

## ТОНКОСТЕННЫЕ ПЛАСТИНЫ И ОБОЛОЧКИ С НЕСКВОЗНЫМИ ТРЕЩИНОВИДНЫМИ ДЕФЕКТАМИ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

© 2012 Астафьев В.И., Яковлев А.С.

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва  
(национальный исследовательский университет)

В работе рассматривается определение области возможных предельных состояний тонкостенных пластин и оболочек из идеального упругопластичного материала с несквозным трещиновидным дефектом (царапиной). Рассматриваются области возможных предельных состояний для царапин переменной глубины. Приводится сопоставление экспериментальных и теоретических данных.

Решается задача определения предельных размеров дефектов, которые при заданном уровне эксплуатационных нагрузок могут привести к катастрофическому разрушению всей конструкции.

*Тонкостенные элементы; эксплуатационные нагрузки; плосконапряжённое состояние; краевая задача; царапина; трещина.*

На основании решения краевой задачи для поверхностной трещины (царапины) постоянной глубины в приближении Дагдейла [1] были установлены области предельных состояний тонкой пластины с такой царапиной и определена граница между ними. Однако в процессе эксплуатации на тонкостенные элементы конструкций действуют внешние нагрузки, циклически изменяющиеся около номинальных значений. Вследствие этого, изначально прямолинейный фронт царапины искривляется и возникает усталостная царапина с переменной глубиной.

В случае плоского напряжённого состояния можно считать, что длина царапины  $2l$  много больше толщины пластины  $h$  ( $2l \gg h$ ), и с достаточной степенью точности аппроксимировать глубину царапины кривой второго порядка:

$$z = b \cdot \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right), \quad |x| \leq l. \quad (1)$$

Тогда на контуре царапины  $x \leq l$  будут действовать сжимающие усилия интенсивностью:

$$p(x) = -P + \sigma_s \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right), \quad (2)$$

а на берегах пластических зон  $l \leq x \leq c$  - с интенсивностью  $p(x) = \sigma_s$ . Соответствующая краевая задача запишется следующим образом:

$$p(x) = \begin{cases} -P + \sigma_s \cdot \left(1 - \frac{b}{h} + \frac{b}{h} \cdot \frac{x^2}{l^2}\right), & |x| \leq l, \\ -P + \sigma_s, & l \leq |x| \leq c, \\ v(x) = 0, & |x| > c. \end{cases} \quad (3)$$

где  $P$  – внешняя нагрузка,  $v(x)$  – раскрытие берегов царапины;

Очевидно, что к условиям (3) необходимо добавить условие, определяющее однозначность смещений:

$$\lim_{x \rightarrow c} v'(x) = 0. \quad (4)$$

Следуя результатам, полученным в задаче для царапины с постоянной глубиной, решение (3) запишем в виде:

$$v(x) = -\frac{1}{\pi \cdot E} \cdot \left\{ (-P + \sigma_s) \cdot \int_{-c}^c \Gamma(c, x, \xi) \cdot d\xi - \sigma_s \cdot \frac{b}{h} \cdot \int_{-l}^l \Gamma(c, x, \xi) \cdot d\xi + \sigma_s \cdot \frac{b}{h \cdot l^2} \cdot \int_{-l}^l \Gamma(c, x, \xi) \cdot d\xi \right\}, \quad (5)$$

$$|x| \leq c.$$

Сделаем замену переменных:  $t = \frac{x}{c}$  ;

$$\varphi = \frac{\xi}{c}; \gamma = \frac{l}{c}. \quad \text{Тогда:}$$

$$v(t) = -\frac{\sigma_s \cdot l}{\pi \cdot E \cdot \gamma} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{P}{\sigma_s}\right) \cdot \int_{-1}^1 \Gamma(1, t, \varphi) \cdot d\varphi - \frac{b}{h} \cdot \int_{-\gamma}^{\gamma} \Gamma(1, t, \varphi) \cdot d\varphi + \frac{b}{h \cdot \gamma^2} \cdot \int_{-1}^1 \varphi^2 \cdot \Gamma(1, t, \varphi) \cdot d\varphi \right\}, \quad (6)$$

$$|t| \leq 1.$$

Последний интеграл в этом выражении после интегрирования по частям сводится к табличным интегралам и берётся в явном виде. Обозначим:

$$J(t, \gamma) = \frac{1}{\gamma^2} \cdot \int_{-\gamma}^{\gamma} \varphi^2 \cdot \Gamma(1, t, \varphi) \cdot d\varphi$$

и запишем уравнение (6) в виде:

$$\frac{\pi \cdot E}{\sigma_s \cdot l} \cdot v(t) = - \left\{ \left( 1 - \frac{P}{\sigma_s} \right) \cdot \int_{-1}^1 \Gamma(1, t, \varphi) \cdot d\varphi + \frac{b}{h} \cdot \left[ J(t, \gamma) - \int_{-\gamma}^{\gamma} \Gamma(1, t, \varphi) \cdot d\varphi \right] \right\} \quad (7)$$

Взяв в (7) производную по  $t$  и приравняв её нулю, получим выражение для определения неизвестного параметра  $\gamma$ :

$$\left\{ \left( 1 - \frac{P}{\sigma_s} \right) \cdot \int_{-1}^1 \frac{d}{dt} \Gamma(1, t, \varphi) \cdot d\varphi + \frac{b}{h} \left[ \frac{d}{dt} J(t, \gamma) - \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{d}{dt} \Gamma(1, t, \varphi) \cdot d\varphi \right] \right\} = 0. \quad (8)$$

Тогда предельное состояние для царапины (начальное состояние) определяется из условий:  $v(0) = v_*$  или

$$\frac{\pi \cdot E}{\sigma_s \cdot l} \cdot v_* = - \left\{ \left( 1 - \frac{P}{\sigma_s} \right) \cdot \int_{-1}^1 \Gamma(1, 0, \varphi) \cdot d\varphi + \frac{b}{h} \left[ J(0, \gamma) - \int_{-\gamma}^{\gamma} \Gamma(1, 0, \varphi) \cdot d\varphi \right] \right\} \quad (9)$$

Здесь  $v_*$  - предельное значение критического раскрытия берегов царапины.

Таким образом, уравнения (8) и (9) определяют начальное состояние пластины с царапиной переменной глубины. Конечное состояние определяется следующим выражением:

$$\gamma_k = \cos \left( \frac{\pi}{2} \cdot \frac{P}{\sigma_s} \right). \quad (10)$$

На основании полученных результатов и при равенстве левых частей уравнений (9) и (10) строится вычислительная процедура. Результаты в виде зависимости представлены на рис. 1.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение полученных результатов для оценки несущей способности тонкостенного элемента конструкции. Пусть номинальная эксплуатационная нагрузка  $\frac{P_0}{\sigma_s} = 0,4$ ,

толщина элемента конструкции равна 1 мм. Материал – стареющий алюминиевый сплав Д16АТ, для которого параметр  $\lambda = \frac{\sigma_T}{E} = 0,008$ . Здесь  $E$  – модуль упругости.

Необходимо сделать оценку критической длины повреждения, при котором наступает катастрофическое разрушение элемента конструкции. Примем, что предельная величина раскрытия  $v_*$  для Д16АТ равна 0,1 мм.

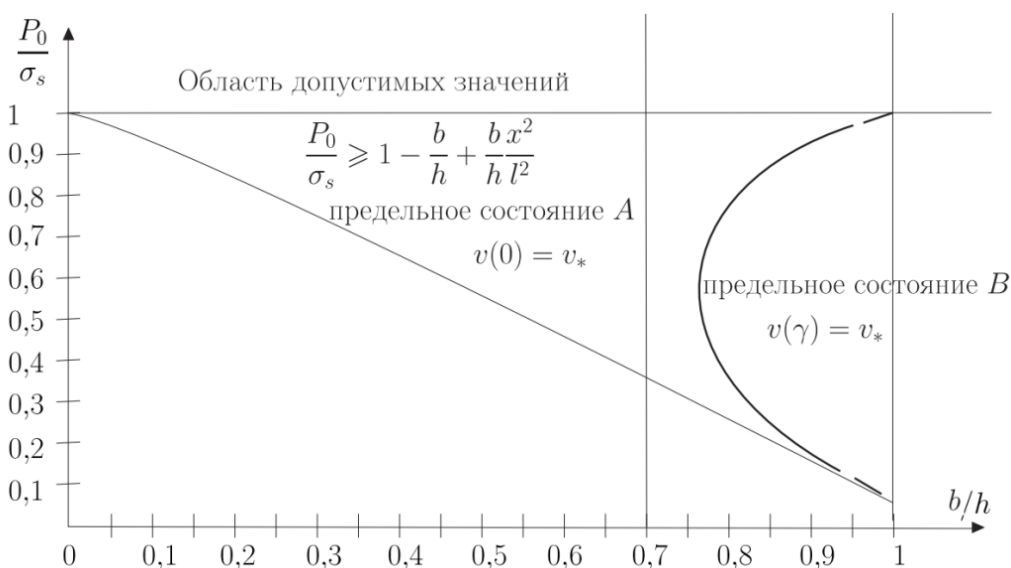


Рис. 1 - Области определения предельного состояния пластины с царапиной:

A – область разрушения, определяемая царапиной; B – область разрушения, определяемая трещиной

При анализе поставленной задачи возможны два случая: первый случай определяется возможностью оценки глубины несквозной трещины, во втором случае будем считать, что глубина неизвестна.

При известной глубине  $\frac{b}{h}$  по результатам, представленным на рис. 1, можно определить вид предельного состояния. Пусть  $\frac{b}{h} = 0,8$ . В этом случае предельное состояние определяет сквозная трещина (рис. 1). По формуле (10) для предельного состояния  $\gamma$  определяем значение:

$$\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{P}{\sigma_s}\right) = \cos(0,2 \cdot \pi) = 0,809.$$

Определяем длину трещины, при которой наступает нестабильное состояние элемента конструкции:

$$L = 2 \cdot l = \frac{\pi \cdot \nu_*}{2 \cdot \lambda \cdot \ln \frac{1}{\gamma_k}} = 92,5 \text{ мм.}$$

Для второго случая принимаем запас несущей способности  $b = h$ . Проводим расчёты по формуле (10).

Введя замену переменных в уравнениях предельных состояний, полученных в [1]:

$$\frac{P_0}{\sigma_s} = y_0 ; \quad \frac{P_k}{\sigma_s} = y_k ; \quad \frac{a}{h} = x ; \quad \gamma_k = \cos \theta_k ; \quad \gamma_0 = \cos \theta_0, \quad (11)$$

Преобразуем их к следующему виду:

$$\arcsin \gamma_0 = \frac{\pi}{2} - \arccos \gamma_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0 ;$$

$$\delta_* = \frac{\pi \delta_c}{8 \lambda l} = \frac{\pi K^2 l_c}{8 \sigma_s^2 l}. \quad (12)$$

Учтём:

$$\ln \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2}}{1 - \sqrt{1 - \gamma_0^2}} = \ln \frac{(1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2})^2}{\gamma_0^2} =$$

$$= 2 \cdot \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma_0^2}}{\gamma_0} = 2 \cdot \ln \frac{1 + \sin \theta_0}{\cos \theta_0}.$$

Тогда предельные кривые для поверхностной и сквозной трещины в безразмерных переменных можно записать в виде:

$$1 - y_0 = x \cdot \left(1 - \frac{2}{\pi} \cdot \theta_0(x, \delta_*)\right), \quad \text{где}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} = \frac{1 - e^{-\frac{\delta_*}{x}}}{1 + e^{-\frac{\delta_*}{x}}} = \operatorname{th} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta_*}{x}\right), \quad (13)$$

$$y_k = \frac{2}{\pi} \cdot \theta_k(\delta_*), \quad \cos \theta_k = e^{-\delta_*} \quad \text{или}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta_k}{2} = \frac{1 - e^{-\delta_*}}{1 + e^{-\delta_*}} = \operatorname{th} \left(\frac{1}{2} \cdot \delta_*\right). \quad (14)$$

Графики функций  $y_0(x, \delta_*)$  и  $y_k(\delta_*)$  изображены на рис. 2

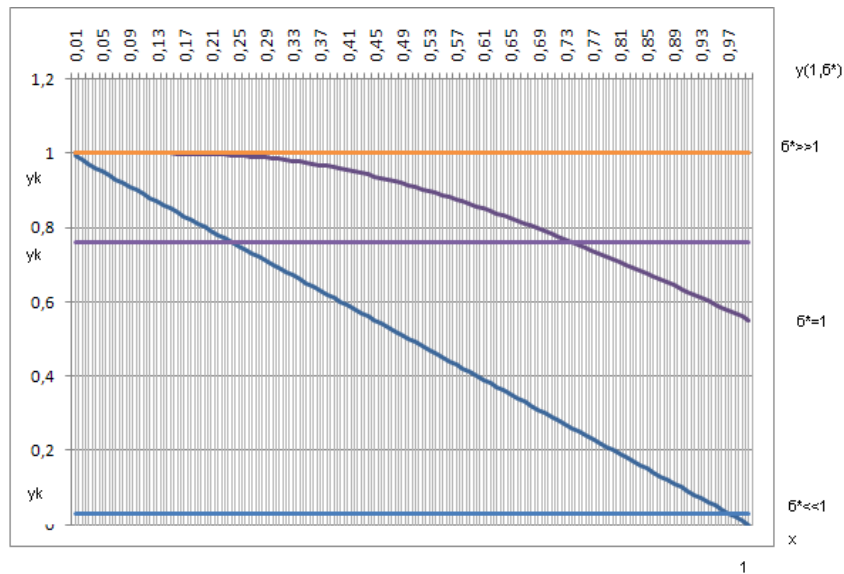


Рис. 2 – Графики функций  $y_0(x, \delta_*)$ , и  $y_k(\delta_*)$

Из соотношений (13) и (14) следует, что  $y_0(1, \delta_*) = \frac{2}{\pi} \cdot \theta_0(1, \delta_*) < y_k(\delta_*) = \frac{2}{\pi} \cdot \theta_k(\delta_*)$ , т.е. линия  $y_0(x, \delta_*)$  при заданном  $\delta_*$  обязательно пересечёт линию  $y_k(\delta_*)$  при каком-то  $\bar{x}$ :

$$1 - y_0(\bar{x}, \delta_*) = 1 - y_k(\bar{x}, \delta_*) \Rightarrow \bar{x} = \frac{1 - \frac{2}{\pi} \theta_k(\delta_k)}{1 - \frac{2}{\pi} \theta_k(\bar{x}, \delta_k)} \quad (15)$$

Таким образом, при распространении полученных результатов с пластин на цилиндрические оболочки под внутренним давлением (с учётом поправки Фолиаса [3] на кривизну оболочки) можно сделать вывод, что при  $x = a/h < \bar{x}$  проросшая на всю глубину поверхностная трещина далее не будет распространяться по всей длине стенки оболочки, находящейся под внутренним давлением (возникает «течь»), а при  $x > \bar{x}$  продолжит своё развитие, что в итоге может привести к разрушению конструкции при напряжениях ниже предела текучести материала.

Данное обстоятельство определяется критерием «утечка перед разрушением». Переход от пластин к оболочкам осуществляем с помощью следующего уравнения:

$$K_I = M_F \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi l} = \frac{pR}{h} \left[ \left( 1 + 1,61 \frac{l^2}{Rh} \right) \pi l \right]^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

$M_F = \sqrt{1 + 1,61 \frac{l^2}{Rh}}$  - поправка Фолиаса, где  $p$  – внутреннее давление в оболочке,  $R$  – радиус кривизны оболочки,  $l$  – длина трещины,  $h$  – толщина стенки оболочки.

Используя экспериментальные данные [2] испытаний труб диаметром 762 мм с толщиной стенки 9,5 мм при наличии поверхностных дефектов (таблица 1) и перенося их на график, получим следующую картину, представленную на рис.3:

Таблица 1. – Экспериментальные данные А.Р. Даффи, Дж. М. Мак Клур и др.

| Обозначение трубы | Длина трещины, мм (L) | глубина трещины, мм (a) | Относительная глубина трещины, мм (x = a/h) | Предел текучести, (кг/мм <sup>2</sup> ) бс | P/бс | интегральная безразмерная характеристика б* | КРИТЕРИЙ   |
|-------------------|-----------------------|-------------------------|---|--|------|---|------------|
| RR8               | 370,84                | 3,78                    | 0,398                                       | 52,14                                      | 0,72 | 0,006                                       | разрушение |
|                   | 222,25                |                         | 0,398                                       |  | 0,78 | 0,028                                       |            |
|                   | 83,82                 |                         | 0,398                                       |  | 0,94 | 0,413                                       |            |
| RR5               | 369,82                | 5,69                    | 0,599                                       | 50,17                                      | 0,50 | 0,007                                       |            |
|                   | 219,2                 |                         | 0,599                                       |  | 0,57 | 0,031                                       |            |
| RR9               | 83,82                 |                         | 0,599                                       | 47,18                                      | 0,92 | 0,504                                       |            |
| RR7               | 370,84                |                         | 0,813                                       | 49,66                                      | 0,22 | 0,007                                       |            |
| RR4               | 224,03                | 7,72                    | 0,813                                       | 49,89                                      | 0,32 | 0,030                                       | течь       |
| RR7               | 86,36                 |                         | 0,813                                       | 50,66                                      | 0,77 | 0,405                                       |            |
| RR5               | 224,03                | 8,51                    | 0,896                                       | 50,17                                      | 0,17 | 0,030                                       |            |

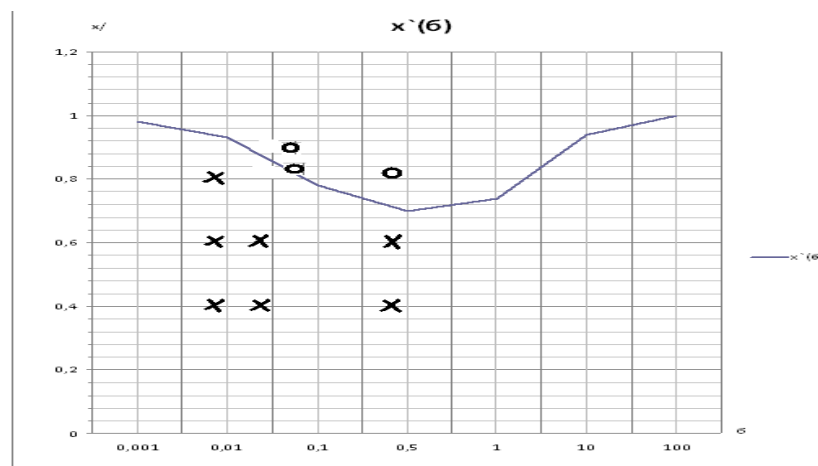


Рис. 3 – Сопоставление экспериментальных и теоретических данных X – разрушение, 0 – «течь»

Как видно из рис. 3, те значения функции, которые лежат выше кривой  $\bar{x}(\delta)$  интерпретируются как «течь», т.е. поверхностная трещина проросла в сквозную и «остановилась» (есть время для оценки ситуации и принятия необходимых мер по восстановлению конструкции). Те значения функции, которые лежат ниже кривой сигнализируют о том, что поверхностный дефект пророс в сквозной и продолжил рост на поверхности тонкостенной оболочки, что в результате привело к разрушению всей конструкции.

### Библиографический список

1. Яковлев А.С. Оценка влияния несквозных трещин на прочность конструкций при

проектировании летательных аппаратов [Текст]/ А.С. Яковлев // «Актуальные проблемы ракетно-космической техники»: Тр. II-ой Всерос. научн. конф. – Самара: ФГУП ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс», 2011. – «Козловские чтения». – С. 83 – 89.

2. Даффи, А. Практические примеры расчёта на сопротивление хрупкому разрушению трубопроводов под давлением [Текст]/ А. Даффи, Р. Эйбер, У. Макси // Разрушение. Т.5 Расчёт конструкций на хрупкую прочность. – М.: машиностроение, 1977. – С. 146-210

3. Folias, E.S. A finite crack in a pressured cylindrical shell[Text] / E.S. Folias // Int. J. Fract. Mech. – 1965. Vol. 1. P. 104-113.

## THIN-WALLED PLATES AND COVERS WITH SURFACE-CRACK DEFECTS IN ELASTOPLASTIC APPROACH

© 2012 V. I. Astafiev, A. S. Yakovlev

Samara State Aerospace University  
named after academician S.P. Korolyov (National Research University)

In work definition of area of possible limiting conditions of thin-walled plates and covers from an ideal elastoplastic material with not through blind fractured defect (scratch) is considered. Areas of possible limiting conditions for scratches of variable depth are considered. Comparison of experimental and theoretical data is given.

The problem of determination of the limiting extent of defects which at the set level of operational loadings can lead to catastrophic destruction of all design is solved.

*Thin-walled elements; loads; marginal problem; plane taut state; scratch; flaw.*

### Информация об авторах

**Астафьев Владимир Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: vlast@ssu.samara.ru. Область научных интересов: нелинейная механика разрушения, устойчивый и неустойчивый рост трещин, торможение трещин, утечка перед разрушением.

**Яковлев Александр Степанович**, аспирант кафедры теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: Sash84\_777@bk.ru. Область научных интересов: конструкция и проектирование летательных аппаратов, прочность конструкций летательных и космических аппаратов, механика разрушений, механика трещин.

**Astafiev Vladimir Ivanovich**, doctor of physics and mathematical science, professor, professor of chair TM, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: vlast@ssu.samara.ru. Area of research: nonlinear fracture mechanics, stable and nonstable crack growth, crack arrest, leak before break.

**Jakovlev Alexander Stepanovich**, post graduate student, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: Sash84\_777@bk.ru. Area of research: construction and designing aircrafts, durability of constructions the flying and the space vehicle, mechanics of destructions, mechanics of cracks.