

## ДЕФОРМАЦИОННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД И МАЛОЦИКЛОВАЯ УСТАЛОСТЬ МАТЕРИАЛОВ

©2011 Е. П. Кочеров<sup>1</sup>, А. А. Буханько<sup>2</sup>, А. И. Хромов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ОАО «КУЗНЕЦОВ»

<sup>2</sup>Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Явление малоциклового усталости хорошо изучено с экспериментальной точки зрения на примере одноосного деформирования плоских и цилиндрических образцов. Вместе с этим, при эксплуатации детали в условиях повторно-статических нагрузок частицы материала могут деформироваться по законам, значительно отличающихся от одноосного деформирования. Это требует формулировки условий пластичности и предельного состояния для пространственных процессов деформирования. Эта формулировка должна учитывать особенности процессов малоциклового усталости материалов: наличие эффекта Баушингера; оценки меры повреждаемости материала в виде работы внутренних сил на пластических деформациях, связанных с его упрочнением. С этой целью сформулирован и теоретически обоснован подход к построению нового условия пластичности - поверхности нагружения, связанной с линиями уровня поверхности деформационных состояний несжимаемого жесткопластического тела и условия предельного состояния частицы материала. Основным отличием предлагаемого подхода является использование в качестве меры деформаций тензоров конечных деформаций и описание с его помощью эффекта Баушингера.

*Прочность, пластичность, разрушение.*

1. Циклически упрочняющиеся материалы разрушаются от усталости, и их разрушение хорошо описывается формулой Коффина-Мэнсона [1-3]:

$$\varepsilon_{nl} N^m = M, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{nl}$  - ширина петли гистерезиса;  $N$  - число циклов;  $m$ ,  $M$  - константы материала. Энергетическая интерпретация формулы (1) была дана Фелтнером и Морроу [4], согласно которой разрушение наступает тогда, когда суммарная энергия, рассеиваемая в единице объема материала, вследствие наличия необратимых пластических деформаций достигает определенной критической величины:

$$\sum_{N=1}^{N_p} W_N = W_{kp}, \quad (2)$$

где  $N_p$  - число циклов до разрушения;  $W_N$  - энергия, рассеиваемая в единицы объема материала при  $N$ -м цикле;  $W_{kp}$  - критическая величина энергии, которая равна энергии разрушения при статическом разрыве.

В дальнейшем Мартин [5] уточнил данную формулировку, предполагая, что мерой усталостных повреждений является только часть энергии, связанная с процессами упрочнения. В этой трактовке величины  $W_N$  и  $W_{kp}$  характеризуются заштрихованными площадями на рис. 1.

Заметим, что в соотношении (2) величина  $W_{kp}$  определяет предельное состояние материала, соответствующее точке  $B$  на статической диаграмме  $\sigma - \varepsilon$ , и, собственно, разрушение материала (образование новых свободных поверхностей) не рассматривается. Для разрушения частицы материала необходимо сообщить дополнительную энергию  $W_*$  (совершить «долом» материала).

Согласно соотношению (2) процесс доведения материала до критического состояния при жестком циклическом нагружении образца можно трактовать следующим образом: при каждом цикле нагружения критическая точка  $B$  смещается по диаграмме  $\sigma - \varepsilon$  влево согласно энергии гистерезиса (точка  $B'$ ) и при достижении деформированного состояния в цикле (точка  $A$ ) материал достигает предельного состояния (состояния предразрушения).

В работе [1] отмечено, что разрушение материала после определённого числа циклов связано с накоплениями деформаций и исчерпанием пластичности (т.е. с предельным деформационным упрочнением). Поэтому естественно связать предельное состояние с предельным упрочнением материала и с соответствующим ему положением поверхности нагружения.

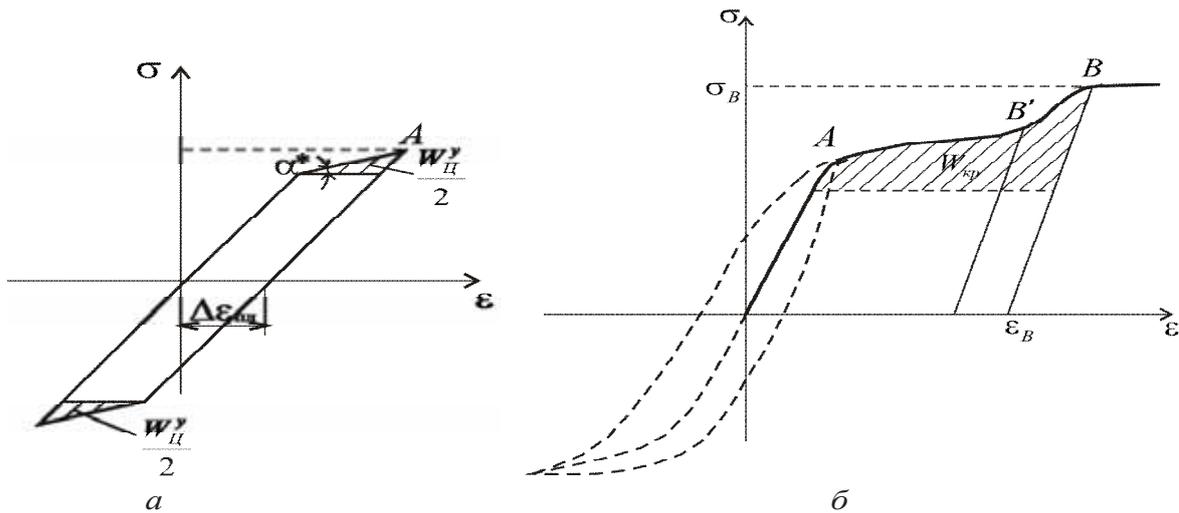


Рис. 1. Энергия пластической деформации, связанная с процессами упрочнения (заштрихованные площади): а - в цикле; б - при монотонном нагружении

Соотношение (2) не содержит упругих констант и, следовательно, при расчете  $W_{кр}$  можно ограничиться рассмотрением упрочняющегося жёсткопластического тела. Принято считать [6], что в интервале долговечности, меньше  $1 \cdot 10^3$  циклов упругую деформацию оправданно не учитывать, а её учёт обязателен при долговечностях больше  $1 \cdot 10^5$ . Процессы деформирования и разрушения плоских и цилиндрических образцов в этой постановке изложены в [7,8].

Реальные процессы деформирования материала в элементах конструкций могут значительно отличаться от одноосного де-

формирования, и соотношение (2) должно быть обобщено на пространственные процессы деформирования. Это обобщение должно учитывать следующие особенности малоциклового усталости:

- повреждаемость материала осуществляется за счет энергии гистерезиса на пластических деформациях, связанных с упрочнением материала, что требует учёта эффекта Баушингера;

- диапазон пластического деформирования материала значительно превышает диапазон малых деформаций, что требует использования в качестве меры деформаций тензоров конечных деформаций.

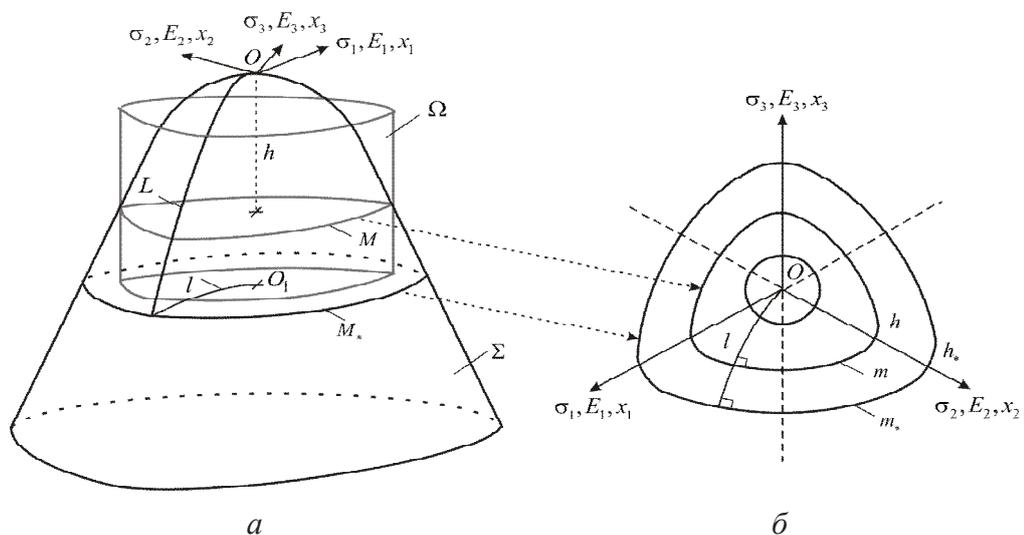


Рис. 2. Поверхность деформационных состояний (а) и линии уровня (б)

2. В работах [9-12] рассмотрен вариант поверхности нагружения, связанной с линиями уровня поверхности  $\Sigma$  деформационных состояний несжимаемого жёсткопластического тела (см. рис. 2,а), задаваемой соотношениями

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0;$$

$$C_1 C_2 C_3 = 1, \quad C_i > 0 \quad (i=1,2,3);$$

$$(1-2E_1)(1-2E_2)(1-2E_3) = 1;$$

где  $\varepsilon_i$ ,  $C_i$ ,  $E_i$  – главные значения тензоров скоростей деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , Коши  $C_{ij}$  и Альманси  $E_{ij}$ :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$

Здесь  $X_i$ ,  $x_i$  – эйлеровы и лагранжевы переменные,  $u_i$  – вектор перемещения,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Проекция линий пересечения поверхности  $\Sigma$  с плоскостями, параллельными девиаторной плоскости, на девиаторную плоскость даны на рис. 2,б. Они называются в дальнейшем линиями уровня, так как они определяются их расстояниями  $h$  от точки  $O$  (точки недеформированного состояния). Эти линии связываются с поверхностью нагружения с помощью кривой деформирования в координатах  $\sigma - \varepsilon$  для цилиндрических и плоских образцов.

Уравнение поверхности нагружения в координатах главных значений тензора напряжения имеет вид

$$\begin{aligned} & 6\sqrt{6}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 (\sigma_2 - \sigma_3) - \\ & - 4\sqrt{6}(\sigma_1 - \sigma_2)^3 + 6\sqrt{6}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 \times \\ & \times (\sigma_1 - \sigma_2) - 4\sqrt{6}(\sigma_2 - \sigma_3)^3 - \\ & - (2\sqrt{2}H(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 2\sqrt{2}H(\sigma_1 - \sigma_2) \times \\ & \times (\sigma_2 - \sigma_3) + 2\sqrt{2}H(\sigma_1 - \sigma_2)^2) 9h' = k_1, \end{aligned}$$

где  $k_1 = (-2\sqrt{2}H^3 + 6\sqrt{6})9h'^3$ ,  $h' = \frac{3\sigma}{3-2h}$ ,

$$h = E_1 + E_2 + E_3, \quad H = \frac{1}{\sqrt{3}}(C_1 + C_2 + C_3),$$

$$C_i = 1 - 2 \cdot E_i, \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Данная поверхность учитывает эффект Баушингера и конечность пластических деформаций. Параметром упрочнения здесь является первый инвариант тензора Альманси  $h = E_1 + E_2 + E_3$ . Изображая процессы деформирования линиями  $L$  на поверхности  $\Sigma$  и их проекциями  $l$  на девиаторную плоскость, можно выделить ортогональные процессы деформирования (ортогональные линиям уровня в девиаторной плоскости пространства  $E_i$ ). Эти процессы обладают следующим свойством: удельная работа внутренних сил при деформировании из точки  $O$  ( $h=0$ ) до уровня  $h$  равна одному и тому же значению  $W$ , которое равно  $h$  ( $W=h$ ). При деформировании по ортогональным процессам происходит упрочнение материала, а при деформировании по линиям уровня упрочнения не происходит.

Если изображать произвольный циклический процесс в девиаторной плоскости (рис. 3, замкнутая линия  $OABCO$ ), то согласно свойствам линий уровня поверхности  $\Sigma$  (см. рис. 2) энергия пластической деформации, связанная с процессами упрочнения, точно будет равна энергии за цикл для соответствующего цикла одноосного деформирования цилиндрического образца (см. рис. 1,а), изображаемого прямым отрезком  $ODO$ , т.е. циклу при ортогональном одноосном деформировании.

Построение этой поверхности для конструкционных материалов связано с описанием процессов одноосного деформирования плоских или цилиндрических образцов с использованием инвариантов тензоров конечных деформаций, которые связаны с относительным удлинением образца  $\delta$  следующим образом [7,8]:

- для цилиндрических образцов

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{\delta(2+\delta)}{(1+\delta)^2}, \quad E_2 = -\frac{1}{2} \delta,$$

$$E_3 = -\frac{1}{2} \delta;$$

- для плоских образцов в условиях плоской деформации

$$E_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\delta+1)^2}, \quad E_2 = -\frac{1}{2} \delta^2 - \delta,$$

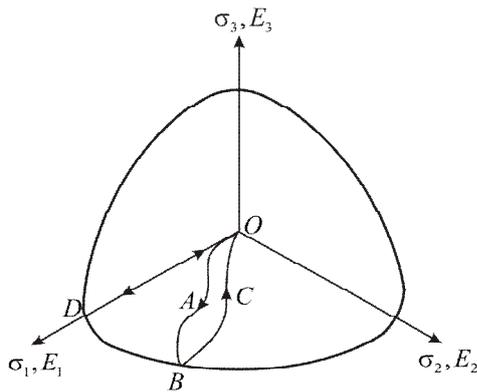


Рис. 3. Циклическое деформирование частицы материала в условиях пространственного нагружения (OABCO) и эквивалентное по повреждаемости одноосное циклическое деформирование (ODO) цилиндрического образца

$$E_3 = 0;$$

- для плоских образцов в условиях плоского напряженного состояния

$$E_1 = \sqrt{3}k \left( 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}k} \ln|1 + \delta| \right) + \frac{1}{k} \sqrt{4 \frac{1}{\sqrt{3}} k \ln|1 + \delta| - \frac{1}{3} \ln^2|1 + \delta|},$$

$$E_2 = \sqrt{3}k \left( 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}k} \ln|1 + \delta| \right) - \frac{1}{k} \sqrt{4 \frac{1}{\sqrt{3}} k \ln|1 + \delta| - \frac{1}{3} \ln^2|1 + \delta|},$$

$$E_3 = -2\sqrt{3}k + \ln|1 + \delta|.$$

Предельное состояние материала определяется линией  $M_*$  на поверхности  $\Sigma$  и линией  $m_*$  в девиаторной плоскости. Таким образом, устанавливается соответствие между диаграммами деформирования образцов при одноосном нагружении в плоскости  $\sigma - \varepsilon$  и поверхностью деформационных состояний  $\Sigma$ : предельной точке  $B$  (см. рис. 1,б) соответствует предельная линия  $M_*$  или  $m_*$  (см. рис. 2). При циклическом нагружении материала линия  $M_*(m_*)$  изменяет своё положение и стремится к текущему деформационному состоянию в цикле (аналогично движению точки  $B$  в положение  $B'$ ). Данное соответствие показывает, что сфор-

мулированный в работах [9-12] деформационно-энергетический подход является обобщением классического подхода, используемого при оценке малоциклового усталости на общие пространственные процессы деформирования, в том числе с произвольной формой цикла.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (Минобрнауки), на основании постановления Правительства РФ №218 от 09.04.2010.

### Библиографический список

1. Писаренко, Г.С. Сопротивление жаропрочных материалов нестационарным силовым и температурным воздействиями [текст] / Г.С. Писаренко, Н.С. Можаровский, Е.А. Антипов. – Киев: Наук. думка, 1974. – 200 с.
2. Manson, S.S. Behavior of materials under condition of thermal stress / S.S. Manson - In: Heat transfer Symp. Univ. of Michigan Eng. Res. Inst., 1953, p. 9-75.
3. Coffin, L.F. A study of the effects of cyclic thermal stresses in ductile metals / L.F. Coffin. – Trans. ASME. – 1954. – N 76. – P. 931-950.
4. Feltner, C.E., Microplastic strain hysteresis energy as a criterion for fatigue fracture / C.E. Feltner, J.D. Morrow. – Trans. ASME, 1961. – 83, №1. – P. 15-22.
5. Martin, D.E. An energy criterion for low-cycle fatigue / D.E. Martin // J. Basic Eng., Trans. ASME. – 1961. – P. 565-571.
6. Механическое поведение материалов при различных видах нагружения [текст] / В.Т. Трощенко, А.А. Лебедев, В.А. Стрижало [и др.] – Киев: Логос, 2000. – 571 с.
7. Пластические константы разрушения [текст] / А.И. Хромов, А.А. Буханько, О.В. Козлова [и др.] // ПМТФ. – 2006. – Т. 47, № 2. – С. 147-155.
8. Хромов, А.И. Разрушение жёсткопластических тел. Константы разрушения [текст] / А.И. Хромов, О.В. Козлова. – Владивосток: Дальнаука, 2005. – 159 с.
9. Кочеров, Е.П. Деформационные состояния и разрушение идеальных жёсткопластических тел [текст] / Е.П. Кочеров,

А.И. Хромов // Вестн. СамГТУ. – 2006. – № 42. – С. 66-71.

10. Хромов, А.И. Поверхность нагружения, связанная с линиями уровня поверхности деформаций несжимаемого жёсткопластического тела [текст] / А.И. Хромов, Е.П. Кочеров, А.Л. Григорьева // Вестник СамГТУ. – 2006. – Вып. 43. – С. 88-92.

11. Хромов, А.И. Деформационные состояния и условия разрушения жёсткопла-

стических тел [текст] / А.И. Хромов, Е.П. Кочеров, А.Л. Григорьева // ДАН. – 2007. – Т. 413, № 4. – С. 481-485.

12. Деформационно-энергетический критерий разрушения жёсткопластических тел [текст] / А.А. Буханько, А.Л. Григорьева, А.И. Хромов [и др.] // Изв. РАН. МТТ. – 2009. – № 6. – С. 178-186.

## STRAIN-ENERGY APPROACH AND LOW-CYCLE FATIGUE OF MATERIALS

©2011 E. P. Kotcherov<sup>1</sup>, A. A. Bukhanko<sup>2</sup>, A. I. Khromov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>JSC «KUZNETSOV»

<sup>2</sup>Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov  
(National Research University)

Low-cycle fatigue is well researched in terms of uniaxial test experiments of plane and cylindrical specimens. At the same time material particles can be deformed at product operation under laws that differ from uniaxial test. It requires the definition of conditions of plasticity and limiting state for spatial deformation processes. This definition should consider singularities of low-cycle fatigue process: Bauschinger effect; estimations of material fault probability in a work of internal force. With this design the approach to construction of new plasticity condition is formulated and theoretically proved as loading surface which connected with level lines of surface of state of strain of incompressible rigid-plastic body. Use of tensors of finite strain as a measure of strain and description of Bauschinger effect with help of these tensors is main difference of suggested approach.

*Strength, plasticity, fracture.*

### Информация об авторах

**Кочеров Евгений Павлович**, генеральный конструктор ОАО «Кузнецов». E-mail: [kotcherov@motor-s.ru](mailto:kotcherov@motor-s.ru). Область научных интересов: прочность конструкций, механика разрушения.

**Буханько Анастасия Андреевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прочности летательных аппаратов, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: [abukhanko@mail.ru](mailto:abukhanko@mail.ru). Область научных интересов: теория пластичности, механика разрушения.

**Хромов Александр Игоревич** – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий кафедрой прочности летательных аппаратов, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: [khromov@ssau.ru](mailto:khromov@ssau.ru). Область научных интересов: теория пластичности, механика разрушения.

**Kotcherov Evgeny Pavlovich** - General Designer, JSC «KUZNETSOV». E-mail: [kotcherov@motor-s.ru](mailto:kotcherov@motor-s.ru). Area of research: structural strength, fracture mechanics.

**Bukhanko Anastasia Andreevna** - Candidate of phys.-math Sciences, Associate Professor of Department of Aircraft Vehicle Strength of Samara State Aerospace university named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: [abukhanko@mail.ru](mailto:abukhanko@mail.ru). Area of research: plasticity theory, fracture mechanics.

**Khromov Alexander Igorevich** - Doctor of phys.-math Sciences, Professor, Head of Department of Aircraft Vehicle Strength of Samara State Aerospace university named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: [khromov@ssau.ru](mailto:khromov@ssau.ru). Area of research: plasticity theory, fracture mechanics.