

СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ОДНОРОТОРНОГО ГИРОСТАТА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ БОЛЬШОЙ ВЯЗКОСТИ

© 2012 А. В. Алексеев, С. П. Безгласный, В. С. Красников

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

В настоящей работе исследуется движение относительно центра масс однороторного гиростата с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью. Приводятся динамические уравнения движения в проекциях угловой скорости несущего тела на оси связанной системы координат. Определяются условия устойчивости и неустойчивости движения по первому приближению. Для неустойчивых режимов движения синтезируется активное стабилизирующее управление по принципу обратной связи.

Гиростат, устойчивость, активное управление, стабилизация, система с жидкостью.

Введение

Некоторые типы космических аппаратов (КА) имеют массивные вращающиеся элементы, которые обеспечивают стабилизацию пространственного положения КА, а также участвуют в управлении угловым движением. Кроме того на борту КА имеется запас жидкого топлива, необходимого для его корректного функционирования [1]. И вращающиеся роторы, и жидкое топливо существенно влияют на движение КА вокруг центра масс. Математическая модель и некоторые аналитические соотношения параметров движения исследуемой системы получены в работе [2]. В данной работе ставится задача исследования устойчивости и стабилизации неустойчивых режимов движения однороторного гиростата с полостью, целиком заполненной жидкостью (рис.1).

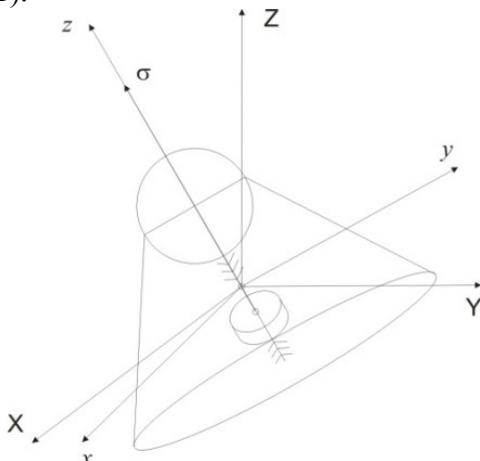


Рис. 1. Схема гиростата с полостью и используемые системы координат

Уравнения движения

Уравнения движения однороторного гиростата с полостью, заполненной жидкостью, в проекциях на оси связанной системы координат, записываются в следующем виде [2]:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - B)qr + C_2 q\sigma &= m_x, \\ B\dot{q} + (A - C)pr - C_2 p\sigma &= m_y, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} C\dot{r} + (B - A)pq + C_2 \dot{\sigma} &= m_z, \\ C_2(\dot{r} + \dot{\sigma}) &= M_z, \end{aligned} \quad (2)$$

где A , B , C - главные моменты инерции гиростата, вычисленные в связанной системе координат. Уравнение (2) представляет собой уравнение относительного вращения ротора, M_z - момент, действующий со стороны несущего тела на ротор. Будем рассматривать движение при отсутствии указанного момента. Тогда уравнение (2) приводится к следующему виду:

$$\dot{\sigma}_3 = -\dot{r} \quad (3)$$

Правые части уравнений (1) представляют собой проекции момента сил, действующих на несущее тело со стороны полости с жидкостью:

$$\mathbf{m} = -\left[\frac{d\tilde{\mathbf{L}}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} \right]. \quad (4)$$

Гиростатический момент жидкости будем определять по формуле [3]:

$$\mathbf{L} = -\frac{\rho}{v} \mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{\rho}{v} P \mathbf{E} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}},$$

где $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{p}, \dot{q}, \dot{r})$ - вектор углового ускорения несущего тела, P - коэффициент, учитывающий форму полости. Учитывая

вышесказанное, равенство (4) можно переписать в виде:

$$\mathbf{m} = -\frac{\rho}{v} P \mathbf{g},$$

где $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)^T$, $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \ddot{p} + q\dot{r} - r\dot{q} \\ \ddot{q} + r\dot{p} - p\dot{r} \\ \ddot{r} + p\dot{q} - q\dot{p} \end{bmatrix}$.

Выражения (1), (3) представляют собой динамические уравнения движения рассматриваемой системы. Система динамических уравнений замыкается известными кинематическими уравнениями Эйлера.

Введем в уравнениях (1), (3) новую переменную:

$$s = [(C - A)r + C_2\sigma]A^{-1}.$$

С учетом новой переменной и результатами интегрирования (3) динамические уравнения (1) примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{p} + sq &= \frac{\rho}{v} \frac{1}{A} \frac{P}{C_1 - A} ps [C_1 s - C_2 (r_0 + \sigma_0)], \\ \dot{q} - sp &= \frac{\rho}{v} \frac{1}{A} \frac{P}{C_1 - A} qs [C_1 s - C_2 (r_0 + \sigma_0)], \\ \frac{C_1}{C_1 - A} \dot{s} &= -\frac{\rho}{v} \frac{P}{A} s (p^2 + q^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Стационарные режимы движения и их устойчивость

Определим для данной системы стационарные режимы движения, под которыми понимается постоянство проекций вектора угловой скорости на оси связанной системы координат, то есть $\dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0$, тогда:

$$\begin{aligned} sq &= \frac{\rho}{v} \frac{1}{A} \frac{P}{C_1 - A} ps [C_1 s - C_2 (r_0 + \sigma_0)], \\ -sp &= \frac{\rho}{v} \frac{1}{A} \frac{P}{C_1 - A} qs [C_1 s - C_2 (r_0 + \sigma_0)], \\ -\frac{\rho}{v} \frac{P(C_1 - A)}{AC_1} s (p^2 + q^2) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решая систему уравнений (6), получаем два стационарных движения:

$$\begin{aligned} 1) p = q = 0, s = u = const; \\ 2) p = a = const, q = b = const, s = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Исследуем на устойчивость найденные стационарные режимы. Для этого составим уравнения возмущенного движения

однороторного гиростата и уравнения их первого приближения. Зададим отклонения x_1, x_2, x_3 от исследуемых движений соответствующими равенствами:

$$\begin{aligned} 1) p = x_1, q = x_2, s = x_3 + u; \\ 2) p = x_1 + a; q = x_2 + b; s = x_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (8) в (5) и проводя линеаризацию полученных уравнений по отклонениям, получим уравнения первого приближения вида $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, или в скалярном виде:

$$1) \begin{cases} \dot{x}_1 = Mx_1 + Nx_2, \\ \dot{x}_2 = Fx_1 + Ex_2, \\ \dot{x}_3 = 0, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \dot{x}_1 = Tx_3, \\ \dot{x}_2 = Vx_3, \\ \dot{x}_3 = Kx_3, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} E = M &= \frac{\rho}{v} \frac{1}{A} \frac{P}{C_1 - A} [C_1 u^2 - C_2 u (r_0 + \sigma_0)], \\ T &= -b - \frac{\rho}{v} \frac{1}{A} \frac{PC_2 a}{C_1 - A} (r_0 + \sigma_0), \\ V &= a - \frac{\rho}{v} \frac{1}{A} \frac{PC_2 b}{C_1 - A} (r_0 + \sigma_0), \\ K &= -\frac{\rho}{v} \frac{P}{AC_1} (a^2 + b^2) (A - C_1), \\ F &= -N = u. \end{aligned} \quad (10)$$

Составляя характеристическое уравнение и решая его относительно λ , получим следующие корни:

$$\begin{aligned} 1) \lambda_1 = 0, \operatorname{Re}(\lambda_2) = E, \operatorname{Re}(\lambda_3) = E; \\ 2) \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = K. \end{aligned} \quad (11)$$

Величины E и K в равенствах (11) могут быть либо положительные, либо отрицательные в зависимости от параметров системы и начальных данных.

При $\operatorname{Re}(\lambda_2) = E < 0$ и $\operatorname{Re}(\lambda_3) = K < 0$, ввиду отсутствия нулевых корней, согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению выводов об асимптотической устойчивости стационарных движений сделать нельзя, и данные движения необходимо исследовать другими методами теории устойчивости. А при выполнении неравенства $\operatorname{Re}(\lambda_2) = E > 0$ и $\operatorname{Re}(\lambda_3) = K > 0$ можно сделать вывод о неустойчивости таких движений [4].

Стабилизация неустойчивых режимов

Решим задачу о стабилизации первого неустойчивого стационарного решения (7) при условии, что $Re(\lambda_2) = Re(\lambda_3) = E > 0$. Определим и добавим в систему линейное управление вида $u = Vx$, приводящее неустойчивый режим к асимптотически устойчивому [5]. При этом уравнения первого приближения (9) примут вид $\dot{x} = Ax + Vx$.

Выберем матрицу V следующим образом:

$$V = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Согласно критерию управляемости автономных систем, система управляема, если ранг соответствующей матрицы управляемости равняется размерности фазового пространства, то есть трем. Легко убедиться, что при выборе управления вида (12) этот критерий выполнен.

Составим линеаризованную управляемую систему, с управлением (12):

$$A + V = \begin{pmatrix} M + b_{11} & N & 0 \\ F + b_{12} & E & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Для того, чтобы управляемое движение было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все корни соответствующего характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части. Подберем элементы b_{11} , b_{21} , b_{33} таким образом, чтобы характеристическое уравнение совпало с уравнением $(-\lambda - 1)^3 = 0$, все решения которого равны -1. С помощью метода неопределённых коэффициентов найдём элементы матрицы V :

$$b_{11} = -2 - M - E,$$

$$b_{21} = \frac{1 + 2E + E^2 - F^2}{F},$$

$$b_{33} = -1.$$

Для иллюстрации полученного результата на рисунках 2 – 4 приведены графики отклонений от стационарных режимов параметров движения, полученных

с применением стабилизирующего управления.

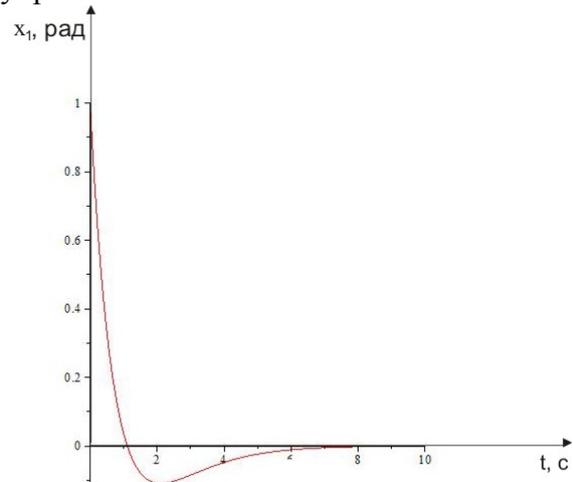


Рис. 2. Зависимость отклонения $x_1(t)$ для управления (12)

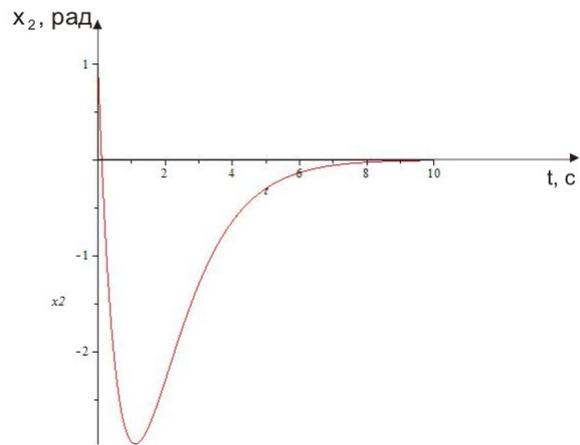
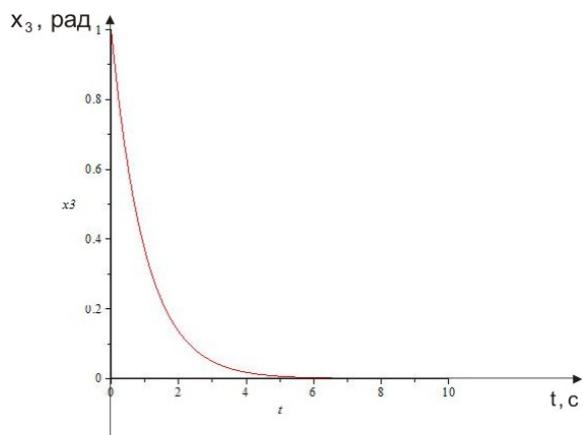


Рис. 3. Зависимость отклонения $x_2(t)$ для управления (12)



4. Зависимость отклонения $x_3(t)$

Рис.

Асимптотическая сходимость графиков к нулю демонстрирует асимптотическую устойчивость исследуемого первого стационарного режима движения, реализуемую стабилизирующим управлением (12).

Далее решим задачу о стабилизации второго неустойчивого стационарного режима соотношения (7) при условии, что $Re(\lambda_3) = K > 0$. Выберем управление следующим образом:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & b_{23} & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Составим линеаризованную управляемую систему, которая с управлением (14) примет вид:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & T \\ 0 & b_{22} & V \\ 0 & b_{32} & K \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Аналогично проведенным для первого случая операциям, найдем элементы матрицы управления:

$$b_{11} = -1,$$

$$b_{22} = -2 - K,$$

$$b_{32} = -\frac{1 + 2K + K^2}{F}.$$

По рисункам 5 – 7 видно, что полученное управление действительно стабилизирует движение и делает его асимптотически устойчивым.

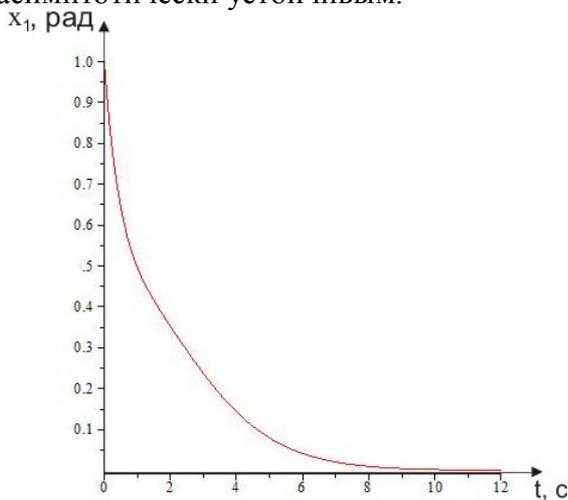


Рис. 5. Зависимость отклонения $x_1(t)$ для управления (14)

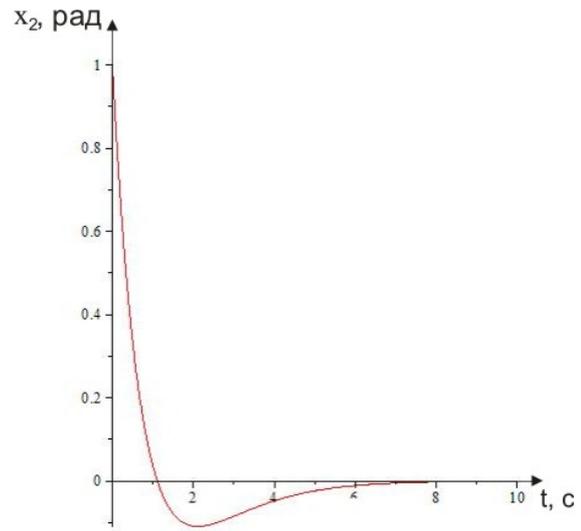


Рис. 6. Зависимость отклонения $x_2(t)$

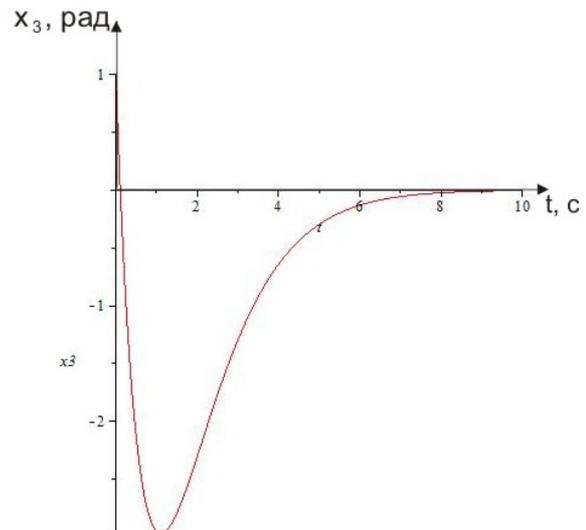


Рис. 7. Зависимость отклонения $x_3(t)$

Таким образом, приведена математическая модель движения относительно центра масс однороторного гиростата с полостью, заполненной вязкой жидкостью, найдены и исследованы на устойчивость стационарные режимы и получено управление по принципу обратной связи, обеспечивающее асимптотическую устойчивость стационарных режимов движения.

Результаты статьи получены при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (соглашение № 14.В37.21.0203), Российского фонда фундаментальных исследований

(проекты № 11-08-00794 - а, № 12-01-00317 -а).

Библиографический список

1. Алексеев, А.В. Исследование движения разгонного блока с тороидальным баком относительно центра масс в параметрах Кэли-Клейна /А.В. Алексеев, В.С. Красников // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева (национального исследовательского университета). 2011 № 6, С. 9-14/
2. Алексеев, А.В. Движение спутника-гиростата, содержащего полость с жидкостью большой вязкости [Текст] / А.В.

Алексеев // Известия СЦ РАН. № 9. – 2007. – С.671-676.

3. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость [Текст] / Ф.Л. Черноусько // – М.: Изд. ВЦ АН СССР. – 1968.

4. Афанасьев, В.Н. Математическая теория конструирования систем управления [Текст] / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов // М.: Высш. шк., 1965. – 447 с.

5. Александров, В.В. Оптимальное управление движением [Текст] / В.В. Александров, В.Г. Болтянский, С.С. Лемак, Н.А. Парусников, В.М. Тихомиров // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 376 с.

STABILIZATION OF STEADY MOTIONS OF A SINGLE ROTOR GYROSTAT WITH A CAVITY FILLED WITH A LIQUID OF HIGH VISCOSITY

© 2012 A. V. Alekseev, S. P. Bezglasny, V. S. Krasnikov

Samara State Aerospace University
named after academician S.P. Korolyov (National Research University)

The present paper investigates the motion of the mass center-rotor gyrostат with a cavity completely filled with a viscous liquid. Are given the dynamic equations of motion in angular rate on the axis of the body of the carrier-related coordinate system. The conditions of stability and instability of motion in the first approximation. For unstable regimes of motion is synthesized by active stabilizing control by the feedback principle.

Gyrostат, stability, active control, stabilization, system with liquid

Информация об авторах

Алексеев Алексей Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: alexeeff05@mail.ru. Область научных интересов: динамика систем твёрдых тел, динамика систем переменного состава, движение твёрдых тел с жидкостью.

Безгласный Сергей Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: bezglasnsp@rambler.ru. Область научных интересов: теория управления и устойчивости, динамика систем твёрдых тел.

Красников Виктор Сергеевич, магистрант, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: walkthrough@mail.ru. Область научных интересов: движение твёрдых тел с жидкостью, динамика систем твёрдых тел.

Alekseev Aleksey Vladimirovich, candidate of technical sciences, associate professor. Samara State Aerospace University. E-mail: alexeeff05@mail.ru. Area of research: dynamics of systems of rigid bodies, dynamics of systems of variable composition, movement of solids with liquids.

Bezglasnyi Sergey Pavlovich, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor. Samara State Aerospace University. E-mail: bezglasnsp@rambler.ru. Area of research: theory of control and stability, dynamics of systems of rigid bodies.

Krasnikov Victor Sergeevich, student of Samara State Aerospace University. E-mail: walkthrough@mail.ru. Area of research: movement of solids with liquids, dynamics of systems of rigid bodies.