\xi}) R_{pl}(\bar{k}) \times \qquad (29) \\ \times u_l^*(\bar{k},t)\, e^{i\bar{k}\cdot\bar{\xi}}\, d\bar{k}\, d\bar{\xi}$$

или, учитывая выражение для обобщённых массовых сил (16):

$$u_i(\bar{r},t) = -\int\limits_{R^3} K_{ip}(\bar{r},\bar{\xi})\left(c_{pj}\Theta_{,j}(\bar{\xi},t) + F_p(\bar{\xi},t)\right) d\bar{\xi} - \\ -\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{V'}\int\limits_{R^3} K_{ip}(\bar{r}_S-\bar{\xi}) R_{pq}(\bar{k}) \times \qquad (30) \\ \times u_l^*(\bar{k},t)\, e^{i\bar{k}\cdot\bar{\xi}}\, d\bar{k}\, d\bar{\xi}.$$

Таким образом, с учётом соотношений (7) – (12) получено аналитическое решение несвязанной задачи термоупругости с граничными условиями первого рода в условиях, когда на границе тела задан вектор перемещений и тепловой поток.

Библиографический список

1. Глущенков, В.С. Решение начально-краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения теплопроводности методом опорных функций [Текст] / В.С. Глущенков, Г.Ю. Ермоленко, И.С. Макарова // Вестник Самарского государственного университета путей сообщения. – 2010. Вып.3(9). – №3. – С. 120-123.

2. Глущенков, В.С. Решение краевой задачи Неймана для уравнения теплопроводности [Текст] / В.С. Глущенков, Г.Ю. Ермоленко, И.С. Макарова // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2011. –Вып. 13. – С.89-93.

3. Колтунов, М.А. Прикладная механика деформируемого твердого тела [Текст] / М.А. Колтунов, А.С. Кравчук, В.П. Майборода. – М.: Высшая школа, 1983. - 349 с.

THE SOLUTION OF AN UNCOUPLED THERMOELASTIC PROBLEM WITH A DISPLACEMENT VECTOR AND A HEAT FLOW DEFINED ON A BODY BOUNDARY

© 2012 I. S. Makarova

Samara State University of Transport

In this paper the method of the solution of an uncoupled thermo elastic problem with boundary conditions of the first kind is offered. The analytical decision for homogeneous isotropic arbitrary form body limited to a piecewise smooth surface is found.

Boundary thermoelastic problem, boundary conditions of the first kind, heat conduction problem, Neumann boundary condition, Fourier transform.

Информация об авторе

Макарова Ирина Сергеевна, кандидат физико – математических наук, доцент, доцент кафедры информатики, Самарский государственный университет путей сообщения. E-mail: makarova_is@mail.ru. Область научных интересов: моделирование поведения конструкций в условиях нестационарного нагрева, макроскопическое поведение композиционных материалов.

Makarova Irina Sergeevna, Department "Information Science", PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor, Samara State University of Transport. E-mail: makarova_is@mail.ru. Area of research: modeling of solid behavior in the conditions of non-stationary heating, macroscopic behavior of composite materials.