УДК 539.3

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ОПОРНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

© 2004 Б. А. Горлач, Г. Ю. Ермоленко

Самарский государственный аэрокосмический университет

Излагается метод решения задач математики и механики – метод опорных функций [1]. Идея метода излагается на примере решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, задачи Дирихле для эллиптического дифференциального уравнения и задачи теории упругости для анизотропного материала.

I. Пусть требуется решить задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + ... + a_n y\ (t) = f(t),$$
$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \tag{1}$$

Здесь $y(t)$ – искомая функция; $y^{(i)}(t)$ – производная искомой функции порядка i; $f(t)$ – свободный член уравнения; a_i – постоянные коэффициенты уравнения; $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, $y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$ - начальные условия.

Будем считать, что искомое решение $y(x)$ и свободный член $f(x)$ удовлетворяют условиям существования преобразования Лапласа. Тогда для (1) в образах будем иметь:

$$a_0 p^n (Y(p) - \frac{y(0)}{p} - .... - \frac{y^{(n-1)}(0)}{p^n}) + a_1 p^{n-1}(Y(p) -$$
$$- \frac{y(0)}{p} - .... - \frac{y^{(n-2)}(0)}{p^{n-1}}) + ... + a_n Y(p)) = F(p). \tag{2}$$

Здесь p – параметр преобразования Лапласа, $Y(p)$ – образ Лапласа искомого решения, $F(p)$ – образ Лапласа свободного члена уравнения.

Перепишем (2) в виде

$$Y(p) = \frac{F(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n} +$$
$$+ \frac{(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + ... + a_{n-1}) y(0) + ... + a_0 y^{(n-1)}(p)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n}. \tag{3}$$

Если ввести обозначения

$$(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + ... + a_{n-1}) y(0) +$$
$$+ ... + a_0 y^{(n-1)}(p) = \Psi(p),$$
$$\frac{1}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n} = G(p), \tag{4}$$

то соотношение (3) можно записать в виде

$$Y(p) = G(p)(F(p) + \Psi(p)). \tag{5}$$

Из соотношения (5) в соответствии с теоремой о свертке и свойствами преобразования Лапласа получаем

$$y(t) = \int_0^t G(t-\tau) f(\tau) d\tau + \int_0^t G(t-\tau) \psi(\tau) d\tau. \tag{6}$$

Здесь $G(t)$ – оригинал для образа Лапласа, $G(p)$ – функция Грина исходной краевой задачи, а $\psi(\tau)$ - оригинал для $\psi(p)$- образа Лапласа начальных условий.

Запишем (5) в виде

$$\frac{1}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_n} = G(p) = \frac{Y(p)}{F(p) + \Psi(p)}. \tag{7}$$

Из равенства (7) следует, что отношение образов Лапласа $Y(p)$ и $F(p) + \Psi(p)$ должно быть постоянным для любых решений исходной задачи (1) и представлять собой образ Лапласа ее функции Грина. Поэтому для того, чтобы найти образ Лапласа функции Грина исходной задачи Коши, достаточно взять произвольное решение – опорную функцию, вычислить образы Лапласа *Y(p)* и *F(p) + Ψ(p)* и поделить одно на другое.

Проиллюстрируем это на примере задачи Коши для уравнения второго порядка:

$$
\begin{aligned}
&a_0 y''(t) + a_2 y(p) = f(t),\\
&y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

1. Выберем в качестве опорной функции $y(t) = t^3$. Тогда $f(t) = a_0 6t + a_2 t^3$.

Вычислим начальные условия $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ и образы Лапласа этих функций. Будем иметь

$$Y(p) = \frac{6}{p^4}, \quad F(p) = \frac{a_0 6}{p^2} + \frac{a_2 6}{p^4},$$

откуда

$$G(p) = \frac{\dfrac{6}{p^4}}{\dfrac{a_0 6}{p^2} + \dfrac{a_2 6}{p^4}}$$

либо

$$G(p) = \frac{1}{a_0 p^2 + a_2}.$$

2. Выберем в качестве опорной функции $y(t) = \sin(kt)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
f(t) &= -a_0 k^2 \sin(kt) + a_2 \sin(kt) =\\
&= \sin(kt)(-a_0 k^2 + a_2).
\end{aligned}
$$

Вычислим начальные условия $y(0) = 0$, $y'(0) = k$ и образы Лапласа этих функций. Будем иметь

$$Y(p) = \frac{k}{p^2 + k^2},$$

$$F(p) + \Psi(p) = \frac{(-a_0 k^2 + a_2)k}{p^2 + k^2} + a_0 k$$

откуда

$$G(p) = \frac{\dfrac{k}{p^2 + k^2}}{\dfrac{(-a_0 k^2 + a_2)k}{p^2 + k^2} + a_0 k}$$

либо

$$G(p) = \frac{1}{a_0 p^2 + a_2}.$$

Видно, что в обоих случаях при столь не похожих опорных функциях получен один и тот же образ Лапласа функции Грина исходной задачи Коши. В качестве опорной функции можно брать любую функцию, имеющую производные - функции, отличные от тождественного нуля до порядка n – порядка уравнения включительно. Например, в случае дифференциального уравнения второго порядка опорная функция должна иметь производные, отличные от тождественного нуля до второго порядка. Поэтому в качестве опорных функций в этих примерах взяты t^3 и $\sin(kt)$. Если это условие не выполняется, то исходное дифференциальное уравнение относительно опорной функции вырождается в уравнение меньшего порядка.

Таким образом, из соотношения (6) и его образа Лапласа (5) следует, что для поиска решения задачи Коши не нужно решать дифференциальное уравнение, а достаточно методом опорных функции найти образ Лапласа функции Грина, умножить его на сумму образов Лапласа свободного члена и начальных условий и вычислить обратное преобразование Лапласа.

II. Аналогичная ситуация складывается в случае решения краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений. В случае задачи Дирихле

$$
\begin{aligned}
&div(k\nabla u(\bar{x})) - qu(\bar{x}) = f(\bar{x});\\
&u(\bar{x})\big|_S = \ (\bar{x})
\end{aligned}
\tag{9}
$$

для поиска функции Грина необходимо решить задачу

$$
\begin{aligned}
&div(k\nabla G(\bar{x})) - qu(\bar{x}) = \delta(\bar{x});\\
&G(\bar{x})\big|_S = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

В случае задачи Неймана

$$
\begin{aligned}
&div\,(\,k\nabla\, u\,(\,\bar{x}\,))\, -\, qu\,(\,\bar{x}\,)\, =\, f\,(\,\bar{x}\,);\\
&\left.\frac{\partial u(\,\bar{x}\,)}{\partial n}\right|_S \;=\; (\,\bar{x}\,)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

для поиска функции Грина необходимо решить задачу

$$
\begin{aligned}
&div\,(\,k\nabla\, G\,(\,\bar{x}\,))\, -\, qu\,(\,\bar{x}\,)\, =\, \delta\,(\,\bar{x}\,);\\
&\left.\frac{\partial G\,(\,\bar{x}\,)}{\partial n}\right|_S \;=\; 0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

В задачи для поиска функций Грина (10) и (12) не входят свободные члены уравнений и краевые условия задач Дирихле и Неймана, и они для всех возможных решений этих задач, определяемых краевыми условиями и свободными членами уравнений, всегда одни и те же. Поэтому найти функцию Грина задачи Дирихле или задачи Неймана для конечных областей произвольной формы можно методом опорных функций, не прибегая к решению задач (10) и (12). Действительно, в случае задачи Дирихле (9) решение $u(\bar{x})$ выражается через функцию Грина соотношением

$$
u(\bar{x}) = -k\int_S \varphi(\bar{y})\frac{\partial G(\bar{x}-\bar{y})}{\partial n}dS - \int_V G(\bar{x}-\bar{y})f(\bar{y})d\bar{y}.
\tag{13}
$$

Используя метод опорных функций, из соотношения (13), не решая задачу (10), можно найти функцию Грина. Для этого достаточно решить уравнение (13) относительно функции Грина G при выбранной опорной функции $u(\bar{x})$. Поскольку в уравнении (13) присутствуют свертки, то удобно решать его методом преобразования Фурье, предполагая наличие Фурье-образа у функции Грина, опорной функции и соответствующего свободного члена уравнения. Из всех возможных опорных функций удобнее взять такую, чтобы уравнение (13) для поиска функции Грина получилось легко решаемым. Если, например, в качестве опорной взять функцию, принимающую нулевые значения на границе области, то уравнение (13) примет вид

$$
u(\bar{x}) = -\int_V G(\bar{x}-\bar{y})f(\bar{y})d\bar{y}.
\tag{14}
$$

В этом случае Фурье-образ функции Грина $G^*(\bar{k})$ выразится через Фурье-образы опорной функции и вычисленной по ней правой части уравнения согласно теореме о свертке

$$
G^*(\bar{k}) = -\frac{u^*(\bar{k})}{f^*(\bar{k})}.
\tag{15}
$$

Выбор функций, дважды непрерывно дифференцируемых в рассматриваемой области и принимающих нулевые значения на ее границе, достаточно широк. В качестве таких функций можно, например, выбрать функции вида: $u(\bar{x}) = ((z-\gamma(x,y))^n$, где $z = \gamma(x,y)$ - уравнение границы области.

III. Работоспособность метода опорных функций проверялась на решении различных задач. Приведем здесь решение задачи Дирихле для эллиптического дифференциального уравнения в случае, когда рассматриваемая область представляет собой кольцо:

$$
\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + 0{,}3\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - 7u(x,y) = f(x,y).
\tag{16}
$$

Внутренний радиус кольца равняется 5π, а внешний - 10π. Опорное решение имеет вид

$$
u(x,y) = (x^2+y^2-(5\pi)^2)^2(x^2+y^2-(10\pi)^2)^2
$$

и принимает на границах кольца нулевое значение. По опорному решению вычисляется свободный член уравнения, а затем Фурье-образы опорного решения и свободного члена. Фурье-образ функции Грина находится как частное Фурье-образов опорного решения и свободного члена. В качестве контрольного решения выбирается функция

$$u(x,y)=\frac{(x+1)^{\frac{1}{4}}}{15}+1+\frac{(y+1)^{\frac{7}{15}}}{15}. \quad (17)$$

По контрольному решению вычисляется свободный член уравнения и краевое условие, по которым с помощью найденного Фурье-образа функции Грина строится решение задачи. Затем контрольное решение сравнивается с найденным по краевому условию и свободному члену. Результаты показали, что решения совпадают с точностью до третьего знака после запятой.

IV. Метод опорных функций можно применять и в задачах теории упругости, и при решении интегральных уравнений. Если можно выразить решение задачи в виде интегрального оператора, то его ядро может быть точно, либо, в крайнем случае, аналитически приближенно найдено методом опорных функций. Покажем, как этим методом решаются задачи теории упругости для анизотропных материалов при деформировании конечных тел произвольной формы.

Рассмотрим первую краевую задачу статической теории упругости для анизотропного материала:

$$\sigma_{ij,j}(\boldsymbol{x})=F_i(\boldsymbol{x}); \quad \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\{u_{i,j}(\boldsymbol{x})+u_{j,i}(\boldsymbol{x})\};$$
$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x})=\Gamma_{ijpq}\cdot\varepsilon_{pq}(\boldsymbol{x}); \quad u_i(\boldsymbol{x})\big|_S=u_{i0}(\boldsymbol{x}). \quad (18)$$

Здесь Γ_{ijpq} - компоненты тензора упругих постоянных, поверхность S - кусочно-гладкая, $\boldsymbol{x}$ - радиус-вектор точки пространства.

Для решения краевой задачи (18) вектор перемещений $u(\boldsymbol{x})$ представим в виде

$$u_i(\boldsymbol{x})=\int_V G_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})F_j(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}-$$
$$-\int_S u_{j0}(\boldsymbol{y}_S)(\sigma)_{ijq}(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_S))n_q(\boldsymbol{y}_S)dS, \quad (19)$$

где $G_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ - тензор Грина краевой задачи (18).

Соотношение (19) при известных вектор-функциях $u_i(\boldsymbol{x}), F_j(\boldsymbol{y})$ представляет собой интегральное уравнение для поиска неизвестного $G_{ij}(\boldsymbol{x})$ - тензора Грина краевой задачи (18). Выберем в качестве опорных несколько векторов $u(\boldsymbol{x})$, компоненты которых на поверхности S тела принимают нулевые значения. В этом случае уравнение (19) упростится:

$$u_i^{\ell}(\boldsymbol{x})=\int_V G_{ij}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})F_j^{\ell}(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \quad (20)$$

где индекс ℓ определяет номер выбранной опорной вектор-функции.

Воздействуя оператором Ламе

$$(\mathbf{L}\bullet\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))_i^{\ell}=\frac{\partial}{\partial x_j}[\Gamma_{ijkh}\frac{1}{2}(\frac{u_k^{\ell}(\boldsymbol{x})}{x_h}+\frac{u_h^{\ell}(\boldsymbol{x})}{x_k})]=F_i^{\ell}(\boldsymbol{x})$$

на выбранные опорные векторы перемещений, вычислим соответствующие им векторы массовых сил.

Преобразуем равенство (20) по Фурье. Согласно теореме о свертке по конечной области

$$u^*{}_i^{\ell}(\boldsymbol{k})=G^*{}_{ij}(\boldsymbol{k})F^*{}_j^{\ell}(\boldsymbol{k}). \quad (21)$$

Равенство (21) позволяет найти искомый тензор Грина краевой задачи (18):

$$G_{ij}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{R^3} e^{i\mathbf{k}\bullet\mathbf{x}}u^*{}_i^{\ell}(\boldsymbol{k})(F^*{}_j^{\ell}(\boldsymbol{k}))^{-1}d\boldsymbol{k}. \quad (22)$$

В качестве деформируемого тела рассматривается анизотропная прямоугольная пластина со стороной 20π и с круглым отверстием, смещенным относительно центра пластины. По двум выбранным опорным вектор-функциям определяется тензор Грина задачи. Далее, аналогично предыдущему, в качестве контрольного решения выбирается вектор-функция с компонентами:

$$u_x(x, y) = x + xy^3 / 10^5 - y^3 / 10^5 + x^2 / 5 \cdot 10^3;$$
$$u_y(x, y) = xy^3 / 10^5.$$

По контрольному решению вычисляется вектор массовых сил и краевое условие, по которым с помощью найденного Фурье-образа функции Грина строится решение задачи. Затем контрольное решение сравнивается с найденным по краевому условию и свободному члену. Результаты , как и в предыдущем случае, совпали с точностью до третьего знака после запятой.

Список литературы

1. Ермоленко Г. Ю. Напряженно-деформированное состояние упругих и вязкоупругих конечных тел произвольной формы при статических и динамических нагружениях. Самара: СГАУ, 2001. - 149 с.

THE SUPPORT FUNCTIONS METHOD FOR MATHEMATICAL AND MECHANICAL PROBLEMS

© 2004 B. A. Gorlach, G. E. Ermolenko

Samara State Aerospace University

This article is devoted to support functions method for solving mathematical and mechanical problems. The method concept presented by the examples: Cauchy problem for ODE, Dirichlet problem for elliptic differential equation and elasticity problem for anisotropic material.