

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА АППРОКСИМАТИВНОГО КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

© 2004 С. А. Прохоров¹, М. А. Кудрина¹, К. А. Кудрин²

¹Самарский государственный аэрокосмический университет

²Самарский центр стандартизации, сертификации и метрологии

Приводится описание автоматизированной информационной системы аппроксимативного анализа случайных процессов, с помощью которой осуществляется моделирование случайных процессов с заданным видом корреляционной функции, идентификация корреляционных функций по фазовым портретам, аппроксимация корреляционных функций и спектральных плотностей мощности параметрическими моделями и ортогональными функциями Лагерра, оценка обобщенных корреляционно-спектральных характеристик по параметрам модели.

На кафедре информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета разработана автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа случайных процессов (СП), используемая как при подготовке специалистов в области обработки информации и управления, так и при проведении научных исследований. Данная автоматизированная система позволяет моделировать случайные процессы с шестью типовыми моделями корреляционных функций (КФ) (табл. 1), проводить аппроксимацию КФ функциями заданного вида (методами Ньютона и деформируемого многогранника) и ортогональными функциями Лагерра.

Автоматизированная учебно-исследовательская система включает в себя следующие подсистемы:

- задания входных воздействий;
- генерирования неэквидистантных временных рядов;
- первичной и вторичной статистической обработки;
- идентификации корреляционных функций;
- аппроксимативного анализа;
- спектрального анализа;
- работы с базой данных.

Подсистема задания входных воздействий состоит из двух частей: генерирования псевдослучайной последовательности с заданным видом КФ и ввода данных из файла.

Генерирование псевдослучайной последовательности с заданным видом КФ осуществляется методом рекурсивной фильтрации [1].

Подсистема генерирования НВР включает в себя следующие способы получения неэквидистантных временных рядов: p -преобразования, дискретизация с “дрожанием”, дискретизация с “дрожанием” и пропусками наблюдений, аддитивная случайная дискретизация, аддитивная случайная дискретизация с пропусками наблюдений, аддитивная случайная дискретизация с “дрожанием” и пропусками наблюдений, адаптивно-временная дискретизация [2, 3].

Подсистема первичной статистической обработки включает в себя оценку числовых характеристик, центрирование и нормирование СП и оценку КФ. В данную

Таблица 1

Типовые модели корреляционных функций

№	Модель корреляционной функции
1	$K_{a1}(\tau) = e^{-\alpha \tau }$
2	$K_{a2}(\tau) = e^{-\alpha \tau }(1+\alpha \tau)$
3	$K_{a3}(\tau) = e^{-\alpha \tau }(1-\alpha \tau)$
4	$K_{a4}(\tau) = e^{-\alpha \tau } \cos \omega_0 \tau$
5	$K_{a5}(\tau) = e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$
6	$K_{a6}(\tau) = e^{-\alpha \tau } \left(\cos \omega_0 \tau - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0 \tau \right)$

подсистему передаются массивы меток времени и соответствующих им отсчетов СП, объем выборки N и интервал дискретизации Δt_0 .

В ходе работы данной подсистемы производится оценка математического ожидания и дисперсии, далее входной СП центрируется и нормируется, а затем производится оценка КФ с помощью интервальной корреляционной функции [2].

Подсистема идентификации КФ состоит из двух частей: построения и анализа фазовых портретов и проверки качества идентификации.

В данной подсистеме производится построение фазового портрета КФ [4], а затем его последовательное сравнение с фазовыми портретами типовых КФ, используемых в системе. На основании результатов сравнения выбирается одна из типовых моделей КФ, при помощи которой в следующей подсистеме производится аппроксимация исходной КФ. Проверка качества идентификации производится на основании расчета квадратической погрешности фазового портрета.

Подсистема аппроксимативного анализа состоит из двух частей: аппроксимации КФ функциями заданного вида и ортогональными функциями Лагерра [4].

В данной подсистеме вычисляются неизвестные параметры аппроксимирующих выражений и среднеквадратическая погрешность аппроксимации. Найденные численные значения параметров моделей корреляционных функций позволяют по известным формулам находить интервалы корреляции, моментные характеристики, спектральную плотность мощности.

В подсистеме спектрального анализа производится оценка спектральной плотности мощности СП по результатам аппроксимации корреляционной функции СП, а также оценка обобщающих спектральных характеристик СП, таких как эквивалентная ширина спектра мощности процесса, частота, соответствующая максимуму спектральной плотности мощности [4, 5].

Подсистема работы с базой данных предназначена для автоматизированного моделирования и обработки СП и занесения параметров СП в базу данных для последующего вычисления усредненных результатов моделирования и аппроксимации.

Благодаря такому блочному построению структуры программы в систему можно добавлять новые модули, не изменяя ее принципиально.

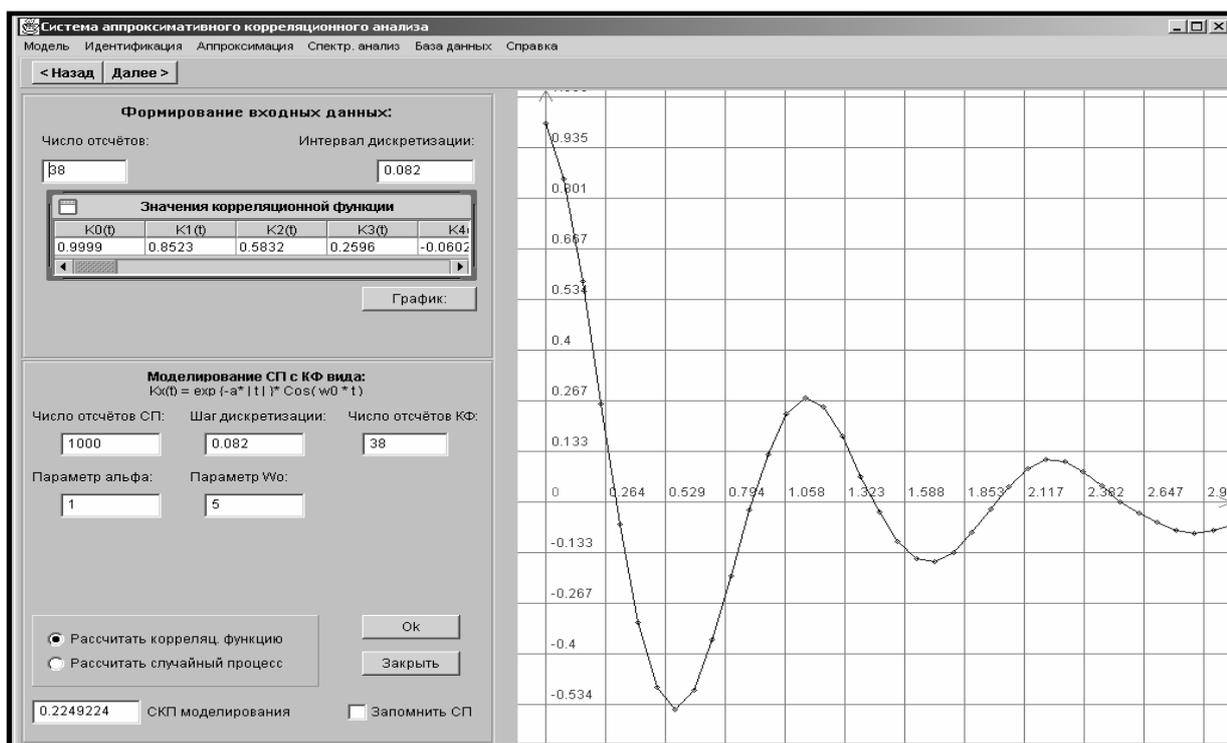


Рис. 1. Вид формы генерирования СП с заданным видом КФ

Рассмотрим программную реализацию.

Генерирование СП с заданным видом КФ. Основной формой работы автоматизированной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа является форма генерирования СП с заданным видом КФ (рис. 1).

Главное меню данной формы содержит следующие пункты:

Модель – выбор вида КФ моделируемого СП, работа с файлами, завершение работы с программой.

Идентификация – выбор способа идентификации (автоматическая позволяет строить фазовые портреты КФ и на основании их схожести с фазовыми портретами стандартных КФ выбирать вид аппроксимирующей модели, аналитическая позволяет выбирать вид КФ на основании визуальных представлений стандартных КФ).

Аппроксимация – выбор способа аппроксимации (функциями заданного вида при схожести исследуемой КФ с одним из стандартных ее видов; функциями Лагерра в случае, когда КФ не похожа ни на один из предложенных ее видов).

Спектральный анализ позволяет производить оценку спектральной плотности мощности СП по результатам параметрической

аппроксимации.

База данных – открытие и работа с базой данных.

Справка – предоставление справки о программе.

Идентификация вида КФ. Общий вид формы идентификации КФ на основе анализа фазовых портретов представлен на рис. 2. (Под фазовым портретом здесь понимается график КФ, построенный в координатах $[K_x(\tau); K'_x(\tau)]$).

Для идентификации КФ необходимо сравнивать ее фазовый портрет с типовыми фазовыми портретами из списка. Если результаты идентификации удовлетворительны и вид КФ определен, можно переходить в форму аппроксимации КФ функциями заданного вида, где будет проводиться аппроксимация КФ моделью, выбранной при идентификации. В случае, если идентифицировать КФ не удалось, необходимо производить аппроксимацию КФ ортогональными функциями Лагерра.

Аппроксимация КФ функциями заданного вида. В случае, если вид КФ известен или его удалось идентифицировать, следует аппроксимировать КФ функциями заданного вида.

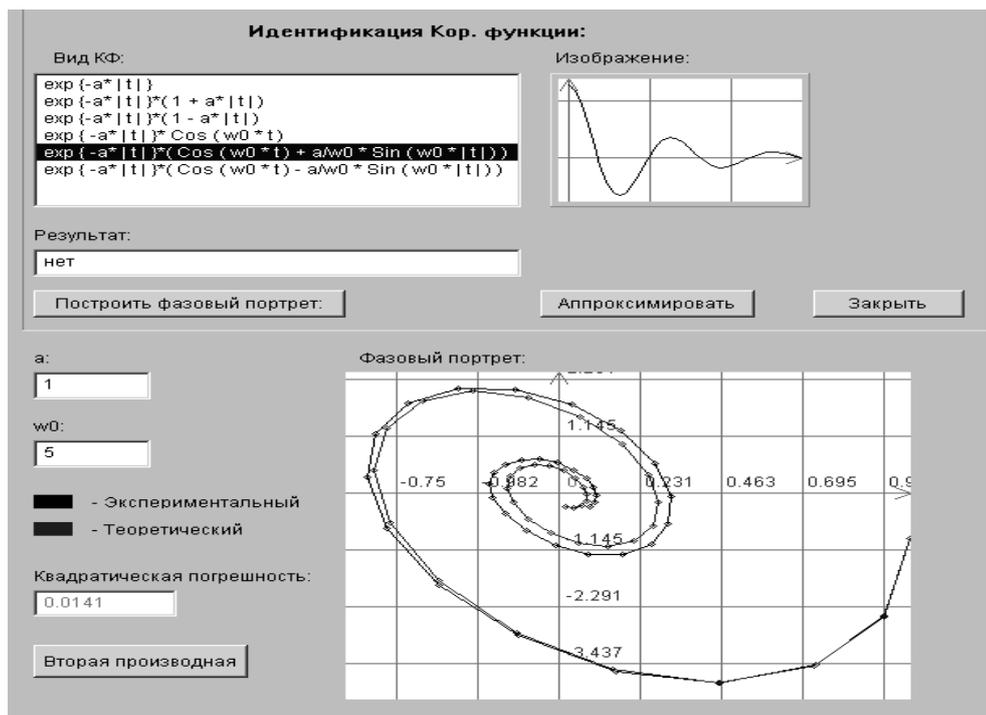


Рис. 2. Окно идентификации КФ при помощи анализа фазовых портретов

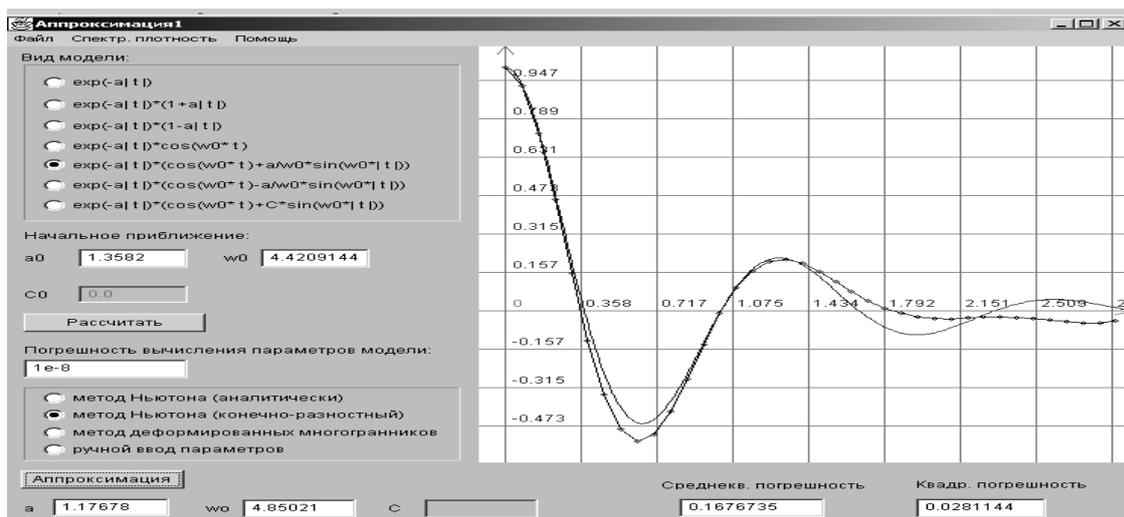


Рис. 3. Вид формы аппроксимации КФ функциями заданного вида

Среднеквадратичная аппроксимация функции - это нахождение для заданной функции другой функции из некоторого класса функций, для которой среднеквадратичное отклонение от заданной функции минимально.

При выбранной аналитической модели задача сводится к определению неизвестных параметров, удовлетворяющих минимуму квадратической погрешности аппроксимации:

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{i=0}^N \left[\hat{K}_x(\tau_i) - K_a(\tau_i, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \right]^2 = \min$$

Условием минимума погрешности Δ является следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}{\partial \alpha_k} = 0,$$

где $k = 1, 2, \dots, m$, решение которой определяет неизвестные параметры $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

В случае, если модель содержит один параметр, задача сводится к решению одного уравнения:

$$\frac{\partial \Delta(\alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{i=0}^N [\rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha)] \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

Если для решения полученного уравнения воспользоваться методом Ньютона, то получится следующее выражение:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{\sum_{i=0}^N R_i \frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha = \alpha_n}}{\sum_{i=0}^N \left\{ R_i \frac{\partial^2 \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha^2} - \left[\frac{\partial \rho_a(\tau_i, \alpha)}{\partial \alpha} \right]^2 \right\} \Big|_{\alpha = \alpha_n}},$$

где $R_i = \rho_x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, \alpha)$.

Начальное приближение $\alpha_0 = \frac{3}{\tau_{k \max}}$.

Процесс вычисления заканчивается, когда $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leq \varepsilon$, где ε - любое малое наперед заданное число.

Общий вид формы аппроксимации КФ функциями заданного вида представлен на рис. 3.

Для проведения аппроксимации КФ функциями заданного вида в автоматизированной системе реализованы три метода:

- метод Ньютона (с аналитическим взятием производных);
- метод Ньютона (с конечно-разностным взятием производных);
- метод деформируемого многогранника.

Аппроксимация КФ ортогональными функциями Лагерра. В тех случаях, когда вид КФ не известен или не может быть идентифицирован, можно произвести аппроксимацию КФ ортогональными функциями Лагерра, которые определяются выражением

$$L_k(\tau) = \sum_{s=0}^k \frac{k!}{(k-s)!} \frac{(-\alpha\tau)^s}{(s!)^2} e^{-\frac{\alpha\tau}{2}}.$$

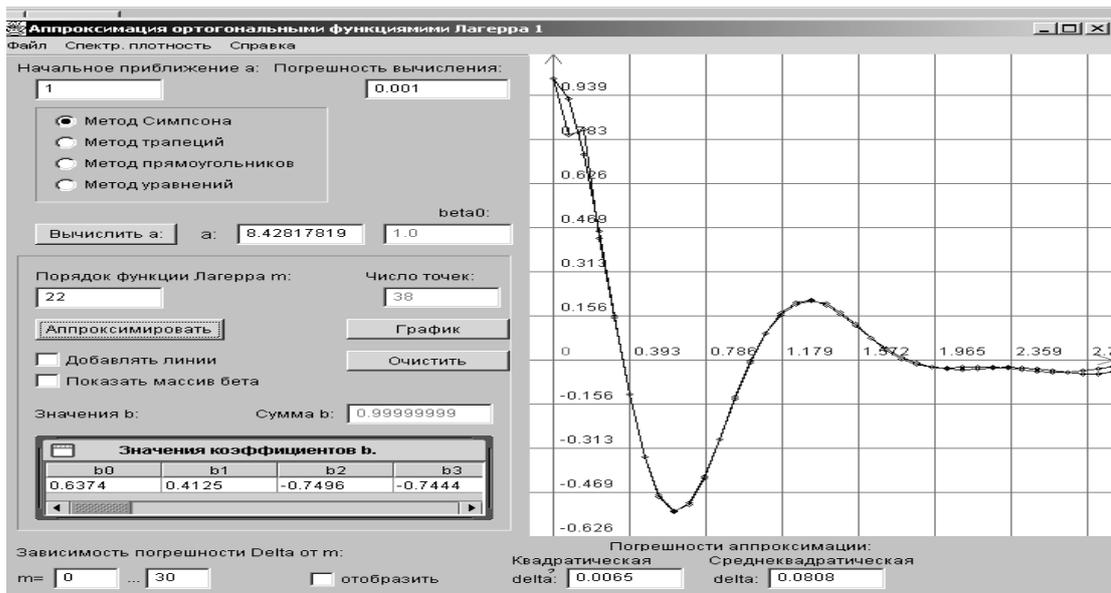


Рис. 4. Вид формы аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра

Аппроксимирующее выражение имеет следующий вид [4]:

$$K_a(\tau) = \sum_{k=0}^m b_k L_k(\tau, \alpha),$$

где $b_k = \beta_k + \frac{D_x - \sum_{k=0}^m \beta_k}{m+1}$,

$$\beta_k = \alpha \int_0^{\wedge} K_x(\tau) L_k(\tau) d\tau.$$

Выбор параметра α , необходимого для вычисления коэффициентов b и β , в данной

системе осуществляется путем решения уравнения $\beta_0 = \sigma_x^2$ методом Ньютона. Обоснование метода определения значения параметра α приведено в [4].

Общий вид формы аппроксимации КФ ортогональными функциями Лагерра представлен на рис. 4.

Спектральный анализ. Спектральная плотность мощности определяется выражением

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Однако процесс вычисления спектральной плотности мощности можно значитель-

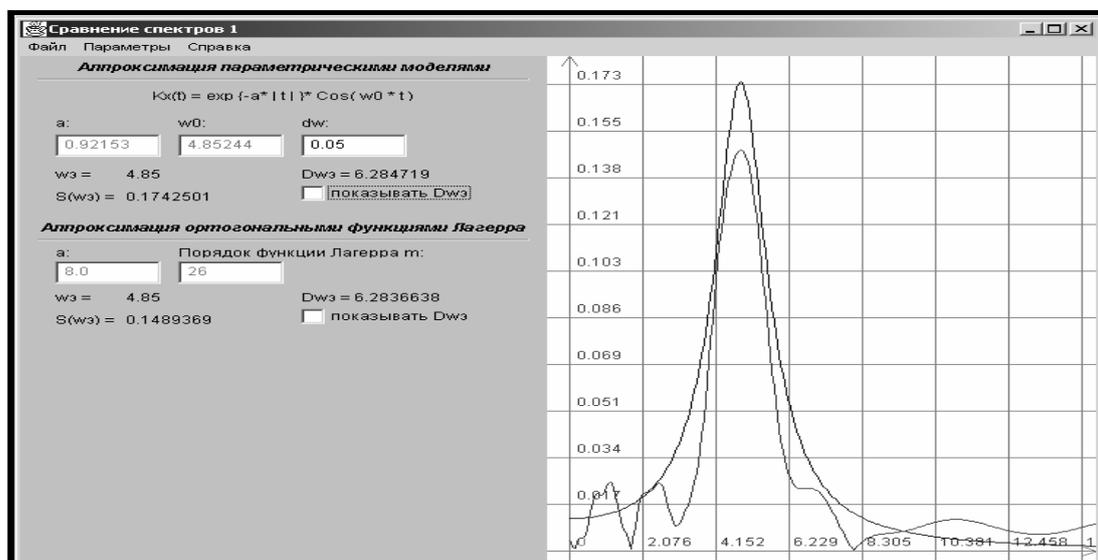


Рис. 5. Вид формы спектрального анализа

но облегчить, предварительно аппроксимировав КФ функциями заданного вида или ортогональными функциями Лагерра. В этом случае спектральная плотность мощности может быть вычислена при помощи заранее известных аналитических выражений, в которые подставляются параметры КФ, найденные при аппроксимации. Например, для СП с экспоненциальным видом КФ:

$K_x(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ спектральная плотность мощности вычисляется по формуле

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2 \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

Вид формы спектрального анализа представлен на рис. 5, где ω_3 – частота, соответствующая максимуму спектральной плотности мощности; $S(\omega_3)$ – значение максимума спектральной плотности мощности; $\Delta\omega_3$ – эквивалентная ширина спектра мощности, определяемая по формуле

$$\Delta\omega_3 = \frac{\sigma_x^2}{2S_x(\omega_3)_{\max}} + \omega_3.$$

Автоматизированная обработка данных. Для удобства работы с большим количеством однотипных данных была разработана подсистема автоматизированной обработки данных. Так, например, при проведении исследований оценки погрешности КФ

необходимо смоделировать 29 реализаций СП с одними и теми же параметрами для получения результатов с доверительной вероятностью 0,95 [6].

На рис. 6 представлен общий вид формы для работы с базой данных. В данной форме находятся две вкладки: “Моделирование СП” и “Аппроксимация КФ”.

Вкладка “Моделирование СП” предназначена для хранения экспериментальных данных (параметров случайных процессов, отсчетов корреляционных функций и результатов аппроксимации), автоматического моделирования случайных процессов с заданным видом корреляционной функции и статистической обработки результатов моделирования. При работе в данной вкладке формы также предусмотрена возможность визуального отображения коридора корреляционных функций случайных процессов в рамках отдельного эксперимента.

Вкладка “Аппроксимация КФ” содержит в себе две вкладки: для аппроксимации корреляционных функций функциями заданного вида и ортогональными функциями Лагерра.

Аппроксимацию можно производить в полуавтоматическом режиме, также существует возможность автоматической аппроксимации всех реализаций выбранного эксперимента при помощи функций заданного вида.

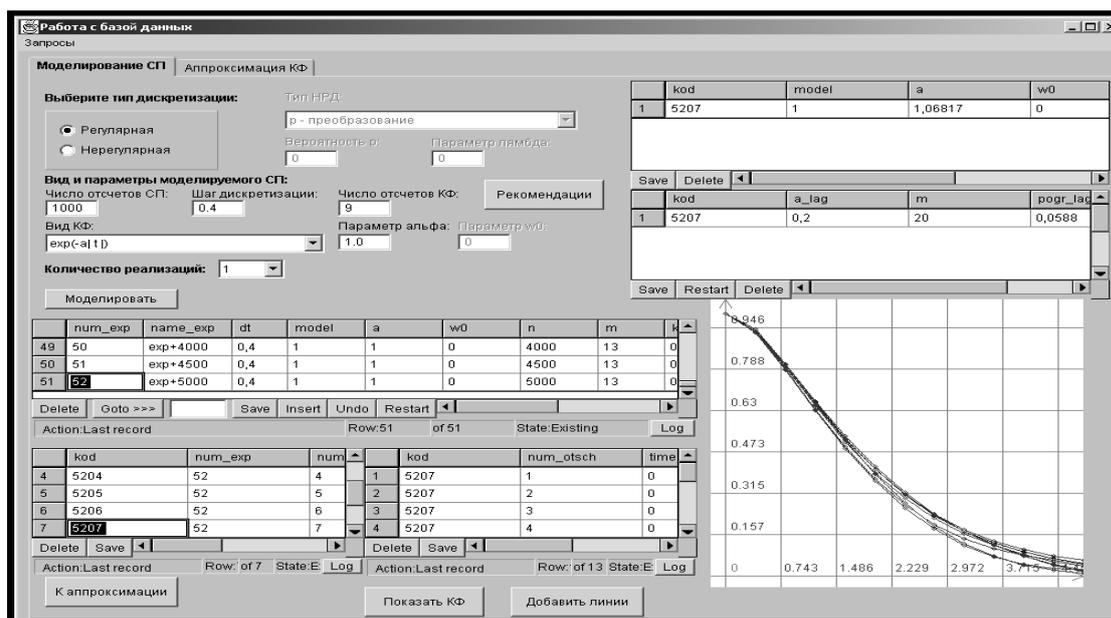


Рис. 6. Вид формы для работы с базой данных

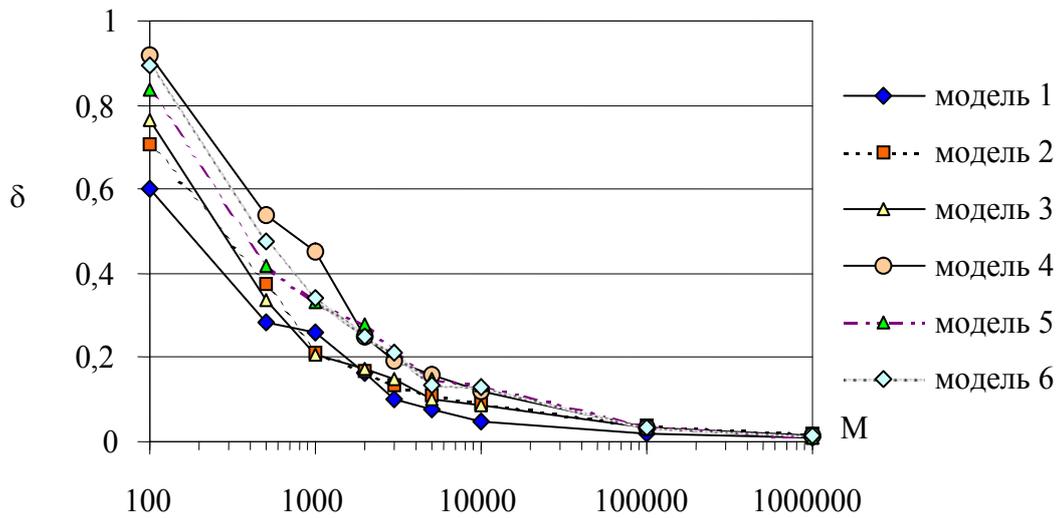


Рис. 7. Зависимость погрешности оценки КФ от числа отсчетов СП

На рис. 7 приведены результаты исследования, проведенного с использованием базы данных, по определению зависимости погрешности оценки корреляционной функции от числа отсчетов случайного процесса для случайных процессов с различными видами корреляционной функции (табл. 1).

Список литературы

1. Прохоров С. А. Математическое описание и моделирование случайных процессов/Самарский государственный аэрокосмический университет, 2001. – 209 с.
2. Прохоров С. А. Прикладной анализ неэквидистантных временных рядов/ Самарский государственный аэрокосмический уни-

верситет, 2001. – 375 с.

3. Прохоров С. А. Моделирование и анализ случайных процессов. Лабораторный практикум. – 2-е изд., перераб. и доп./ СНЦ РАН, 2002. – 277 с.

4. Прохоров С. А. Аппроксимативный анализ случайных процессов. – 2-е изд., перераб. и доп. / СНЦ РАН, 2001. – 380 с.

5. Романенко А. Ф., Сергеев Г. А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. – М.: “Советское радио”, 1968. – 256 с.

6. Методы нормирования метрологических характеристик, оценки и контроля характеристик погрешностей средств статистических измерений. РТМ 25 139-74//Мин-прибор. 1974. – 76 с.

COMPUTER-AIDED SYSTEM FOR APPROXIMATION CORRELATION-SPECTRAL ANALYSIS

© 2004 S. A. Prokhorov¹, M. A. Kudrina¹, K. A. Kudrin²

¹Samara State Aerospace University

²Samara State Center of Standardization, Measurement and Certification

The system is intended for modelling random processes with a preset type of correlation function, correlation function identification using the phase portrait method, approximation of correlation functions and spectral densities using parametric models and Lagerr orthogonal functions, estimation of generalized relative-and spectral characteristics using model parameters.