

УДК 629.7.058

## РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОШИБОК ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ

© 2014 Е. А. Рубцов

Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации

В статье рассмотрены проблемы определения координат воздушных судов. Широко применяемое распределение Гаусса не позволяет достоверно описывать редкие события. Двойное экспоненциальное распределение также не даёт удовлетворительных результатов. Это вызывает необходимость использовать новые распределения. В статье приводятся примеры таких распределений, а также примеры решения задач по выявлению нарушений эшелонирования.

*Ошибки определения координат, распределения ошибок, составные распределения, обобщённый закон Лапласа.*

Одной из основных задач при оценке уровня безопасности эшелонирования полётов является создание вероятностной модели, позволяющей наиболее точно и достоверно описать распределение ошибок определения координат воздушных судов (ВС). Исследования в этой области проводятся начиная с 60-х годов прошлого века, однако и в настоящее время проблема не потеряла актуальности. Наибольшее внимание уделяется распределениям вероятности появления больших ошибок, значения которых превышают заданную величину (обычно  $\pm 2\sigma$ ), так называемых хвостов распределения. Практика показывает, что при использовании для оценки уровня безопасности полётов различных законов результаты расчётов значительно расходятся. Это лишнее раз доказывает необходимость создания достоверных моделей распределения.

Основной проблемой является создание закона, описывающего распределение ошибок с точностью большей, чем даёт нормальный закон. Недостоверность результатов, получаемых при использовании закона Гаусса, отмечена в обзоре [1] и циркуляре ИКАО [3].

Исследования показали, что замена нормального распределения двойным экспоненциальным не даёт удовлетворительных результатов [2]. Как указано в документе ИКАО [3], классический закон

Лапласа завышает результаты, потому его можно применять лишь «для получения консервативных значений».

Исходя из этого, были проанализированы и выбраны новые законы распределения. Основной упор делался на возможности коррекции их плотности вероятности через изменяемые параметры, что даёт возможность настройки распределения в соответствии с экспериментальными данными. Такими свойствами обладает обобщённый закон Лапласа, разработанный В.Е. Бенингом и О.О. Лямыным. Он позволяет через нормировочную константу произвести тонкую настройку плотности вероятности [5], которая имеет вид:

$$f(x, \theta) = C(a, b) \cdot e^{-a(x-\theta)^2 - b|x-\theta|}, \quad (1)$$

где  $C(a, b)$  – нормировочная константа такая, что

$$C(a, b) = \begin{cases} \frac{b}{2}, & a = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi} \exp(b^2 / 4a) \cdot \operatorname{erfc}(b / (2\sqrt{a}))} & a > 0 \end{cases}; \quad (2)$$

и

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-y^2} dy; \quad (3)$$

$a$  и  $b$  – некоторые параметры, причём  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ ,  $x \in R$ .

Параметр  $a$  регулирует тяжесть хвостов функции, то есть вероятность появ-

ления больших ошибок; параметр  $b$  пропорционален масштабу стандартного распределения Лапласа и находится как

$$b = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Также хорошо себя показали составные распределения, полученные путём суммирования плотностей вероятности с учетом коэффициента соотношения. При этом выделяют плотность, описывающую типичные отклонения, и плотность, описывающую нетипичные отклонения. В общем виде это можно представить как

$$f = (1 - p) \cdot f_{core} + p \cdot f_{tail}, \quad (5)$$

где  $f_{core}$ ,  $f_{tail}$  – плотности вероятности типичного и нетипичного законов распределения;  $p$  – коэффициент соотношения, также называемый весовым коэффициентом.

Данный метод можно встретить в современных работах [4] и документах ИКАО [3]. В качестве типичного отклонения обычно принимают закон Гаусса. В качестве нетипичного отклонения были выбраны экспоненциальное распределение и распределение Лапласа.

Для точного подбора параметров законов распределения необходимо иметь некоторый эталон. Экспериментальные данные за относительно небольшой период могут дать информацию для хорошего описания типичных отклонений. При этом редкие события могут не случиться в обозреваемом периоде, и созданная на основе этих данных функция будет некорректна. Проблему учёта редких событий в ИКАО решили при помощи эталонного распределения [3], аппроксимирующего экспериментальные данные при среднеквадратической ошибке, равной 1. В качестве эталона выбрано обобщённое распределение Парето, имеющего функцию плотности вероятности

$$f(x) = 1 - \left(1 + \xi \frac{(x-u)}{\beta}\right)^{-1/\xi}, \quad (6)$$

где  $u = 3,2$  – параметр сдвига;  $\xi = -0,089$  – параметр формы;  $\beta = 0,31$  – параметр масштаба.

Так как параметр формы  $\xi$  отрицательный, то носитель функции распределения Парето определён не на всей числовой области. Принимая за интервал определения область, где функция существует и имеет плавный вид, будем рассматривать обобщённое распределение Парето на интервале значений от 3,2 до 6,5. График функции вероятности распределения занимает промежуточную позицию между нормальным и двойным экспоненциальным законами. Из этого можно сделать вывод о том, что хвост реального распределения ошибки измерения координат ВС имеет хвосты намного тяжелее, нежели у распределения Гаусса, и в то же время легче, чем те, что имеет классическое распределение Лапласа (рис.1).

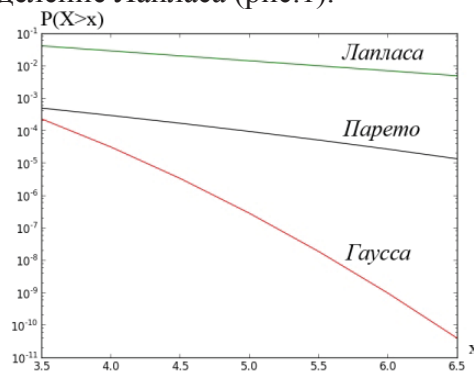


Рис.1. Графики функций вероятности законов распределения: Лапласа, Парето, Гаусса

Имея эталон распределения, можно разрабатывать новые распределения, позволяющие корректно описывать реальные данные. По результатам исследований можно сделать вывод, что наиболее близкими к распределению Парето являются:

1. Обобщённое распределение Лапласа (1), при  $a = 0,12$ .

2. Составное распределение, образованное суммой плотностей вероятности нормального и экспоненциального распределений:

$$f_{norm\_exp} = (1 - p) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) + p \cdot \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right), \quad (7)$$

где  $p = 0,98610$ .

3. Составное распределение, образованное суммой плотностей вероятности нормального распределения и распределения Лапласа:

$$f_{norm\_Lap} = (1 - p) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right) + p \cdot \frac{\sqrt{2}}{2\sigma} \exp\left(-\frac{\sqrt{2} \cdot |x|}{\sigma}\right), \quad (8)$$

где  $p = 0,71226$ .

Перейдём к двумерным законам распределения. Эталонное распределение для этого случая не создано, поэтому при поиске закона будет использоваться полученный ранее принцип: хвосты функции распределения должны быть существенно тяжелее, чем у нормального закона, и легче, нежели у классического закона Лапласа. Данному критерию вполне соответствует закон, разработанный Козубовским [6]:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times K_0 \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}} \cdot \sqrt{x^2\sigma_2/\sigma_1 - 2\rho xy + y^2\sigma_1/\sigma_2} \right), \quad (9)$$

$$f(x, y) = (1 - p) \cdot \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sqrt{1-r_{xy}^2}} \cdot \left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r_{xy} \cdot x \cdot y}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} + p \cdot \frac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times K_0 \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}} \cdot \sqrt{x^2\sigma_2/\sigma_1 - 2\rho xy + y^2\sigma_1/\sigma_2} \right). \quad (10)$$

Составное распределение позволяет отрегулировать хвосты функции, делая их более или менее тяжёлыми. Так как эталонного распределения для двумерного случая нет, примем  $p = 0,5$ .

где  $K_0$  – модифицированная функция Бесселя третьего рода нулевого порядка.

На рис.2 представлено сравнение обобщённого закона Лапласа с двумерным нормальным и двумерным классическим законом Лапласа при среднеквадратических погрешностях, равных 1, и нулевом коэффициенте корреляции.

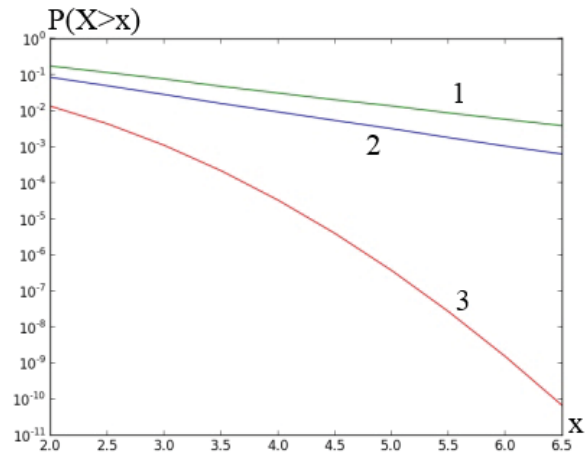


Рис.2. График функций вероятности законов распределения: 1 – классического Лапласа, 2 – обобщённого Лапласа, 3 – Гаусса

Недостаток рассмотренного двумерного распределения состоит в невозможности регуляции хвостов функции распределения. Решить проблему можно, используя составное распределение.

Так, плотность вероятности, образованная суммой нормального закона и рассмотренного ранее закона Лапласа, имеет вид:

Посмотрим, как новые законы распределения влияют на результаты расчёта вероятности нарушения норм эшелонирования. В качестве контрольного примера

рассмотрим ситуацию, когда два ВС движутся по параллельным трассам.

На рис.3 показано поперечное сечение двух параллельных трасс, расстояние между которыми равно  $D$  км. По первой трассе движется воздушное судно ВС1, по второй – ВС2. Схематично обозначены плотности вероятностей распределения ошибки определения координат каждого из ВС:  $f_1(y)$  и  $f_2(y-D)$ . По оси  $Z$  отложено значение плотности вероятности, оси  $Y$  соответствует боковое смещение ВС. Минимум бокового эшелонирования равен  $S$  км, погрешность в боковом канале –  $\sigma$  км.

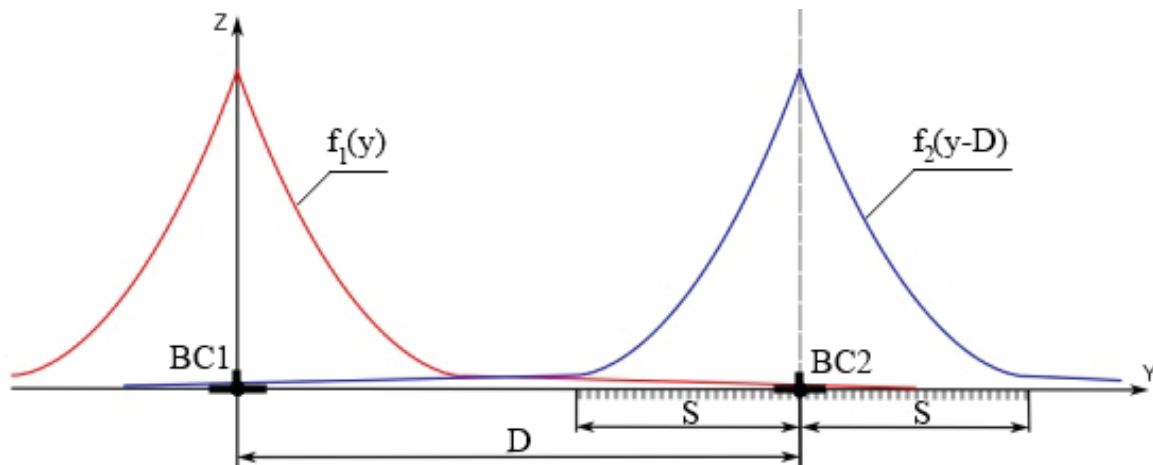


Рис.3. К задаче определения вероятности нарушения норм бокового эшелонирования

Результаты расчётов при  $D = 30$  км,  $S=10$  км и различных  $\sigma$  приведены в табл.1. Значения среднеквадратических погрешностей (СКП) линейного бокового отклонения, при которых вероятность нарушения норм бокового эшелонирования равна предельно допустимой, приведены в табл.2.

Как видно из таблиц, результаты расчётов при использовании новых распределений несколько расходятся. Наименее тяжёлые хвосты имеет функция

Требуется найти вероятность нарушения норм эшелонирования  $P_{эш}$ . Для этого рассчитаем с какой вероятностью первое воздушное судно окажется на интервале  $2S$  (на рис.3 отмечен серой штриховкой), а также вероятность нахождения второго воздушного судна на том же интервале. Произведение полученных вероятностей даст значение вероятности нарушения норм эшелонирования  $P_{эш}$ . Рассчитанную величину необходимо сравнить с нормативной вероятностью  $P_{эш, доп}$ . Согласно концепции RNP [7] нормативная вероятность нарушения норм бокового эшелонирования (вероятность инцидента в туннеле) равна  $0,17 \cdot 10^{-7}$ .

распределения обобщённого закона Лапласа. Наиболее консервативную оценку даёт составное распределение, плотность которого составляет сумма плотностей нормального и экспоненциального распределений. Составной закон, образованный суммой нормального закона и закона Лапласа, занимает промежуточное положение. Таким образом, тот или иной из законов можно использовать при расчётах для различных сценариев: пессимистического, оптимистического и среднего.

Таблица 1. Вероятность нарушения норм бокового эшелонирования

Распределения	$\sigma$ , км					
	0.5	1	2	3	4	5
Нормальное распределение	0.0	0.0	0.0	1.3e-11	2.8e-07	3.1e-05
Классический закон Лапласа	2.6e-13	3.6e-07	0.00042	0.00423	0.01294	0.02442
Обобщённый закон Лапласа	0.0	0.0	6.8e-10	7.8e-06	0.00031	0.00204
Составное распределение $f_{norm.exp}$	0.0	2.3e-11	5.1e-07	1.4e-05	7.4e-05	0.00022
Составное распределение $f_{norm.Lap}$	0.0	6.0e-14	8.3e-08	9.2e-06	9.7e-05	0.00041

Таблица 2. Предельно допустимые СКП линейного бокового уклонения

Распределения	$\sigma$ , км
Нормальное распределение	3.62
Классический закон Лапласа	0.83
Обобщённый закон Лапласа	2.24
Составное распределение $f_{norm.exp}$	1.60
Составное распределение $f_{norm.Lap}$	1.81

Расчёт с использованием новых законов распределения показал, что для соблюдения норм бокового эшелонирования предельно допустимая погрешность навигационных систем должна быть ниже в 1,6–2,2 раза предельно допустимой погрешности, рассчитанной с применением нормального закона. Следовательно, требования к точности навигационных систем должны быть повышены.

Анализ двумерных законов распределения проведем путем расчёта зон конфликтных ситуаций, т.е. областей пространства, нахождение в которых более одного воздушного судна ведёт к нарушению норм эшелонирования [8].

В настоящее время зоны конфликтных ситуаций рассчитываются геометрическим методом. Он заключается в анализе взаимных положений двух ВС, следующих по маршрутам. Границы зон конфликта определяют предельные позиции воздушных судов, при которых расстояние между ними равно сумме радиусов круговых защитных зон (circle protection area, CPA). Постановку задачи поясняет рис. 4. Данный способ выявления конфликтных ситуаций используется в таких системах, как STCA (Short Term Conflict Alert) и MTCDA (Medium Term Conflict Detection) [9, 10].

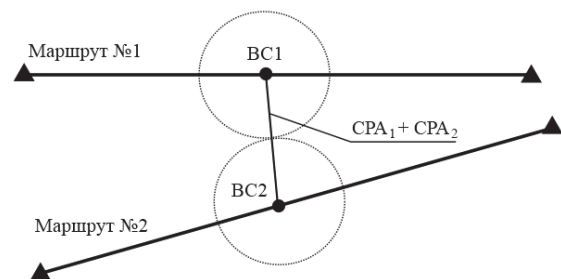


Рис.4. К задаче расчёта зоны конфликтных ситуаций

Недостаток данного метода состоит в том, что он не учитывает погрешности определения местоположения воздушного судна. Перспективным является расчёт вероятности нарушения норм горизонтального эшелонирования с учётом погрешности определения координат ВС. При этом целесообразно использовать представленные ранее двумерные законы распределения. Зона конфликтных ситуаций при этом определяется как область пространства, в которой вероятность появления одного ВС в пределах круговой защитной зоны второго ВС выше предельно допустимой. Согласно [7] предельно допустимая вероятность для горизонтального полёта равна  $3,5 \cdot 10^{-8}$ .

Пример зоны конфликтной ситуации представлен на рис. 5, где по осям координат отложены протяжённости первой (R1) и второй (R2) воздушных трасс или их отрезков. Рассматривались пересекающиеся воздушные трассы, координаты ВС определялись с помощью азимутально-дальномерной радиотехнической системы, расположенной на удалении от точки пересечения трасс.

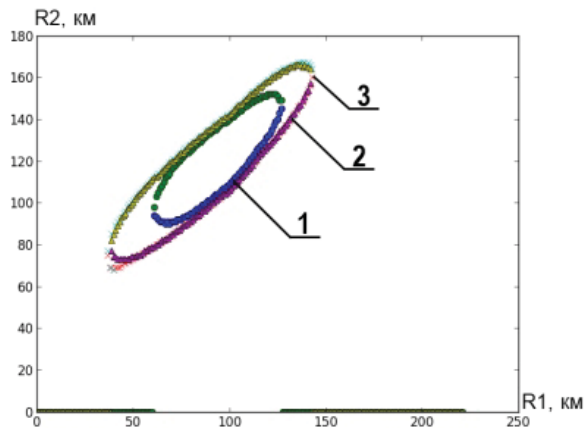


Рис.5. Зона конфликтных ситуаций, рассчитанная с применением законов распределения: 1 – Гаусса, 2 – обобщённого Лапласа, 3 – составного

Из анализа рис.5 видно, что при использовании в расчётах нормального закона распределения воздушное судно, двигаясь по первой трассе (ось R1), на интервале 59–128 км может вступить в конфликт с ВС на второй трассе (конфликтный интервал для ВС на второй трассе определяется также по рис.5). При использовании в расчётах новых распределений данный интервал составит 37–144 км, то есть на 35% больше. Обоснованное увеличение размера зоны конфликтной ситуации позволит снизить частоту инцидентов, связанных с нарушением норм эшелонирования.

В рамках статьи были рассмотрены новые, не применявшиеся ранее законы

распределения ошибок определения координат воздушных судов, параметры которых соответствуют требованиям ИКАО [3].

Данные распределения были применены как замена распределений Гаусса и Лапласа, так как последние не позволяют получить достоверные результаты при расчёте вероятности появления больших и редких ошибок.

Контрольные примеры позволили сопоставить результаты расчётов, получаемых при использовании различных распределений. В первом примере определялась вероятность нарушения норм бокового эшелонирования. Результаты расчётов позволили сделать вывод о необходимости ужесточения требований к точности навигационных систем.

Во втором примере рассчитывалась зона конфликтных ситуаций с применением перспективного метода, учитывающего погрешности радиотехнических систем. Применение новых законов распределения позволяет определить размеры зоны конфликтных ситуаций, при которых вероятность нарушения норм эшелонирования не превосходит предельно допустимую величину, что снизит частоту инцидентов. Информация о размерах зон конфликтных ситуаций может быть использована в таких системах, как STCA и MTCD.

### Библиографический список

1. Stellios P.M. Error distributions and accuracy measures in navigation: an overview. Geodesy and geomatics engineering UNB, technical report №113 / Department of Surveying Engineering University of New Brunswick, Canada, 1985.

2. Кузнецов В.Л., Соломенцев В.В. К задаче моделирования риска столкновений воздушных судов // Научный Вестник МГТУ ГА, 2007. № 120. С. 5-16.

3. Cir. 319 – AN/181. Единые принципы моделирования риска столкновений в обоснование Руководства по методике планирования воздушного пространства

для определения минимумов эшелонирования (Doc 9689). ИКАО. 2009.

4. John W.A., Steven D.T. Validation of required surveillance performance (RSP) accuracy // MIT Lincoln Laboratory, 2007.

5. Бенинг В.Е., Лямин О.О. О мощности критериев в случае обобщённого распределения Лапласа // Информатика и её применения. 2009. Т.3. №3. С. 79-85.

6. Kotz S., Kozubowski T.J., Podgórski K. The Laplace distribution and generalizations: a revisit with applications to communications, economics, engineering and finance. Boston: Birkhäuser Publ., 2001. 331 p.

7. Соболев Е.В. Организация радиотехнического обеспечения полётов. Ч.1. Основные эксплуатационные требования к авиационным комплексам навигации, посадки, связи и наблюдения. М.: СПбГУ ГА. С.-Петербург, 2007. 96 с.

8. Энциклопедия безопасности авиации / Н.С. Кулик, В.П. Харченко, М.Г.

Луцкий [и др.]; под ред. Н.С. Кулика. – К.: Техника, 2008. 1000 с.

9. Eurocontrol specification for short term conflict alert / EUROCONTROL-SPEC-122, first released version, 2010. 25 p.

10. Eurocontrol specification for medium-term conflict detection / EUROCONTROL-SPEC-0139, first released version, 2010. 25 p.

### Информация об авторе

**Рубцов Евгений Андреевич**, аспирант кафедры радиоэлектронных систем, Санкт-Петербургский университет гражданской авиации. E-mail:

[rubtsov.spb.guga@rambler.ru](mailto:rubtsov.spb.guga@rambler.ru). Область научных интересов: безопасность полётов при ОрВД.

## ERROR DISTRIBUTIONS IN AIRCRAFT POSITION DETERMINATION

© 2014 E. A. Rubtsov

Saint-Petersburg State University of Civil Aviation,  
Saint-Petersburg, Russian Federation

The paper deals with the problems of determining aircraft coordinates. The widely used Gaussian distribution does not make it possible to analyze extremely rare events with certainty. The ICAO-recommended double-exponent distribution does not meet the requirements of accuracy either. It is, therefore, necessary to look for new distributions. The paper gives examples of such distributions as well as examples of solving problems of detecting violations of separation.

*Errors of position determination, error distribution, complex distribution, generalized Laplace distribution.*

### References

1. Stellios P.M. Error distributions and accuracy measures in navigation: an overview. Geodesy and geomatics engineering UNB, technical report no.113 / Department of Surveying Engineering University of New Brunswick, Canada, 1985.

2. Kouznetsov V.L., Solomentsev V.V. On a problem of collision risk modeling of aircraft // Nauchnyy Vestnik MGTU GA. 2007. No.120. P. 5-15. (In Russ.)

3. Cir. 319 – AN/181. A unified framework for collision risk modeling in support of the manual on airspace planning methodology for the determination of separation minima (Doc. 9689). ICAO. 2009. (In Russ.)

4. John W.A., Steven D.T. Validation of required surveillance performance (RSP) accuracy // MIT Lincoln Laboratory. 2007.

5. Bening V.E., Lyamin O.O. The power of criteria in case of general Laplace distribution // Informatika i ee primeneniya. 2009. V.3, no.3. P. 79-85. (In Russ.)

6. Kotz S., Kozubowski T.J., Podgórski K. The Laplace distribution and generalizations: a revisit with applications to communications, economics, engineering and finance. Boston: Birkhäuser Publ., 2001. 331 p.

7. Sobolev E.V. Organizatsiya radio-tekhnicheskogo obespecheniya poletov. Ch.1. Osnovnye ekspluatatsionnye trebovaniya k aviatsionnym kompleksam navigatsii, posadki, svyazi i nablyudeniya [Or-

ganization of radio-engineering flight service. Part 1. Main operational requirements for aircraft systems of navigation, landing, communication and surveillance]. St.-Petersburg: SPBGU GA Publ., 2007. 96 p.

8. Entsiklopediya bezopasnosti aviatsii [Encyclopedia of aviation safety] / N.S. Kulic, V.P. Kharchenko, M.G. Luckiy [etc.]; ed. N.S. Kulic. – Kiev: Technica, 2008. 1000 p.

9. Eurocontrol specification for short term conflict alert / EUROCONTROL-SPEC-122, first released version, 2010. 25 p.

10. Eurocontrol specification for medium-term conflict detection / EUROCONTROL-SPEC-0139, first released version, 2010. 25 p.

#### **About the author**

**Rubtsov Evgeny Andreevitch**, post-graduate student, Radio Systems Department, Saint-Petersburg State University of Civil Aviation.

E-mail: [rubtsov.spb.guga@rambler.ru](mailto:rubtsov.spb.guga@rambler.ru). Area of research: safety of flights and ATM.