УДК 519.6:311

ОБЩИЙ ПОДХОД К ИДЕНТИФИКАЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ АВТОРЕГРЕССИИ

© 2004 В. К. Семёнычев

Самарский государственный аэрокосмический университет

Предложен общий подход к идентификации моделей экономической динамики, содержащих экспоненциальные и гармонические компоненты, на основе авторегрессии отсчетов экономических показателей.

1. Введение. Одной из основных задач экономической динамики является идентификация неслучайных компонент (трендов, сезонных или циклических компонент) временных рядов экономических показателей и, тем самым, динамических свойств порождающих их экономических систем [1 - 4].

В отсчетах $Y\kappa$ ($Y\kappa = Y(T\kappa)$, $T\kappa = \kappa\Delta$ - моменты получения с периодом Δ отсчетов, ($\kappa = 0, 1, 2,\ldots, N$) анализируемых временных рядов вместе с неслучайными компонентами неизбежно присутствует эволюционный стохастический компонент $\xi\kappa$, общим предположением о котором является нормальность закона его распределения No, нулевое математическое ожидание, постоянство дисперсии, некоррелированность отсчетов [5, 6]:

$$\xi\kappa = No\ (0, \sigma),\ D[\xi\kappa] = \sigma^2,\ M[\xi\kappa\xi\kappa + 1] = 0, \qquad (1)$$

где M - оператор математического ожидания, D - оператор дисперсии, σ - среднеквадратическое отклонение $\xi\kappa$, N - объем выборки временного ряда.

Идентификация обычно осуществляется с использованием метода наименьших квадратов, который прост и дает несмещенные, эффективные и состоятельные оценки параметров для моделей неслучайных компонент, линейных по отношению к идентифицируемым параметрам (например, для алгебраических полиномов), и при аддитивной помехе $\xi\kappa$ [1 - 6]. Идентификация моделей, нелинейных по отношению к параметрам (экспоненциальных, гармонических, гиперболических и других), существенно сложнее и производится известными методами со значительными погрешностями или даже принципиально невозможна.

Например, при широко распространенном в практике экономических исследований случае моделирования временного ряда экспонентой

$$Y\kappa = A_1\ exp(-\alpha_1 T\kappa) \qquad (2)$$

обычно рекомендуют для сведения задачи к линейной применять операцию логарифмирования, что оправдано для разделения тренда и помехи лишь при мультипликативной помехе (подобная структура временного ряда является зачастую лишь удобным предположением), а принципиально возможно лишь при положительных значениях $Y\kappa$ и $\xi\kappa$.

Помеха при предположении (1) центрирована и, в силу этого, знакопеременна. Более того, нелинейное логарифмическое преобразование отсчетов $\xi\kappa$ нарушает предположение (1), и среднеквадратические оценки параметров A_1 и α_1 модели (2) окажутся в результате этого смещенными и неэффективными [3 - 5]. Указанные обстоятельства зачастую не принимают в расчет.

Появление слагаемого A_0 в модели (2) для обобщенной экспоненциальной функции

$$Y\kappa = A_0 + A_1 exp(-\alpha_1 T\kappa) \qquad (3)$$

при аддитивной или мультипликативной помехе делает принципиально нецелесообразным непосредственное логарифмирование отсчетов для идентификации параметров. Переход же к первым разностям отсчетов и последующее логарифмирование не устраняет недостатки, указанные для (2).

Известные способы оценки параметров гармоники (не сводимой каким-либо преобразованием к линейной по параметрам модели), обычно описывающей сезонные и циклические компоненты

$$Y\kappa = A_1 Cos(\omega T\kappa + \phi), \qquad (4)$$

сложны, предполагают анализ десятков и сотен отсчетов на длительности более одного периода гармоники [5, 6].

Еще сложнее осуществляется идентификация известными методами сочетаний полиномиальных, экспоненциальных, гиперболических и тригонометрических функций при аддитивной помехе $\xi\kappa$ [3 - 5].

Предлагаемый общий подход на основе моделей авторегрессии и показанные приемы при его реализации обеспечивают получение оптимальных (несмещенных, эффективных, состоятельных) среднеквадратических оценок параметров ряда важных для практики моделей неслучайных компонент при малых объемах используемой выборки и аддитивной помехе $\xi\kappa$.

2. Демонстрация подхода на экспоненциальной модели. Для выражения (2) выполним Z-преобразование (его называют также преобразованием Лорана) [6, 7]

$$Y(Z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} A_0\, exp(-\alpha_1 \Delta\kappa)\, Z^{\kappa} = \frac{A_0}{1 - \lambda_1 Z^{-1}},$$

которое будет представлено в области изображений соотношением

$$Y(Z) - \lambda_1 Z^{-1} Y(Z) = A_0, \qquad (5)$$

где $\lambda_1 = exp(-\alpha_1\Delta)$, $Z = exp(p)$, p - комплексная переменная.

Вернувшись в область оригиналов, будем иметь

$Y\kappa = \lambda_1 Y\kappa - 1 + A_0 \delta\kappa$, где

$$Y\kappa = 0, \text{при } \kappa < 0, \delta\kappa = \begin{cases} 1, \kappa = 0 \text{ - дискретный аналог дельта - функции} \\ 0, \kappa \neq 0. \end{cases}$$

При $k \geq 1$ и аддитивной помехе $\xi\kappa$ для (2) будет справедлива модель авторегрессии первого порядка

$$Y\kappa = \lambda_1 Y\kappa - 1 + \xi\kappa. \qquad (6)$$

Видим, что из (6) по любым двум отсчетам $Y\kappa$ и $Y\kappa - 1$ (т. е. на участке в 10÷15% от длительности переходного процесса модели (2), оцениваемого обычно $\approx 3 \leq \alpha_1$) можно определить параметр λ_1, а затем и α_1 по формуле

$$\alpha_1 = - 1/\Delta\, Ln\lambda_1. \qquad (7)$$

При наличии более двух отсчетов можно оценить параметр λ_1 по методу наименьших квадратов, реализуя необходимое условие экстремума:

$$\lambda^{\circ}_1 = \underset{\lambda_1}{arg\ min} \sum_{\kappa=1}^{N} \{ Y\kappa - \lambda_1 Y\kappa - 1\}^2,$$

которое приводит к следующему действию над отсчетами

$$\lambda^{\circ}_1 = \sum_{\kappa=1}^{N} \{ Y\kappa Y\kappa - 1\} \{\sum_{\kappa=1}^{N} \{ Y^{\,2}\kappa - 1\}\}^{-1} \qquad (8)$$

Можно утверждать, что полученные оценки λ°_1 (и α°_1) при выполнении предположения (1) являются оптимальными, т. к. использованное для их определения соотношение (6) является линейным по отношению к отсчетам $Y\kappa$, $Y\kappa$-1 и $\xi\kappa$.

Параметр A_1 можно также оценить оптимально в среднеквадратическом смысле, обеспечив выполнение на линейной по отношению к отсчетам $Y\kappa$ выборке условие

$$A^{\circ}_1 = \underset{A_1}{\arg\min} \sum_{\kappa=0}^{N} \{ Y\kappa - (\lambda^{\circ}_1)^{K} A_1\}^2,$$

которое ведет к следующей операции над $N + 1$ отсчетами (при рассчитанном ранее значении λ°_1):

$$A^{\circ}_1 = \sum_{\kappa=0}^{N} Y\kappa\, (\lambda^{\circ}_1)^{K} \{\sum_{\kappa=0}^{N} (\lambda^{\circ}_1)^{2K}\}^{-1}.$$

Значения α°_1 и A°_1 можно использовать для расчета помехозащищенных «состоявшихся» или, что очень важно, «будущих» прогнозных значений $Y°\kappa$ при тех или иных значениях «k», подставляя их в модель (2).

Далее, ввиду очевидности перехода от необходимых условий экстремума к линейным алгебраическим уравнениям относительно идентифицируемых параметров («нормальным» уравнениям и системам уравнений) приводить получаемые при этом уравнения не будем.

3. Идентификация обобщенной экспоненциальной функции. Аналогично можно получить и для модели (3) (при k ≥ 2 и аддитивной помехе) модель авторегрессии второго порядка, записанную в первых разностях отсчетов:

$$\Delta Y\kappa = \lambda_1 \Delta Y\kappa - 1 + \xi\kappa, \qquad (9)$$

где $\Delta Y\kappa = Y\kappa - Y\kappa{-}1$, $\Delta Y\kappa - 1 = Y\kappa{-}1 - Y\kappa{-}2$, параметр λ_1 определен в (5).

Можно рассчитать параметры модели (3) из условий

$$\lambda°_1 = \underset{\lambda_1}{arg\ min} \sum_{\kappa=1}^{N} \{\Delta Y\kappa - \lambda_1 \Delta Y\kappa{-}1\}^2, \qquad (10)$$

$$A°_0,\ A_1° = \underset{A_0, A_1}{arg\ min} \sum_{\kappa=0}^{N} \{ Y\kappa - A_0 - (\lambda°_1)^K A_1\}^2. \qquad (11)$$

Условие (10) приводит к соотношению (8), но в первых разностях отсчетов, а (11) – к соответствующей системе двух линейных алгебраических уравнений (СЛАУ второго порядка) относительно $A°_0$ и $A°_1$. Минимально необходимое число отсчетов для идентификации модели (3) равно трем.

4. Идентификация гармонической компоненты. Для модели (4) при k ≥ 2, $\nu_1 = 2Cos\omega\Delta$ и аддитивной помехе будет справедлива авторегрессия

$$Y\kappa = \nu_1 Y\kappa{-}1 - Y\kappa{-}2 + \xi\kappa. \qquad (12)$$

Значение ν_1 можно определить из (12) через любые три отсчета: $Y\kappa$, $Y\kappa{-}1$ и $Y\kappa{-}2$, расположенных на доле периода гармоники: например, через три месячных отсчета на годовом сезонном цикле. При большем объеме используемой выборки можно осуществить среднеквадратическое приближение

$$\nu°_1 = \underset{\nu_1}{arg\ min} \sum_{\kappa=2}^{N} \{ Y\kappa - \nu_1 Y\kappa{-}1 + Y\kappa{-}2\}^2\ . \qquad (13)$$

Тогда помехоустойчивая оценка частоты из (12) и (13) будет равна

$$\omega° = 1/\Delta\ Arccos(\nu°_1 / 2),$$

а оценки амплитуды и фазы определяются условием

$$A°_2, A°_3 = \underset{A_2, A_3}{arg\ min} \sum_{\kappa=0}^{N} \{ Y\kappa - A_2 Cos\omega°\kappa\Delta + $$
$$+ A_3 Sin\omega°\kappa\Delta\}^2$$

и соотношениями

$$A°_1 = (A°_2{}^2 + A°_3{}^2)^{1/2},$$

$$\phi = Arctg(A°_3/A°_2),$$

в которых введение новых параметров $A_2 = A_1 Cos\phi$ и $A_3 = A_1 Sin\phi$ демонстрирует прием определения ϕ.

5. Идентификация многокомпонентных моделей временных рядов.

5.1. К ним относится, например, сумма линейного тренда и гармоники (аддитивной сезонной или циклической компоненты) [1 - 3]:

$$Y\kappa = A_1 T\kappa + A_2 + A_3 Cos(\omega T\kappa + \phi), \qquad (14)$$

которой будет соответствовать при k ≥ 4 и аддитивной помехе следующая модель авторегрессии:

$$Y\kappa = (Y\kappa{-}1 + Y\kappa{-}3 - 2Y\kappa{-}2)\mu +$$
$$+ 2Y\kappa{-}2 - Y\kappa{-}4 + \xi\kappa, \qquad (15)$$

где $\mu = 2(Cos\omega\Delta + 1)$.

Очевидны среднеквадратическая оценка из (15)

$$\mu° = \underset{\mu}{arg\ min} \sum_{\kappa=4}^{N} \{ Y\kappa - \mu(Y\kappa{-}1 + Y\kappa{-}3 - 2Y\kappa{-}2) -$$
$$- 2Y\kappa{-}2 + Y\kappa{-}4\}^2$$

и последующий расчет через μ° частоты

$\omega^\circ=1/\ \Delta ArcCos(\mu^\circ/2 - 1)$.

Оставшиеся параметры модели (14) определят условия

$$A^\circ_1,A^\circ_2,A^\circ_4,A^\circ_5=\underset{A_1,A_2,A_4,A_5}{\arg\min}\ \sum_{\kappa=0}^{N}\{Y\kappa - A_1\kappa\Delta - A_2 -$$

$$- A_4 Cos\omega^\circ\kappa\Delta + A_5 Sin\omega^\circ\kappa\Delta\}^2,$$

где A_1, A_2 - параметры модели (14), $A_4 = A_3 Cos\phi$ и $A_5 = A_3 Sin\phi$. После решения соответствующей СЛАУ четвертого порядка относительно A°_1, A°_2, A°_4, A°_5 вычислим

$$A^\circ_3 = (A^\circ{}_4^2 + A^\circ{}_5^2)^{1/2},$$

$$\phi^\circ = Arctg(A^\circ_5/A^\circ_4).$$

Заметим, что оценки параметров полинома и гармоники рассчитываются в предложенном подходе по одной и той же выборке, а не традиционным выделением тренда и последующей (после вычитания тренда из отсчетов ряда) идентификацией гармоники по «остатку».

5.2. Часто требуется идентифицировать линейный тренд с мультипликативной сезонной или циклической компонентой [1 - 3]

$$Y\kappa = (A_1 T\kappa + A_2)\ Cos(\omega T\kappa + \phi). \qquad (16)$$

Поставим в соответствие модели (16) авторегрессию отсчетов при $k \geq 4$ при аддитивной помехе

$$Y\kappa=\nu_1(Y\kappa-1 + Y\kappa-3) - \nu_2 Y\kappa-2 + Y\kappa-4 + \xi\kappa,$$
(17)

где $\nu_1 = 4Cos\omega\Delta$, $\nu_2 = 2 + \nu_1^2/4$.

Найдем из (16) и (17) помехозащищенные оценки параметров гармоники и линейного тренда:

$$\nu^\circ_1,\nu^\circ_2 = \underset{\nu_1,\nu_2}{arg\ min} \sum_{\kappa=4}^{N}\{ Y\kappa - \nu_1(Y\kappa-1 + Y\kappa-3) +$$

$$+\nu_2 Y\kappa-2 - Y\kappa-4\}^2,$$

$$\omega^\circ = (1/\Delta)Arc\ Cos(\nu^\circ_1/4),$$

$$\{A^\circ_j\}= \underset{A_j}{arg\ min} \sum_{\kappa=0}^{N}\{ Y\kappa - A_3\kappa\Delta Cos\omega^\circ\Delta\kappa -$$

$$-A_4 Cos\omega^\circ\Delta\kappa + A_5\kappa\Delta Sin\omega^\circ\Delta\kappa + A_6 Sin\omega^\circ\Delta\kappa\}^2,$$

где j = 3,4,5,6; $A_3 = A_1 Cos\phi$, $A_4 = A_2 Cos\phi$, $A_5 = A_1 Sin\phi$, $A_6 = A_2 Sin\phi$.

Тогда

$$A^\circ_1 = (A^\circ{}_3^2 + A^\circ_5)^{1/2},\ A^\circ_2 = (A^\circ{}_4^2 + A^\circ{}_6^2)^{1/2},$$
$$\phi^\circ = Arctg(A^\circ_6/A^\circ_4).$$

Параметры тренда A_1, A_2 и параметр ϕ мультипликативной компоненты определяет СЛАУ четвертого порядка, а частоту мультипликативной компоненты – СЛАУ второго порядка. Минимальное число отсчетов для идентификации модели (16) равно пяти.

5.3. Известно [1, 4, 8] моделирование экономических процессов выражением

$$Y\kappa=A_1 exp(\alpha_1 T\kappa) + \\ +A_2 exp(-\alpha_2 T\kappa)Cos(\omega T\kappa + \qquad (18)$$

которому при $k\geq 3$ и аддитивной помехе, как показано в [8], соответствует уравнение регрессии третьего порядка

$$Y\kappa = \lambda_1 Y\kappa\text{-}1 - \lambda_2 Y\kappa\text{-}2 + \lambda_3 Y\kappa\text{-}3 + \xi\kappa. \qquad (19)$$

Из (19) следуют среднеквадратические приближения (при числе отсчетов больше шести)

$$\lambda^\circ_1, \lambda^\circ_2, \lambda^\circ_3 = \underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{\arg\min}\ \sum_{\kappa=3}^{N}\{Y\kappa - \lambda_1 Y\kappa\text{-}1 +$$

$$+l_2 Y\kappa\text{-}2 - \lambda_3 Y\kappa\text{-}3\}^2,$$

где $\lambda_1 = 2\nu_3\nu_2 + \nu_1^2$, $\lambda_2 = \nu_2 + 2\nu_3\nu_2\nu_1^2$, $\lambda_3 = \nu_2\nu_1$, $\nu_1 = exp(\alpha_1\Delta)$, $\nu_2 = exp(-\alpha_2\Delta)$, $\nu_3 = Cos\omega\Delta$.

Решив соответствующую СЛАУ третьего порядка относительно λ°_1, λ°_2, λ°_3, вычислим последовательно ν°_1, $\nu^\circ_2 = (\lambda^\circ_3/\ \nu^\circ_1)$, $\nu^\circ_3 = (\lambda^\circ_2 - \nu^\circ_2)/\ (2\nu^\circ_1\nu^\circ_2)$.

Искомые динамические параметры модели (18) с учетом обозначений в (19) могут быть рассчитаны следующим образом:

$\alpha^\circ_1 = 1/\Delta Ln\nu^\circ_1$, $\alpha^\circ_2 = (-1/\Delta)Ln\nu^\circ_2$,
$\omega^\circ = (1/\Delta)ArcCos\nu^\circ_3$,

$$A^\circ_1, A^\circ_3, A^\circ_4 = \underset{A_1,A_3,A_4}{arg\ min} \sum_{\kappa=0}^{N}\{Y\kappa - A_1exp(\alpha^\circ_1\Delta\kappa) -$$

$$- A_3exp(-\alpha^\circ_2\Delta\kappa)Cos\omega^\circ\Delta\kappa +$$

$$+ A_4exp(-\alpha^\circ_2\Delta\kappa)Sin\omega^\circ\Delta\kappa\}^2,$$

где $A_3 = A_2Cos\phi$, $A_4 = A_2Sin\phi$,
$A^\circ_2 = (A^{\circ 2}_3 + A^{\circ 2}_4)^{1/2}$, $\phi^\circ = Arctg(A^\circ_4/A^\circ_3)$.

5.4. Известны [1, 4 - 6, 8] примеры моделирования экономической динамики рядами отсчетов

$$Y\kappa = A_1exp(-\alpha_1T\kappa) + A_2exp(-\alpha_2T\kappa), \qquad (20)$$

$$Y\kappa = exp(-\alpha_3T\kappa)(A_3T\kappa + A_4), \qquad (21)$$

которым адекватна при k ≥ 2 и аддитивной помехе авторегрессия второго порядка

$$Y\kappa = \lambda_1 Y\kappa\text{-}1 - \lambda_2 Y\kappa\text{-}2 + \xi\kappa,$$

где $\lambda_1 = exp(-\alpha_1\Delta) + exp(-\alpha_2\Delta)$ для модели (20) и $\lambda_1 = 2exp(-\alpha_3\Delta)$ для модели (21); $\lambda_2 = exp(-(\alpha_1 + \alpha_2)\Delta)$ для модели (20) и $\lambda_2 = exp(-2\alpha_3\Delta)/2$ для модели (21).

Условием отнесения анализируемого временного ряда к модели суммы двух экспонент будет следующая система неравенств: $0 < \lambda_1 < 2$, $0 < \lambda_2 < 0{,}25\lambda_1^2$. Условиями принятия модели произведения экспоненты на линейную форму аргумента являются соотношения: $0 < \lambda_1 < 2$, $\lambda_2 = 0{,}25\lambda_1^2$. При $N \geq 4$ можно получить помехозащищенные оценки параметров

$$\lambda^\circ_1, \lambda^\circ_2 = \underset{\lambda_1,\lambda_2}{arg\ min} \sum_{\kappa=2}^{N}\{Y\kappa - \lambda_1 Y\kappa{-}1 + \lambda_2 Y\kappa{-}2\}^2,$$

которые определятся из СЛАУ второго порядка и через которые можно рассчитать

$$\alpha^\circ_{1,2} = -\frac{1}{\Delta}Ln\left(\frac{\lambda^\circ_1}{2} + \left(\frac{\lambda^{\circ 2}_1}{4} \pm \lambda^\circ_2\right)^{1/2}\right),$$

$$\alpha_3^\circ = -\frac{1}{\Delta}Ln\frac{\lambda_1^\circ}{2}.$$

Отметим возможность идентификации параметров на доле существенного изменения ординат модели, за которую можно принять $\approx 3/\min\{\alpha_1,\alpha_2\}$. Видно, что помехозащищенные оценки параметров определят условия

$$\{A^\circ_1, A^\circ_2\} = \underset{A_1,A_2}{arg\ min} \sum_{\kappa=0}^{N}\{Y\kappa - A_1exp(-\alpha^\circ_1\Delta\kappa)$$

$$- A_2exp(-\alpha^\circ_2\Delta\kappa)\}^2 \qquad \text{для (20)},$$

$$\{A^\circ_3, A^\circ_4\} = \underset{A_3,A_4}{arg\ min} \sum_{\kappa=0}^{N}\{Y\kappa - (\lambda^\circ_1/2)^\kappa \times$$

$$\times(A_3\Delta\kappa + A_4)\}^2 \qquad \text{для (21)}$$

и соответствующие СЛАУ второго порядка.

5.5. Практический интерес представляет и временной ряд, состоящий из произведения экспоненциального тренда и гармоники

$$Y\kappa = A_1exp(-\alpha_1Tk)Cos(\omega Tk + \phi). \qquad (22)$$

Для (22) при k ≥ 2 и аддитивной помехе будем иметь следующую модель авторегрессии:

$$Y\kappa = \lambda_1 Y\kappa\text{-}1 - \lambda_2 Y\kappa\text{-}2 + \xi\kappa, \qquad (23)$$

где $\lambda_1 = \lambda_0 exp(-\alpha_1\Delta)$, $\lambda_2 = exp(-2\alpha_1\Delta)$, $\lambda_0 = 2Cos\omega\Delta$.

Метод наименьших квадратов (при $N \geq 4$) дает оценки

$$\lambda^\circ_1, \lambda^\circ_2 = \underset{\lambda_1,\lambda_2}{arg\ min} \sum_{\kappa=2}^{N}\{Y\kappa - \lambda_1 Y\kappa\text{-}1 + \lambda_2 Y\kappa{-}2\}^2,$$

$$A^\circ_2, A^\circ_3 = \underset{A_2,A_3}{arg\ min} \sum_{\kappa=0}^{N}\{Y\kappa -$$

$$-A_2\ exp(-\alpha^\circ_1\Delta\kappa)Cos\omega^\circ\Delta\kappa +$$

$$+ A_3\ exp(-\alpha^\circ_1\Delta\kappa)Sin\omega^\circ\Delta\kappa\}^2,$$

где $A_2 = A_1Cos\phi$, $A_3 = A_1Sin\phi$.

Идентифицируемые параметры будут равны

$$\alpha^\circ_1 = -\frac{1}{2\Delta} Ln\lambda^\circ_2,\ \omega^\circ = \frac{1}{\Delta} ArcCos\left(\frac{\lambda^\circ_1}{2(\lambda^\circ_2)^{1/2}}\right),$$

$$A^\circ_1 = (A^\circ{}_2^2 + A^\circ{}_3^2)^{1/2},\ \phi^\circ = Arctg(A^\circ_3/A^\circ_2).$$

5.6. Сумма экспоненциального тренда и гармонического компонента

$$Y\kappa = A_1\, exp(-\alpha_1 T\kappa) + A_2 Cos(\omega T\kappa + \phi) \quad (24)$$

определит следующую модель авторегрессии при $k \ge 2$ при аддитивной помехе:

$$Y\kappa = \eta_1 Y\kappa\text{-}1 - \eta_2 Y\kappa\text{-}2 + \eta_3 Y\kappa\text{-}3 + \xi\kappa, \quad (25)$$

где $\eta_1 = exp(-\alpha_1\Delta) + 2Cos\omega\Delta,$
$\eta_2 = 1 + exp(-\alpha_1\Delta) + 2Cos\omega\Delta,\ \eta_3 = exp(-\alpha_1\Delta).$

Предложенный подход дает оценки

$$\eta^\circ_1,\eta^\circ_2,\eta^\circ_3 = \underset{\eta_1,\eta_2,\eta_3}{\arg\min}\sum_{\kappa=0}^{N}\{Y\kappa - \eta_1 Y\kappa\text{-}1 + \eta_2 Y\kappa\text{-}2 - \eta 3\, Y\kappa\text{-}3\}^2, \quad (26)$$

$$A^\circ_1,A^\circ_3,A^\circ_4 = \underset{A_1,A_3,A_4}{\arg\min}\sum_{\kappa=0}^{N}\{Y\kappa - A_1 exp(\alpha^\circ_1\Delta\kappa) - A_3 exp(-\alpha^\circ_2\Delta\kappa)Cos\omega^\circ\Delta\kappa + A_4 Cos\omega^\circ\Delta\kappa\}^2, \quad (27)$$

где $A_3 = A_2 Cos\phi,\ A_4 = A_2 Sin\phi,\ \alpha^\circ_1 = 1/\Delta\, Ln\,\eta^\circ_3,$
$\omega^\circ = 1/\Delta\, Arccos\{(\eta^\circ_2 - 1)/2\eta^\circ_3\},$
$A^\circ_2 = (A^\circ{}_3^2 + A^\circ{}_4^2)^{1/2},\ \phi^\circ = Arctg(A^\circ_4/A^\circ_3).$ (28)

Соотношения (25) - (28) для модели (24) обладают внешним сходством с формулами для модели (18), но диапазон значений коэффициентов уравнений регресии (19) и (25) различен, что может служить признаком классификации моделей.

5.7. Для произведения гиперболического тренда и гармоники

$$Y\kappa = (A_1 + A_2/T\kappa)Cos(\omega T\kappa + \phi) \quad (29)$$

целесообразен прием представления его в виде $Y\kappa T\kappa = (A_1 T\kappa + A_2)Cos(\omega T\kappa + \phi)$, а при $k \ge 4$ и аддитивной помехе - использования модели авторегрессии и формул

$$Y\kappa K = \theta_1\{Y\kappa\text{-}1\,(K\text{-}1) + Y\kappa\text{-}3(K\text{-}3)\} - \theta_2 Y\kappa\text{-}2(K\text{-}2) - Y\kappa\text{-}4(K\text{-}4) + \xi\kappa,$$

$$\theta^\circ_1, \theta^\circ_2 = \underset{\theta_1,\theta_2}{\arg\min}\sum_{\kappa=4}^{N}\{Y\kappa K - \theta_1\{Y\kappa\text{-}1\,(K\text{-}1) + Y\kappa\text{-}3(K\text{-}3)\} + \theta_2 Y\kappa\text{-}2(K\text{-}2) + Y\kappa\text{-}4(K\text{-}4)\}^2,$$

$$A^\circ_3, A^\circ_4, A^\circ_5, A^\circ_6 = \underset{A_3,A_4,A_5,A_6}{\arg\min}\sum_{\kappa=0}^{N}\{Y\kappa\,\Delta K - A_3\Delta\kappa\, Cos\omega^\circ\Delta\kappa + A_4\Delta\kappa\, Sin\omega^\circ\Delta\kappa - A_5 Cos\omega^\circ\Delta\kappa + A_5\, Sin\omega^\circ\Delta\kappa\}^2,$$

где $\theta_1 = 4Cos\omega\Delta,\ \theta_2 = 16\,Cos^2\omega\Delta + 2,\ A_3 = A_1 Cos\phi,$
$A_4 = A_1 Sin\phi,\ A_5 = A_2 Cos\phi,\ A_6 = A_2 Sin\phi,$
$\omega^\circ = 1/\Delta\, ArcCos\{(\theta^\circ_1/4),\ A^\circ_1 = (A^\circ{}_3^2 + A^\circ{}_4^2)^{1/2},$
$A^\circ_2 = (A^\circ{}_5^2 + A^\circ{}_6^2)^{1/2},\ \phi^\circ = Arctg(A^\circ_4/A_3).$

5. 8. Сумму гиперболического тренда и гармоники

$$Y\kappa = A_1 + A_2/T\kappa + A_3 Cos(\omega T\kappa + \phi) \quad (30)$$

целесообразно представить в виде $Y\kappa\, T\kappa = A_1 T\kappa + A_2 + A_3 T\kappa\, Cos(\omega T\kappa + \phi)$, для которого при $k \ge 6$ и аддитивной помехе получим

$$Y\kappa K = \rho_1\{Y\kappa\text{-}1\,(K\text{-}1) + Y\kappa\text{-}5(K\text{-}5)\} - \rho_2\{Y\kappa\text{-}2(K\text{-}2) + Y\kappa\text{-}4(K\text{-}4)\} + \rho_3 Y\kappa\text{-}3(K\text{-}3)\} - Y\kappa\text{-}6(K\text{-}6)) + \xi\kappa,$$

$$\rho^\circ_1,\rho^\circ_2,\rho^\circ_3 = \underset{\rho_1,\rho_2,\rho_3}{\arg\min}\sum_{\kappa=6}^{N}\{Y\kappa K - \rho_1\{Y\kappa\text{-}1\,(K\text{-}1) + Y\kappa\text{-}5(K\text{-}5)\} + \rho_2\{Y\kappa\text{-}2(K\text{-}2) + Y\kappa\text{-}4(K\text{-}4)\} - \rho_3 Y\kappa\text{-}3(K\text{-}3)\} + Y\kappa\text{-}6(K\text{-}6)\}^2,$$

$$A^\circ_1,A^\circ_2,A^\circ_4,A^\circ_5 = \underset{A_1,A_2,A_4,A_5}{\arg\min}\sum_{k=0}^{N}\{Y\kappa\,\Delta K - A_1\Delta K - A_2 - A_4\Delta K\, Cos\omega^\circ\Delta\kappa + A_5\Delta K\, Sin\omega^\circ\Delta\kappa\}^2,$$

где $\omega^\circ = 1/\Delta\, ArcCos\{(\rho^\circ_1/4 - 1/2),$
$\rho_1 = 2(2Cos\omega\Delta + 1),$
$\rho_2 = (2Cos\omega\Delta + 1)(2Cos\omega\Delta + 3),$
$\rho_3 = 4(2Cos^2\omega\Delta + Cos\omega\Delta + 1),$
$A_4 = A_3 Cos\phi,\ A_5 = A_3 Sin\phi,\ A^\circ_3 = (A^\circ{}_4^2 + A^\circ{}_5^2)^{1/2},$
$\phi^\circ = Arctg\,(A^\circ_5/A_4).$

Особенностью двух последних моделей авторегрессий является их «нестационарность», обусловленная присутствием в них произведений отсчетов на номера этих отсчетов. Для (29) $N \geq 6$, а для (30) $N \geq 8$.

5.9. Логистическая динамика наиболее часто моделируется выражением (моделью Верхулста или Перла-Рида)

$$Y\kappa = \frac{A}{1 + B\, exp(-CT\kappa)}, \tag{31}$$

где $A, B, C \in R$(и, как правило, положительны).

Перейдем в (31) к значениям $Zk = 1/Yk$:

$$Zk = E\, exp(-CTk) + G + \xi k,$$

для которых, очевидно, будут справедливы модель авторегрессии вида (6) и соответствующие соотношения для расчета: $E^{\circ} = B/A$, $G^{\circ} = 1/A$, а через них, соответственно, и A°, B°.

В отличие от известных методов идентификации данный метод не требует априорного знания параметра «насыщения» A.

6. Заключение. На примерах 13-ти рассмотренных моделей, широко применяемых в эконометрической практике, показана возможность получения оптимальных оценок параметров на основе авторегрессии отсчетов путем решения соответствующих СЛАУ невысокого (до четвертого) порядка.

Последнее обстоятельство позволяет обеспечить малые вычислительные погрешности, а малые объемы требуемых выборок определяют высокое быстродействие или возможность анализа высокодинамичных и нестационарных экономических процессов.

Проведена и находится в режиме опытной эксплуатации программная реализация предложенного подхода идентификации моделей (2), (4), (14), (16), (22), (24) в составе автоматизированных информационных систем управления администрации: «АИС - Город» г. Новокуйбышевска и «АИС - Регион» Самарской области, подтвердившая справедливость и эффективность предложенного подхода.

Погрешность прогнозирования экономических показателей указанными способами зависит от вида и параметров модели и для практически важных случаев не превышает 10 %.

Список литературы

1. Гранберг А. Г. Динамические модели народного хозяйства. - М.: Экономика. 1985.

2. Статистическое моделирование и прогнозирование./ Под ред. А. Г. Гранберга. - М.: Финансы и статистика. 1990.

3. Айвазян С. А. Прикладная статистика. Основы эконометрики. - М.: 2001. ЮНИТИ – ДАНА. 2001.

4. Кобринский Н. Е., Кузьмин В. И. Точность экономико-математических моделей. - М.: Финансы и статистика. 1981.

5. Эконометрика/ Под ред. И. И. Елисеевой. - М.: Финансы м статистика. 2002.

6. Колемаев В. А. Математическая экономика. - М.: ЮНИТИ-ДАНА. 2002.

7. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. - М.: Наука.1971.

8. Семёнычев В. К. Эконометрическое моделирование расширенного воспроизводства на основе авторегрессии. Сб. «Вестник Самарского аэрокосмического университета. №4. Самара. 2003. - С. 26-33.

9. Грицан В. Н. Эконометрика. - М.: Дашков и К. 2001.

GENERAL APPROACH TO THE ECONOMIC DYNAMICS IDENTIFICATION ON THE BASISOF AUTOREGRESSION MODELS

© 2004 V. K. Semenychev

Samara State Aerospace University

General approach to the identification of economic dynamics models containing exponential and harmonic components is proposed.

The approach is based on autoregression of economic index readings.