УДК 338.24.01

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРАТЕГИИ ПРИВЛЕЧЕНИЯ ФИНАНСОВЫХ РЕСУРСОВ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ФИРМЫ В ДЛИТЕЛЬНОМ ПЕРИОДЕ

© 2004 О. В. Павлов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассматривается задача управления финансовыми ресурсами производственной фирмы в длительном периоде. Предполагается, что фирма может развиваться за счет «внутренних» источников (прибыли) и «внешних» финансовых ресурсов (средств различных инвестиционных фондов, банковских кредитов). Задача формулируется как задача оптимального управления. С использованием принципа максимума Понтрягина определяются оптимальные условия привлечения «внутренних» и «внешних» финансовых ресурсов для развития основных фондов и увеличения количества работников фирмы.

1. Постановка задачи оптимального управления

Рассматривается производственная деятельность фирмы в длительном периоде, в котором возможны изменения факторов производства: основных фондов (капитала) $K(t)$ и количества работников (труда) $L(t)$. Объем выпуска продукции $Q(t)$ в момент времени t описывается производственной функцией, учитывающей научно-технический прогресс [1]:

$$Q(t) = e^{\alpha t} f(K(t), L(t)), \tag{1}$$

где $K(t)$ - количество основных фондов в момент времени t, выраженный в денежных единицах; $L(t)$ – количество работников фирмы в момент времени t; α - коэффициент, учитывающий научно-технический прогресс.

Предполагается мгновенное освоение капиталовложений, отсутствие временного лага между осуществлением затрат и началом функционирования производственных фондов и работников. Считается, что вся произведенная продукция фирмы реализуется на рынке.

Задачи оптимального распределения ресурсов производственной фирмы рассматривались в [2], [3]. Постановки задач были сделаны в предположении постоянства трудовых ресурсов, вопросы нахождения оптимального соотношения инвестиций в основные фонды и трудовые ресурсы не рассматривались. Математические модели отражали практику хозяйственной деятельности в условиях административно-командной системы, когда на предприятии существовали фонд развития производства, фонд материального поощрения и фонд социально-культурных мероприятий и жилищного строительства. Плановым органом в зависимости от темпов роста реализации и рентабельности определялся размер этих фондов, остальная прибыль изымалась. В рыночной экономике предприятие обладает самостоятельностью в принятии управленческих решений, практика формирования фондов развития отсутствует, предприятие из прибыли отчисляет только налоги. Эти изменения потребовали пересмотра математических моделей, описывающих функционирование предприятия в длительном периоде. В данной статье исследуются вопросы нахождения оптимального соотношения инвестиций в основные фонды и трудовые ресурсы, оптимальное соотношение собственных и заемных средств.

Траектория развития фирмы на временном интервале $[0,T]$ описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dK(t)}{dt} = -\mu K(t) + u_1(t) + v_1(t), \\ \dfrac{dL(t)}{dt} = u_2(t) + v_2(t), \end{cases} \tag{2}$$

где μ - коэффициент выбытия основных фондов; $u_1(t)$, $u_2(t)$ - часть прибыли в стоимостном выражении, инвестируемая в момент времени t в основные фонды и трудовые ресурсы, соответственно; $v_1(t)$, $v_2(t)$ - внешние инвестиции в стоимостном выражении, привлекаемые в момент времени t для развития основных фондов и трудовых ресурсов, соответственно. Дифференциальное уравнение, описывающее изменение основных фондов $K(t)$, приводится в [1]-[3]. Дифференциальное уравнение, описывающее изменение трудовых ресурсов $L(t)$, вводится автором.

Известно количество основных фондов и работников фирмы в начальный момент времени:

$$\begin{cases} K(0) = K_0, \\ L(0) = L_0. \end{cases} \tag{3}$$

Система (2) показывает, что «внутренние» и «внешние» инвестиции используются на восстановление и увеличение основных производственных фондов и количества работников.

В качестве целевой функции предприятия рассматривается максимизация дисконтированной чистой прибыли $\pi(t)$ на интервале времени $[0,T]$:

$$J_u = \int_0^T e^{-\delta t}\pi(t)dt \to max, \tag{4}$$

где δ - коэффициент дисконтирования, с помощью которого будущая стоимость денег приводится к настоящему моменту времени t.

Чистая прибыль фирмы в момент времени t определяется следующим выражением:

$$\pi(t) = p_1Q(t) - p_2L(t) - A(t) - N(t) - \\ - \sum_{i=1}^{m} p_{3i}R_i(t) - \sum_{i=1}^{2} u_i - \sum_{i=1}^{2} v_i e^{-\delta\tau}(1+r)^{\tau}, \tag{5}$$

где p_1 – цена продукции фирмы; $Q(t)$ - объем выпуска продукции; p_2 – средняя ставка заработной платы (цена труда); $p_1 Q(t)$ – доход фирмы; $p_2L(t)$ – затраты на заработную плату; $A(t)$ – амортизационные отчисления; $N(t)$ - налоговые выплаты; p_{3i} - цена i-го вида сырьевого ресурса; $R_i(t)$ – количество i-го вида комплектующих и материалов; $\sum_{i=1}^{m} p_{3i}R_i(t)$ - затраты на комплектующие и материалы; m – количество видов комплектующих и материалов; r – величина кредитной ставки; τ - время кредитования фирмы.

Амортизационные отчисления определяются следующим выражением:

$$A(t) = \mu K(t). \tag{6}$$

Налоговые выплаты определяются

$$N(t) = n_1p_1Q(t) + n_2p_2L(t) + \\ + n_3\pi(t) + n_4K(t), \tag{7}$$

где n_1 – процентная ставка налога на добавленную стоимость, в большинстве случаев 20 %; n_2 – ставка единого социального налога 35,6 % от фонда зарплаты; n_3 – ставка налога на прибыль 24 %; n_4 – ставка налога на имущество ≤ 2,2 %.

Объем закупаемых комплектующих и материалов

$$R_i(t) = Q(t)r_i(t), \tag{8}$$

где $r_i(t)$ – коэффициент расхода i-го вида комплектующего и материала при изготовлении продукции.

Учитывая (1) и (8), запишем выражение для налоговых выплат:

$$N(t) = a_1e^{\alpha t}f(K,L) - n_3[p_2L(t) + \\ + \mu K(t)] + n_2p_2L(t) + n_4K(t), \tag{9}$$

где $a_1 = p_1(n_1 + n_2) - n_3\sum_{i=1}^{m} p_{3i}r_i(t)$.

Подставляя (6), (7), (9) в (5) и учитывая (1), получим следующее выражение для прибыли:

$$\pi(t) = ae^{\alpha t}f(K,L) - (1-n_3)[p_2L(t) + \\ + \mu K(t)] - n_2p_2L(t) - n_4K(t) - \\ - \sum_{i=1}^{2} u_i - \sum_{i=1}^{2} v_i e^{-\delta\tau}(1+r)^{\tau}, \tag{10}$$

где $a = p_1 - a_1 - \sum_{i=1}^{m} p_{3i}r_i(t)$ - коэффициент, который характеризует прибыль с единицы продукции, с учетом переменных затрат, зависящих от объема продукции.

В качестве управляющих функций рассматриваются объемы внутренних $u_i(t)$ и внешних инвестиций $v_i(t)$, $i = 1, 2$. На управляющие функции наложены следующие ограничения:

$$0 \le u_i(t) \le I_i(t), \tag{11}$$

$$0 \le v_i(t) \le V_i(t), \tag{12}$$

$$0 \le \sum_{i=1}^{2} u_i(t) + \sum_{i=1}^{2} v_i(t) \le I(t). \tag{13}$$

Экономический смысл ограничений (11)-(13) заключается в том, что существуют предельные величины $I_i(t)$, $V_i(t)$, $I(t)$, характеризующие возможности фирмы в освоении «внутренних» и «внешних» капиталовложений. Сформулируем задачу оптимального управления: необходимо выбирать объемы «внутренних» и «внешних» инвестиций на фиксированном интервале времени $[0,T]$ для динамической системы (2) с известным начальным состоянием (3) так, чтобы величина критерия оптимальности (4) приняла максимальное значение. Данная задача является задачей с фиксированным временем.

2. Решение задачи оптимального управления

Для решения сформулированной задачи оптимального управления применим принцип максимума Понтрягина [4].

Запишем функцию Гамильтона

$$\begin{aligned} H(t) &= \Psi_1(t)[-\mu K(t) + u_1(t) + v_1(t)] + \\ &+ \Psi_2(t)[u_2(t) + v_2(t)] + e^{-\delta t}\{ae^{\alpha t} f(K,L) - \\ &-[1-n_3](p_2 L(t) + \mu K(t)) - n_2 p_2 L(t) - \\ &- n_4 K(t) - \sum_{i=1}^{2} u_i - \sum_{i=1}^{2} v_i e^{-\delta\tau}(1+r)^{\tau}\}], \end{aligned}$$

где $Y_i(t)$, $i = 1, 2$ – вспомогательные (сопряженные) переменные, удовлетворяющие сопряженной системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\Psi_1(t)}{dt} = -\dfrac{\partial H(t)}{\partial K(t)} = \Psi_1(t)\mu - a\dfrac{\partial f(K,L)}{\partial K(t)} e^{(\alpha-\delta)t} + \\ \qquad\qquad + [1-n_3](\mu + n_4)e^{-\delta t} \\ \dfrac{d\Psi_2(t)}{dt} = -\dfrac{\partial H(t)}{\partial L(t)} = -a\dfrac{\partial f(K,L)}{\partial L(t)} e^{(\alpha-\delta)t} - \\ \qquad\qquad - [1-n_2+n_3]p_2 e^{-\delta t} \end{cases} \tag{14}$$

и условиям трансверсальности на правом конце траектории

$$\Psi_i(T) = 0 \quad i = 1,2. \tag{15}$$

Экономический смысл множителя $\dfrac{\partial f(K,L)}{\partial K(t)}$ - предельный продукт капитала (предельная фондоотдача), который показывает величину дополнительного объема продукции от каждой затраченной единицы капитала K при данном сочетании K, L. Экономический смысл множителя $\dfrac{\partial f(K,L)}{\partial L(t)}$ - предельный продукт труда (предельная производительность), который показывает величину дополнительного объема продукции от каждой затраченной единицы труда L при данном сочетании K, L.

Таким образом, задача оптимального управления сведена к краевой задаче с двумя начальными условиями (3) и условиями на правом конце траектории (15).

Перепишем функцию Гамильтона в виде

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{i=1}^{2} \left(\Psi_i(t) - e^{-\delta t}\right) u_i(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{2} \left(\Psi_i(t) - e^{-\delta t} e^{-\delta\tau}(1+r)^{\tau}\right) v_i(t) - \mu K(t)\Psi_1(t) + \\ &+ e^{-\delta t}[ae^{\alpha t} f(K,L) - [1-n_3](p_2 L(t) + \mu K(t)) - \\ &- n_2 p_2 L(t) - n_4 K(t)]. \end{aligned} \tag{16}$$

В соответствии с принципом максимума в каждой точке оптимальной траектории функция $H(t)$ достигает максимума относительно управляющих параметров.

Согласно (16) гамильтониан линейно зависит от управляющих функций $u_i(t)$ и $v_i(t)$. Следовательно, оптимальные стратегии использования финансовых ресурсов определятся следующими соотношениями:

$$u_i(t) = \begin{cases} I_i(t), & \text{если } \Psi_i(t) - e^{-\delta t} \ge 0 \\ 0, & \text{если } \Psi_i(t) - e^{-\delta t} < 0 \end{cases} \quad i = 1,2, \tag{17}$$

$$v_i(t)=\begin{cases} V_i(t), & если \Psi_i(t)-e^{-\delta(t+\tau)}(1+r)^{\tau}\geq 0 \\ 0, & если \Psi_i(t)-e^{-\delta(t+\tau)}(1+r)^{\tau}<0 \end{cases} \quad i=1,2. \tag{18}$$

Таким образом, оптимальное управление является релейным:

$$u_i(t)=\begin{cases} I_i(t), & если \quad t_0\leq t\leq t^*_{ui}, \\ 0, & если \quad t^*_{ui}<t\leq T, \end{cases}$$

$$v_i(t)=\begin{cases} V_i(t), & если \quad t_0\leq t\leq t^*_{vi}, \\ 0, & если \quad t^*_{vi}<t\leq T, \end{cases}$$

где t^*_{ui} - время переключения для «внутренних» инвестиций, определяемое из условия

$$\Psi_i(t)-e^{-\delta t}=0, \quad i=1,2, \tag{19}$$

t^*_{vi} - время переключения для «внешних» инвестиций, определяемое из условия

$$\Psi_i(t)-e^{-\delta(t+\tau)}(1+r)^{\tau}=0, \quad i=1,2. \tag{20}$$

Таким образом, оптимальной стратегией для фирмы является инвестирование получаемой прибыли или привлекаемых кредитных ресурсов с максимальной интенсивностью в основные фонды и трудовые ресурсы на интервале от начального момента времени до точки переключения. На интервале от точки переключения до конечного момента времени оптимальным является полный отказ от привлечения финансовых ресурсов.

Анализируя (17) и (18), можно сделать вывод о том, что привлекать заемные средства выгоднее, чем собственные, если коэффициент дисконтирования больше натурального логарифма ставки кредитования, увеличенной на единицу: $\delta > \ln(1+r)$. Привлекать собственные средства выгоднее, чем заемные, если коэффициент дисконтирования меньше натурального логарифма ставки кредитования, увеличенной на единицу: $\delta < \ln(1+r)$. Если коэффициент дисконтирования больше натурального логарифма ставки кредитования, увеличенной на единицу, то момент времени прекращения инвестиций увеличивается (отодвигается) по сравнению с моментом времени прекращения инвестиций при использовании собственных средств. Если коэффициент дисконтирования меньше натурального логарифма ставки кредитования, увеличенной на единицу, то момент времени прекращения инвестиций уменьшается (приближается) по сравнению с моментом времени прекращения инвестиций при использовании собственных средств. В случае равенства коэффициента дисконтирования натуральному логарифму ставки кредитования момент времени прекращения инвестиций остается без изменений.

3. Решение задачи оптимального управления для линейной производственной функции

Для случая линейной производственной функции $Q(t)=e^{\alpha t}(BK(t)+CL(t))$ сопряженная система (14) интегрируется независимо от исходной (2). В этом случае прирост объема выпуска продукции в результате единичного увеличения капитала и труда постоянен:

$$\frac{\partial f(K,L)}{\partial K(t)}=B=const, \quad \frac{\partial f(K,L)}{\partial K(t)}=C=const.$$

Вспомогательные переменные $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ определятся из решения дифференциальных уравнений (14)

$$\Psi_1(t)=e^{\mu t}\begin{Bmatrix} \frac{a}{\delta+\mu-\alpha}B\left[e^{-(\delta+\mu-\alpha)t}-e^{-(\delta+\mu-\alpha)T}\right]- \\ -\frac{1-n_3+n_4}{\delta+\mu}\left[e^{-(\delta+\mu)t}-e^{-(\delta+\mu)T}\right] \end{Bmatrix}, \tag{21}$$

$$\Psi_2(t)=\frac{a}{\delta-\alpha}C\left[e^{-(\delta-\alpha)t}-e^{-(\delta-\alpha)T}\right]- -\frac{1-n_3+n_2}{\delta}p_2\left[e^{-\delta t}-e^{-\delta T}\right] \tag{22}$$

Подставляя (21) в (17), получим условия привлечения собственных финансовых ресурсов для развития основных фондов:

$$u_1(t)=\begin{cases} I_1(t), \quad если\ \frac{a}{\omega}B\left[e^{-\omega t}-e^{-\omega T}\right]\geq \\ \geq\frac{1-n_3+n_4}{\vartheta}\left[e^{-\vartheta t}-e^{-\vartheta T}\right]+e^{-\vartheta t}, \\ 0, \quad если\ \frac{a}{\omega}B\left[e^{-\omega t}-e^{-\omega T}\right]< \\ <\frac{1-n_3+n_4}{\vartheta}\left[e^{-\vartheta t}-e^{-\vartheta T}\right]+e^{-\vartheta t}, \end{cases}$$

где $\omega=\delta+\mu-\alpha$, $\vartheta=\delta+\mu$.

Выгодно привлекать финансовые ресурсы для развития основных фондов до тех пор, пока дополнительная прибыль, полученная в результате прироста капитала, умноженная на временной коэффициент приведения, больше суммы налоговых ставок и временного коэффициента приведения.

Подставляя (22) в (17), получим условия привлечения собственных финансовых ресурсов для увеличения трудовых ресурсов:

$$u_2(t)=\begin{cases} I_2(t), \quad если\ \frac{a}{\varphi}C\left[e^{-\varphi t}-e^{-\varphi T}\right]\geq \\ \geq\frac{1-n_3+n_2}{\delta}p_2\left[e^{-\delta t}-e^{-\delta T}\right]+e^{-\delta t}, \\ 0, \quad если\ \frac{a}{\varphi}C\left[e^{-\varphi t}-e^{-\varphi T}\right]< \\ <\frac{1-n_3+n_2}{\delta}p_2\left[e^{-\delta t}-e^{-\delta T}\right]+e^{-\delta t}, \end{cases}$$

где $\varphi=\delta-\alpha$.

Выгодно привлекать финансовые ресурсы для увеличения количества работников до тех пор, пока дополнительная прибыль, полученная в результате прироста труда, умноженная на временной коэффициент приведения, больше суммы ставки заработной платы и временного коэффициента приведения.

С учетом (21), (22) уравнение (19) запишется:

$$e^{\mu t}\left\{\frac{a}{\delta+\mu-\alpha}B\left[e^{-(\delta+\mu-\alpha)t}-e^{-(\delta+\mu-\alpha)T}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{1-n_3+n_4}{\delta+\mu}\left[e^{-(\delta+\mu)t}-e^{-(\delta+\mu)T}\right]\right\}-e^{-\delta t}=0, \tag{23}$$

$$\frac{a}{\delta-\alpha}C\left[e^{-(\delta-\alpha)t}-e^{-(\delta-\alpha)T}\right]-$$
$$-\frac{1-n_3+n_2}{\delta}p_2\left[e^{-\delta t}-e^{-\delta T}\right]-e^{-\delta t}=0. \tag{24}$$

Из решения уравнений (23) и (24) определится точка прекращения собственных инвестиций в основные фонды и трудовые ресурсы.

В частном случае отсутствия научно-технического прогресса ($\alpha=0$) возможно аналитическое решение уравнений (23) и (24). Время прекращения инвестиций в основные фонды определится:

$$t^*_{u1}=T+\frac{1}{\delta+\mu}\left\{\ln\left[\frac{a}{\delta+\mu}B-\frac{1-n_3+n_4}{\delta+\mu}-1\right]-\right.$$
$$\left.-\ln\left[\frac{a}{\delta+\mu}B-\frac{1-n_3+n_4}{\delta+\mu}\right]\right\}.$$

Время прекращения инвестиций в трудовые ресурсы определится:

$$t^*_{u2}=T+\frac{1}{\delta}\left\{\ln\left[\frac{a}{\delta}C-\frac{1-n_3+n_2}{\delta}p_2-1\right]-\right.$$
$$\left.-\ln\left[\frac{a}{\delta}C-\frac{1-n_3+n_2}{\delta}p_2\right]\right\}.$$

Заключение

На первоначальном этапе развития фирмы оптимальной стратегией является привлечение финансовых ресурсов для вложения в основные фонды и трудовые ресурсы с максимально возможной интенсивностью. По истечении определенного промежутка времени, зависящего от величины прибыли, получаемой от приращения основных фондов и трудовых ресурсов, привлечение финансовых средств становится невыгодным. Использование заемных средств предпочтительнее, чем собственных, если коэффициент дисконтирования больше натурального логарифма ставки кредитования, увеличенной на единицу: $\delta > ln(1+r)$.

Для случая линейной производственной функции время прекращения инвестиций в капитал и труд находится из решения трансцендентных уравнений. В случае отсутствия научно-технического прогресса время прекращения инвестиций в основные фонды и трудовые ресурсы определяется по аналитическому выражению.

Список литературы

1. Лагоша Б. А. Оптимальное управление в экономике: Учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2003.

2. Горелик В. А., Кононенко А. Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М.: Радио и связь, 1982.

3. Соколовский Л. Е. Модели оптимального функционирования предприятия. М.: «Наука», 1980.

4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: «Наука», 1983.

OPTIMAL STRATEGIES OF ATTRACTING FINANCIAL RESOURSE FOR LONG-TERM COMPANY DEVELOPMENT

© 2004 O. V. Pavlov

Samara State Aerospace University

The task of long-term managing financial resources of product company is considered. It is assumed that a company can develop due to its “inner” sources (profit) or “outer” financial resources (various investment funds, bank credits).

The task is formulated as one of optimal management. Using the Pontryagin maximum principle optimal conditions of attracting both “inner” and “outer” financial resources for the development of the fixed assets and the increase of the number of the company’s employs are determined.