

УДК 535.42

## СРАВНИТЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ В ОДНООСНОМ КРИСТАЛЛЕ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2014 А. П. Краснов<sup>1</sup>, С. Н. Хонина<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

<sup>2</sup> Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара

Выполнен сравнительный численный расчёт распространения лазерных мод Гаусса-Лагерра и Бесселя в изотропной среде и в одноосном кристалле с помощью интегральных операторов распространения, основанных на разложениях по плоским и сферическим волнам.

Численное моделирование с различным типом поляризации пучков и различным положением оси кристалла позволило определить условия, при которых происходит наибольшее астигматическое искажение пучков. Проведённый анализ может быть полезен на практике для определения положения оси кристалла.

*Разложение по плоским волнам, интеграл Рэлея-Зоммерфельда, моды Гаусса-Лагерра, моды Бесселя, одноосный кристалл, обыкновенный и необыкновенный лучи.*

### Введение

Одной из важнейших задач оптики является расчёт распространения электромагнитных волн в различных средах. Для однородных изотропных сред существует несколько способов решения такой задачи, среди которых выделяются метод разложения по плоским волнам (РПВ) и метод разложения по сферическим волнам – интеграл Рэлея-Зоммерфельда (РЗ) [1, 2].

Для анизотропных сред, как правило, используется метод РПВ [3-7]. В работах [8, 9] был рассмотрен аналог интеграла РЗ, полученный методом стационарной фазы [1, 10].

Распространение лазерных мод высокого порядка в среде с сильной анизотропией приводит к сложным поляризационно-модовым преобразованиям, причём для анализа таких явлений часто используется параксиальная модель распространения [11-14].

Непараксиальный режим в анизотропной среде позволяет обнаружить более тонкие эффекты [15-19]. В работе [18] было показано, что при распространении вдоль оси кристалла непараксиальные пучки Бесселя испытывают периодиче-

ское изменение интенсивности. Период осцилляций обратно пропорционален квадрату пространственной частоты лазерного пучка и разности диэлектрических проницаемостей, соответствующих обыкновенному и необыкновенному лучам. В работе [19] исследовался эффект двулучепреломления при распространении гауссова пучка под углом к оси кристалла, который может исчезать при соответствии плоскости наклона пучка и плоскости линейной поляризации.

В статье проводится сравнение распространения бесселевых и гауссовых пучков с различной поляризацией в одноосном кристалле вдоль и перпендикулярно оси кристалла. Показано, что при этом возникают различные эффекты: в одних случаях – астигматическое искажение, а в других – интерференционное взаимодействие обыкновенного и необыкновенного лучей, причём влияние анизотропной среды на различные типы мод имеет различный характер и зависит от распределения пространственного спектра пучков.

### 1. Операторы распространения в свободном пространстве

Оператор распространения позволяет связать известное распределение электромагнитного поля во входной плоскости  $E_0(x, y)$  с распределением  $E(x, y, z)$  в некоторой плоскости  $z$ :

$$E(u, v, z) = \iint_{\square^2} E_0(x, y) \times$$

$$\times H(u-x, v-y, z) dx dy, \tag{1}$$

где  $H(x, y, z)$  – ядро оператора распространения.

При разложении по плоским волнам ядро оператора имеет следующий вид:

$$H(x, y, z) = \iint_{\square^2} \exp(ikz\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}) \times$$

$$\times \exp[ik(\alpha x + \beta y)] d\alpha d\beta, \tag{2}$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны излучения.

Используя разложение сферической волны по плоским волнам, можно получить явный вид для ядра оператора (1):

$$H(u-x, v-y, z) = -\frac{z \exp(ikR)}{2\pi R^2} \left( ik - \frac{1}{R} \right), \tag{3}$$

где  $R = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2 + z^2}$  – расстояние от входной плоскости до текущей точки. Выражение (1) с ядром (3) называется интегралом Рэлея-Зоммерфельда.

В векторном случае электрическое поле складывается из трёх компонентов. Далее будем рассматривать во входной плоскости  $E_x^0(x, y)$ ,  $E_y^0(x, y)$  – комплексные амплитуды тангенциальных (поперечных) компонентов, причём  $z$ -компонент входного поля предполагается нулевым за счёт выбора системы координат.

Вектор электрического поля при РПВ определяется следующими интегралами:

$$E(x, y, z) = \iint \mathbf{M}(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} F_x(\alpha, \beta) \\ F_y(\alpha, \beta) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \exp\left\{ ik\left( \alpha x + \beta y + z\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2} \right) \right\} d\alpha d\beta,$$

где

$$\begin{pmatrix} F_x(\alpha, \beta) \\ F_y(\alpha, \beta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^2} \iint \begin{pmatrix} E_x^0(x, y) \\ E_y^0(x, y) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] dx dy$$

– Фурье-спектры тангенциальных компонент входного поля;

$$\mathbf{M}(\alpha, \beta) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{\alpha^2}{1 + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} & -\frac{\alpha\beta}{1 + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} \\ -\frac{\alpha\beta}{1 + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} & 1 - \frac{\beta^2}{1 + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix} \tag{6}$$

– поляризационная матрица.

Векторные интегралы РЗ имеют следующий вид:

$$\mathbf{E}(u, v, z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint \begin{pmatrix} z \cdot E_x^0(x, y) \\ z \cdot E_y^0(x, y) \\ -\left[ E_x^0(x, y) \cdot (u-x) + \right. \\ \left. + E_y^0(x, y) \cdot (v-y) \right] \end{pmatrix} \times$$

$$\times \frac{\exp(ikR)}{R^2} \left( ik - \frac{1}{R} \right) dx dy.$$

Очевидно, что при линейной  $x$ -поляризации  $y$ -компонент в этой модели всегда отсутствует.

### 2. Операторы распространения в анизотропной среде

Рассмотрим анизотропную среду. Для тензора диэлектрической проницаемости вида

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \tag{8}$$

в работах [8, 9] был выписан интегральный оператор распространения на основе РПВ для анизотропной среды:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(u, v, z) = & \iint_{\square^2} \{c_1(\alpha, \beta) \mathbf{G}_1(\alpha, \beta) \mathbf{e}_{1\perp}(\alpha, \beta) \times \\ & \times \exp[ikz\gamma_1(\alpha, \beta)] + c_2(\alpha, \beta) \times \\ & \times \mathbf{G}_2(\alpha, \beta) \mathbf{e}_{2\perp}(\alpha, \beta) \exp[ikz\gamma_2(\alpha, \beta)]\} \times \\ & \times \exp[ik(\alpha u + \beta v)] d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\mathbf{G}_j(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{\alpha\varepsilon_{xx} + \beta\varepsilon_{yx}}{\varepsilon_{zz}\gamma_j(\alpha, \beta)} & -\frac{\alpha\varepsilon_{xy} + \beta\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{zz}\gamma_j(\alpha, \beta)} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{e}_{j\perp}(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} e_{jx}(\alpha, \beta) \\ e_{jy}(\alpha, \beta) \end{pmatrix}, \quad j=1,2 \quad - \text{ поперечные компоненты обыкновенной и не-}$$

обыкновенной волн.

В работе [8] из выражения (9) был получен аналог интеграла РЗ для анизотропной среды:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(u, v, z) = & \frac{z}{\lambda} \sum_{j=1}^2 \iint_{\square^2} \mathbf{e}_j(\alpha_{jc}, \beta_{jc}) \times \\ & \times [\mathbf{w}_j^T(\alpha, \beta) \mathbf{E}_{\perp}(x, y, 0)] \frac{\sqrt{d_j s_j t_j}}{R_j^2} \times \\ & \times \exp\left\{ ik \sqrt{\frac{d_j}{s_j t_j}} R_j \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$R_j = \sqrt{t_j(u-x)^2 + s_j(v-y)^2 + s_j t_j z^2}, \quad (12)$$

$$\begin{cases} \alpha_{jc} = \sqrt{\frac{d_j t_j}{s_j}} \frac{(u-x)}{R_j}, \\ \beta_{jc} = \sqrt{\frac{d_j s_j}{t_j}} \frac{(v-y)}{R_j}. \end{cases} \quad (13)$$

В работе [8] были рассмотрены конкретные частные случаи, для которых были определены параметры выражения (11).

### 3. Распространение лазерных пучков в свободном пространстве

Предварительно выясним главные особенности распространения лазерных мод в свободном (изотропном) пространстве. Без потери общности будем рассматривать пучки, имеющие линейную х-поляризацию. В связи с изотропностью среды результаты для линейно-поляризованного света с любым направлением наклона оси поляризации будут аналогичными.

Основные параметры расчётов: длина волны  $\lambda=1 \text{ мкм}$ ; спектральные частоты учитываются в круге радиусом  $s = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \approx 0,707$ ; число отсчётов в спектре  $501 \times 501$ . На графиках координаты  $r, z$  исчисляются в микрометрах, изображения приведены в негативе.

#### 3.1. Моды Гаусса-Лагерра

Лазерные пучки Гаусса-Лагерра (ГЛ) являются модами градиентных сред. В среде с постоянным показателем преломления они сохраняют свою структуру с точностью до масштаба. Их комплексная амплитуда задаётся следующей формулой:

$$\begin{aligned} GL_{n,m}(r, \varphi, z) = & \exp\left[ i \frac{2\pi z}{\lambda} + i \frac{\pi r^2}{\lambda R(z)} - \frac{r^2}{\sigma^2(z)} \right] \times \\ & \times \left( \frac{\sqrt{2}r}{\sigma(z)} \right)^{|m|} \cdot L_n^{|m|} \left( \frac{2r^2}{\sigma^2(z)} \right) \times \\ & \times \exp[-i\beta_{nm}(z) + im\varphi], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{где } R(z) = z \left( 1 + \frac{z_0^2}{z^2} \right), \quad \sigma^2(z) = \sigma_0^2 \left( 1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right),$$

$$z_0 = \frac{\pi\sigma_0^2}{\lambda}, \quad \beta_{nm}(z) = (2n+m+1) \arctg \left( \frac{z}{z_0} \right),$$

$L_n^m(x)$  – обобщённый многочлен Лагерра.

Выберем следующие параметры входного поля:  $n=7; m=0$ ; радиус перетяжки  $\sigma_0 = 2,7367 \text{ мкм}$ ; метрический по-

перечный размер  $R=20$  мкм; число отсчётов  $201 \times 201$ .

Графики входного поля и спектрального распределения показаны на рис. 1, а, б соответственно. Видно, что спектральное распределение повторяет структуру входного поля, причём основная энергия мод ГЛ сосредоточена в низких частотах.

На рис. 2, а показано падение энергии пучка на оптической оси, связанное с уширением пучка при распространении. Масштабное уширение хорошо видно для приведённых поперечных распределений интенсивности на различных расстояниях (рис. 2, б-г).

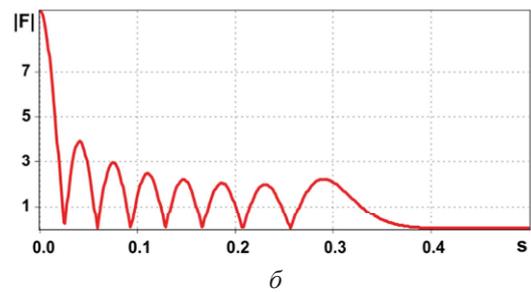
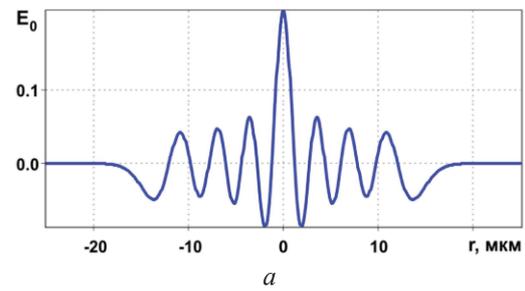


Рис. 1. Мода ГЛ  $(n,m)=(7,0)$ :  
а – амплитуда входного поля;  
б – амплитуда пространственного спектра

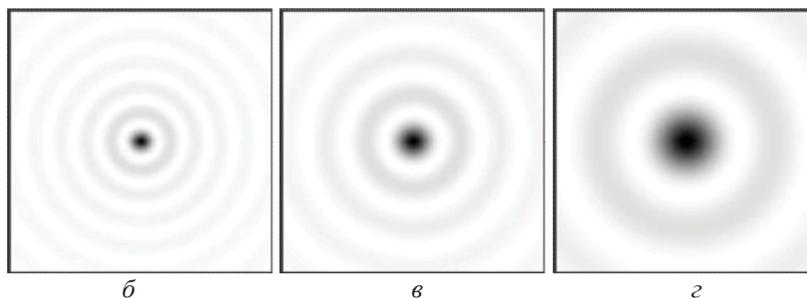
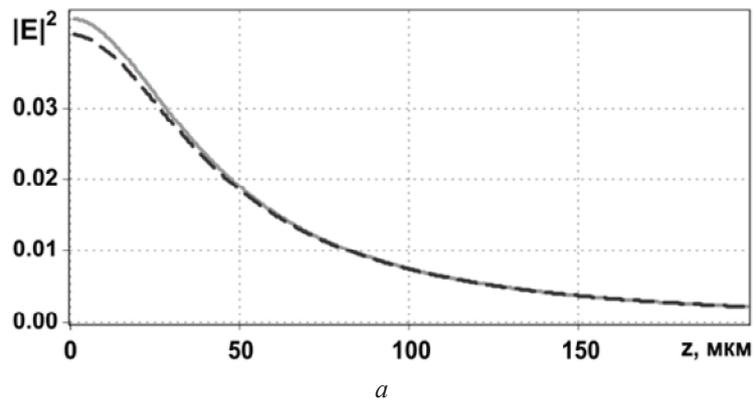


Рис. 2. Распространение моды ГЛ в свободном пространстве:  
а – графики осевой интенсивности, рассчитанные с помощью РПВ (чёрный) и РЗ (серый);  
поперечные распределения интенсивности на различных расстояниях:  
б –  $z=50$  мкм; в –  $z=100$  мкм, г –  $z=200$  мкм

Расчёты были выполнены с использованием метода РПВ (штриховая линия чёрного цвета) и интеграла РЗ (сплошная линия серого цвета). Как видно из рис. 2, *a*, различие между двумя методами невелико и уменьшается с ростом расстояния  $z$ :  $\delta=2,58\%$  (при  $z=50$  мкм);  $\delta=1,02\%$  (при  $z=100$  мкм);  $\delta=0,33\%$  (при  $z=200$  мкм).

Расчёт по формулам (4)-(6) требует четырёхкратного интегрирования и приводит к заметной погрешности вычислений вблизи входной плоскости при недостаточном числе отсчётов спектра. По формуле (7) получаются аналогичные результаты при меньших в 132,6 раза временных затратах.

### 3.2. Моды Бесселя

Лазерные пучки Бесселя относятся к модам свободного пространства и являются решениями уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах. Комплексная амплитуда мод Бесселя задаётся следующей формулой:

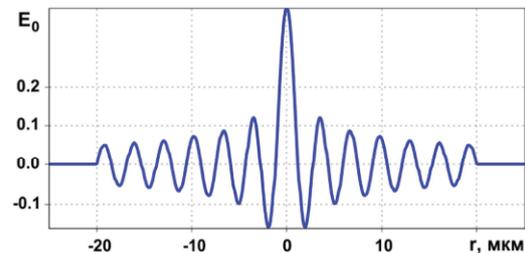
$$V_{\alpha,m}(r, \varphi, z) = A \cdot J_m(\alpha r) \times \exp\left[iz\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right] \exp(im\varphi), \quad (15)$$

где  $J_m(x)$  – функция Бесселя  $m$ -го порядка,  $\alpha = k\alpha_0$  – масштаб функции Бесселя,  $\alpha_0$  соответствует радиусу кольца пространственного спектра,  $A$  – нормирующая константа.

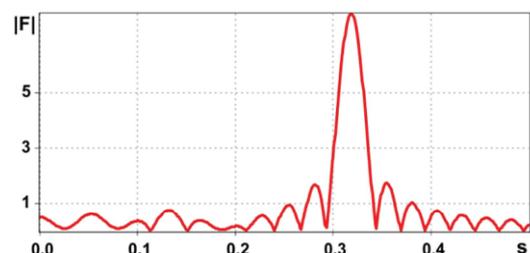
Выберем следующие параметры входного поля:  $\alpha_0 = 0,3183$ ;  $m=0$ ; метрический размер и число отсчётов такие же, как в предыдущем разделе. Параметр  $\alpha_0$  выбран так, чтобы размер центрального пятна был таким же, как для рассмотренной выше моды ГЛ.

Графики входного поля и спектрального распределения показаны на рис. 3, *a*, *б* соответственно. Нетрудно убедиться, что моды Бесселя не обладают инвари-

антностью к преобразованию Фурье, причём основная энергия заключена в кольце радиусом  $\alpha_0$ , то есть в высоких частотах.



*a*



*б*

Рис. 3. Мода Бесселя  $(\alpha,m)=(2,0)$ : *a* – амплитуда входного поля; *б* – амплитуда пространственного спектра

На рис. 4, *a* приведены графики интенсивности поля вдоль оси распространения, полученные с помощью РПВ и интеграла РЗ. Отличие двух методов расчёта более заметное, чем для мод ГЛ:  $\delta=5,13\%$  (при  $z=25$  мкм);  $\delta=6,27\%$  (при  $z=50$  мкм);  $\delta=7,35\%$  (при  $z=75$  мкм). Это связано с необходимостью очень точно рассчитывать пространственный спектр в методе РПВ.

На рис. 4, *б-г* хорошо видно, что мода Бесселя сохраняет свою структуру до некоторого расстояния, а затем разрушается. Расстояние сохранения модовых свойств пропорционально радиусу входного пучка и обратно пропорционально параметру  $\alpha_0$ . В реальности идеальная мода Бесселя не может быть создана, так как для этого необходима бесконечная энергия.

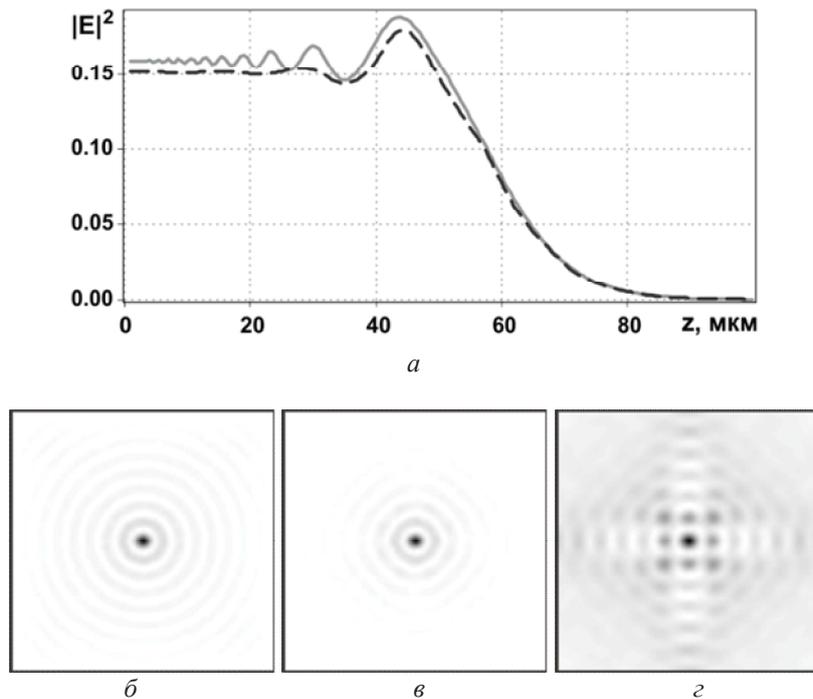


Рис. 4. Распространение моды Бесселя в свободном пространстве:  
 а – графики осевой интенсивности, рассчитанные с помощью РПВ (чёрный) и РЗ (серый);  
 поперечные распределения интенсивности на различных расстояниях:  
 б –  $z = 25$  мкм, в –  $z = 50$  мкм, г –  $z = 75$  мкм

Однако моды Бесселя обладают замечательным свойством сохранять компактное световое пятно на длительном расстоянии, в то время как гауссовы пучки уширяются при распространении. На рис. 5 показано сечение интенсивности пучка Бесселя и пучка ГЛ на расстоянии  $z=50$  мкм при условии, что на входе центральные пики были одинакового размера. Как видно из рис. 5, центральное пятно моды ГЛ значительно увеличилось по сравнению с пучком Бесселя.

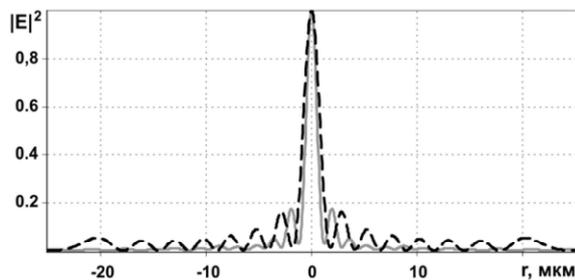


Рис. 5. Нормированное распределение интенсивности пучка Бесселя (серая линия) и пучка ГЛ (чёрная линия) на расстоянии  $z=50$  мкм

#### 4. Распространение лазерных пучков в одноосном кристалле

Исследуем распространение излучения в рутиле – одноосном кристалле, который имеет следующие параметры: диэлектрическая проницаемость для обыкновенного луча  $\epsilon_o = 6,84$ ; предельная диэлектрическая проницаемость для необыкновенного луча  $\epsilon_e = 8,43$ . Экземпляр рутила изображён на рис. 6.



Рис. 6. Образец рутила

Здесь и далее будем рассматривать пучки с линейной  $x$ -поляризацией. Поворот оси поляризации будет приводить к аналогичным результатам при условии соответствующего вращения оси кристалла.

#### 4.1. Ось кристалла перпендикулярна оси распространения и совпадает с осью поляризации

На рис. 7, а представлены графики осевой интенсивности, полученные для мод ГЛ двумя способами – методом РПВ

по формулам (9), (10) и с помощью аналога интеграла РЗ (11)-(13).

Расхождение между двумя методами оказалось ничтожно малым:  $\delta=0,009\%$  (при  $z=100$  мкм);  $\delta=0,006\%$  (при  $z=200$  мкм);  $\delta=0,007\%$  (при  $z=400$  мкм). Можно заметить, что пучок уширяется не так быстро, как в свободном пространстве, так как рассматривается более плотная оптическая среда.

На рис. 7, б-г хорошо видно, что пучок испытывает астигматическое искажение, связанное с особенностями распространения обыкновенного и необыкновенного лучей.

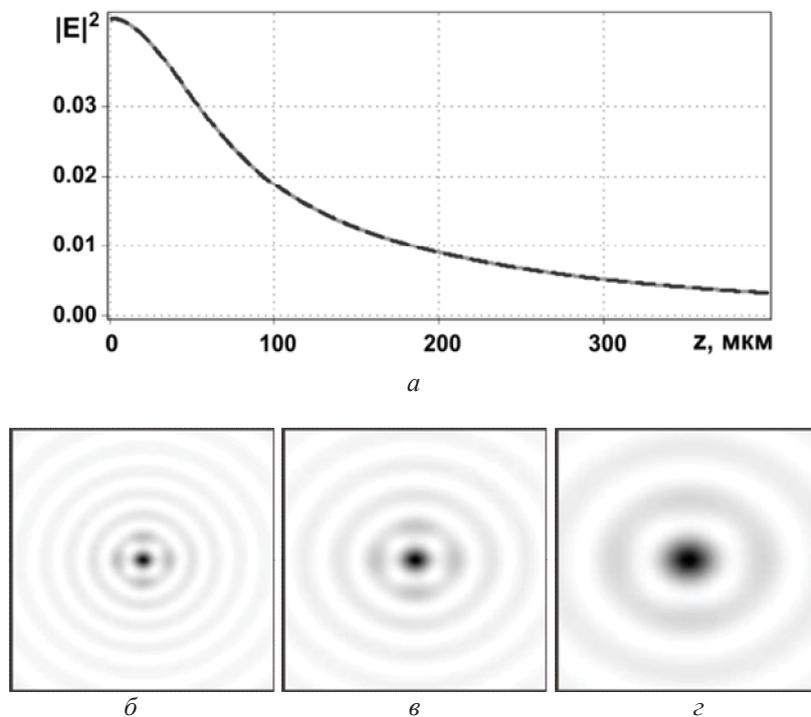


Рис. 7. Распространение моды ГЛ перпендикулярно оси кристалла, которая ориентирована вдоль направления поляризации:  
а - графики осевой интенсивности;  
б -  $z=100$  мкм, в -  $z=200$  мкм, г -  $z=400$  мкм

На рис. 8 показаны результаты распространения моды Бесселя. Отклонение между результатами, полученными при помощи двух методов, более заметно:  $\delta=2,09\%$  (при  $z=50$  мкм);  $\delta=6,12\%$  (при  $z=100$  мкм);  $\delta=2,60\%$  (при  $z=150$  мкм).

Видно, что в данной ситуации пучок Бесселя сильно подвержен астигматическим искажениям и не сохраняет свою структуру даже на некотором расстоянии, как это было в изотропной среде.

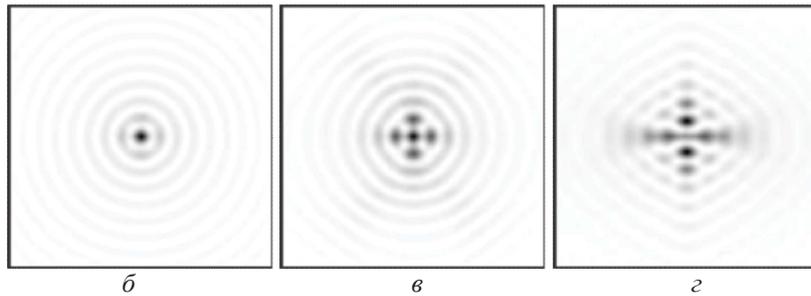
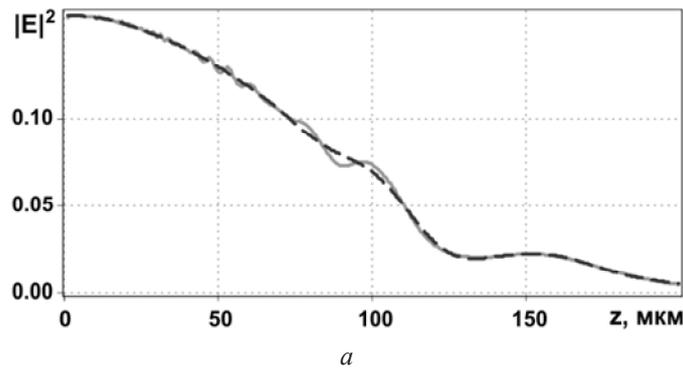


Рис. 8. Распространение моды Бесселя перпендикулярно оси кристалла, которая ориентирована вдоль направления поляризации:  
 а - графики осевой интенсивности;  
 поперечные распределения интенсивности на различных расстояниях:  
 б -  $z=50$  мкм, в -  $z=100$  мкм, г -  $z=150$  мкм

Увеличим размер входного поля вдвое, что в изотропной среде позволило бы вдвое увеличить расстояние модового распространения пучка Бесселя. На рис. 9 показаны графики входного поля и спектрального распределения.

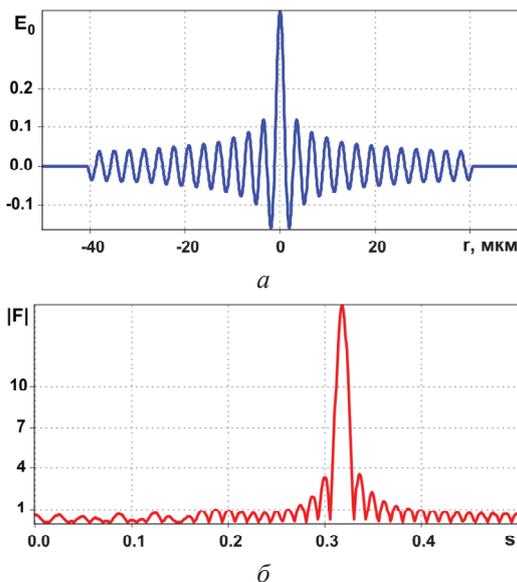


Рис. 9. Мода Бесселя с увеличенным входным радиусом:  
 а - амплитуда входного поля;  
 б - амплитуда пространственного спектра

Отметим, что радиус спектрального кольца (рис. 3, б и 9, б) не изменился, однако осцилляции стали более частыми, что требует большего числа отсчётов при использовании метода РПВ.

Результаты моделирования распространения представлены на рис. 10. Каждый из двух лучей – обыкновенный и необыкновенный – сохраняется дольше и их взаимодействие приводит к сложным астигматическим картинам.

Центральный пик может исчезать, а затем снова появляться, что хорошо видно на рис. 10, б-г, а также отражается на осцилляциях осевой интенсивности (рис. 10, а), которые практически не были видны при входном поле меньшего размера.

Увеличение числа отсчётов в обоих методах расчёта привело к уменьшению различия между ними:  $\delta=1,48\%$  (при  $z=100$  мкм);  $\delta=4,37\%$  (при  $z=200$  мкм);  $\delta=0,74\%$  (при  $z=300$  мкм).

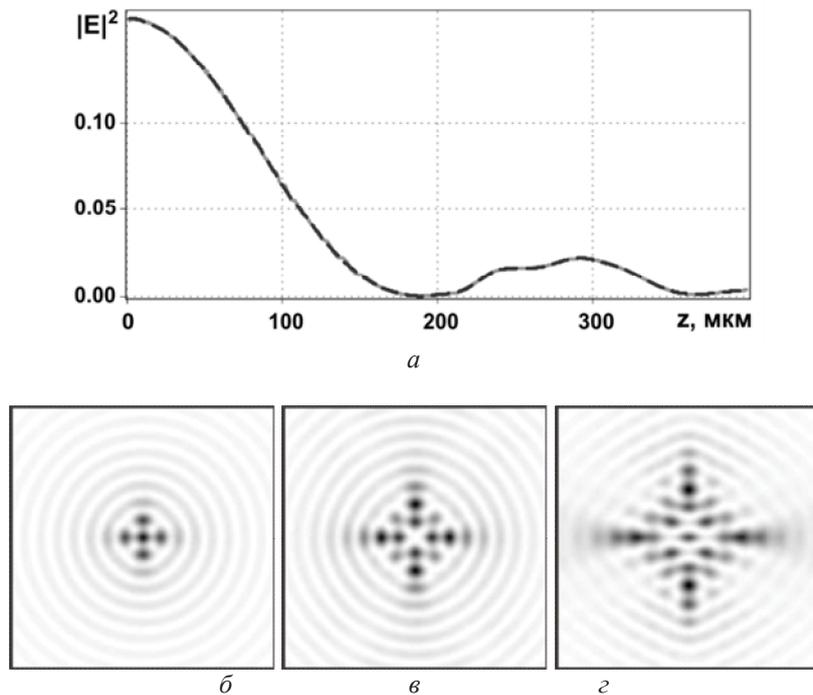


Рис. 10. Распространение моды Бесселя большого размера перпендикулярно оси кристалла, которая ориентирована вдоль направления поляризации:  
 а - графики осевой интенсивности;  
 поперечные распределения интенсивности на различных расстояниях:  
 б -  $z=100$  мкм, в -  $z=200$  мкм, з -  $z=300$  мкм

Таким образом, очевидно существенное различие распространения пучков ГЛ и Бесселя в анизотропной среде, связанное с особенностями спектрального распределения двух мод.

#### 4.2. Ось кристалла перпендикулярна оси распространения и перпендикулярна оси поляризации

На рис. 11 представлены результаты моделирования распространения моды ГЛ перпендикулярно оси кристалла, которая ориентирована также перпендикулярно направлению поляризации.

В отличие от предыдущего случая, здесь не наблюдается астigmaticского искажения пучка. Как и в свободном пространстве, мода ГЛ только масштабно изменяется.

Расхождение между двумя методами расчёта оказалось ничтожно малым:  $\delta=0,005\%$  (при  $z=100$  мкм);  $\delta=0,004\%$  (при  $z=200$  мкм);  $\delta=0,00001\%$  (при  $z=400$  мкм).

На рис. 12 представлены результаты моделирования распространения моды Бесселя.

Как и в изотропной среде, отличие двух методов в этом случае выше:  $\delta=1,79\%$  (при  $z=50$  мкм);  $\delta=4,52\%$  (при  $z=100$  мкм);  $\delta=5,50\%$  (при  $z=200$  мкм).

Таким образом, распространение лазерного излучения в одноосном кристалле, ось которого расположена перпендикулярно направлению распространения пучка и оси поляризации, происходит так же, как в изотропной среде. Это связано с отсутствием необыкновенного луча.

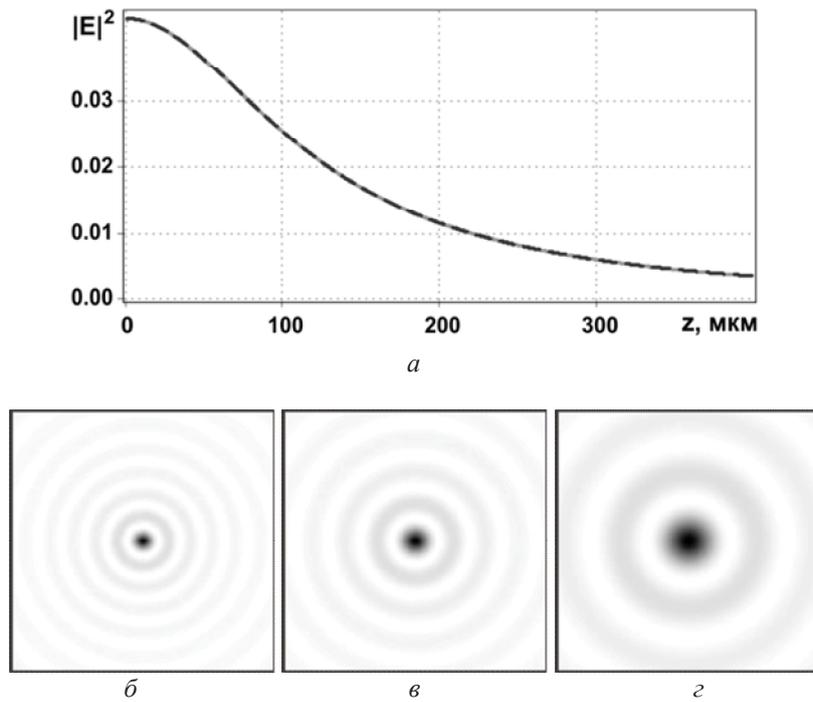


Рис. 11. Распространение моды ГЛ перпендикулярно оси кристалла, которая ориентирована также перпендикулярно направлению поляризации:  
 а - графики осевой интенсивности;  
 поперечные распределения интенсивности на различных расстояниях:  
 б -  $z=100$  мкм, в -  $z=200$  мкм, г -  $z=400$  мкм

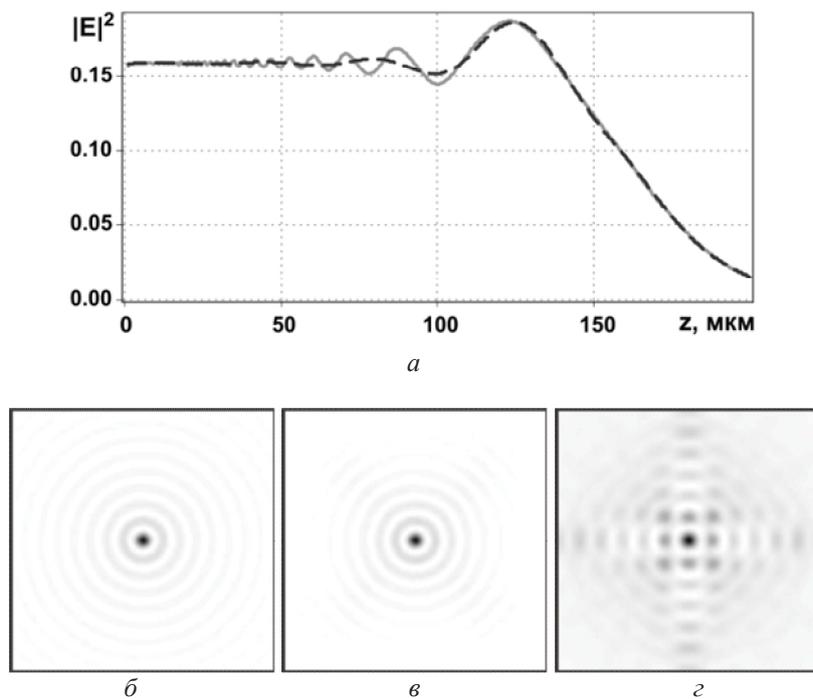


Рис. 12. Распространение моды Бесселя перпендикулярно оси кристалла, которая ориентирована также перпендикулярно направлению поляризации:  
 а - графики осевой интенсивности;  
 поперечные распределения интенсивности на различных расстояниях:  
 б -  $z=50$  мкм, в -  $z=100$  мкм, г -  $z=200$  мкм

### 4.3. Ось кристалла совпадает с осью распространения

На рис. 13 представлены результаты моделирования распространения моды ГЛ вдоль оси кристалла методом РПВ.

Осевая интенсивность спадает примерно так же, как в случае, рассмотренном в разделе 4.1. Однако астигматическое искажение выглядит иначе – происходит вытягивание в направлении, перпендикулярном оси поляризации.

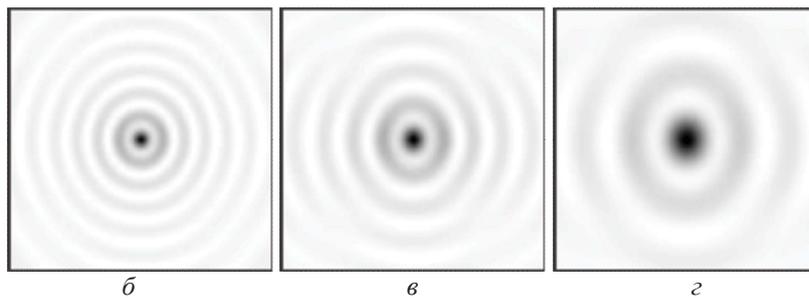
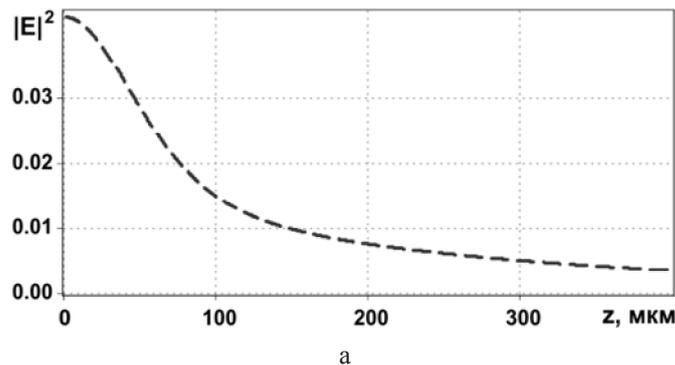


Рис. 13. Распространение моды ГЛ вдоль оси кристалла:  
 а - графики осевой интенсивности;  
 поперечные распределения интенсивности на различных расстояниях:  
 б -  $z=100$  мкм, в -  $z=200$  мкм, г -  $z=400$  мкм

На рис. 14-15 приведены результаты моделирования для мод Бесселя с одинаковыми параметрами, но с различным входным радиусом. В отличие от моды ГЛ, здесь наблюдаются колебания осевой интенсивности, связанные с интерференцией обыкновенного и необыкновенного пучков [18]. Чем протяжённее пучок Бес-

сея, тем больше осцилляций происходит до момента его разрушения.

Как видно из приведённых исследований, типы искажений пучков ГЛ и пучков Бесселя существенно отличаются, что связано с непараксиальным характером пучков Бесселя.

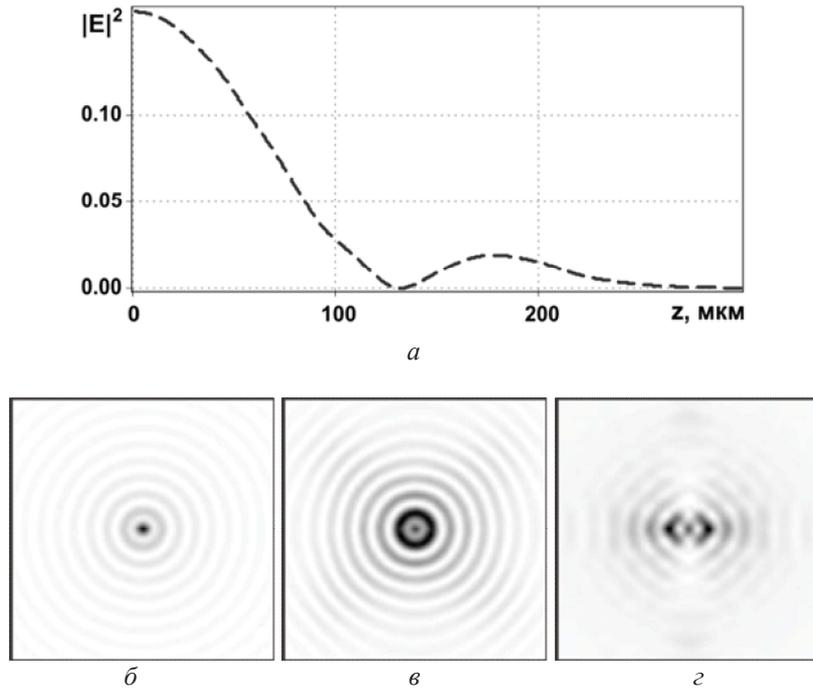


Рис. 14. Распространение моды Бесселя вдоль оси кристалла:  
 а - графики осевой интенсивности;  
 поперечные распределения интенсивности на различных расстояниях:  
 б -  $z=50$  мкм, в -  $z=100$  мкм, г -  $z=200$  мкм

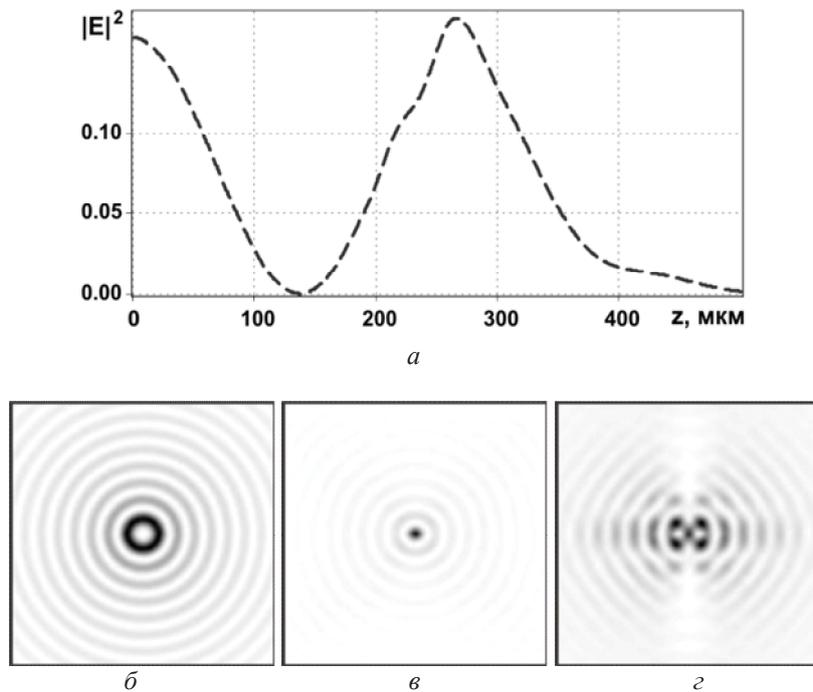


Рис. 15. Распространение моды Бесселя увеличенного радиуса вдоль оси кристалла:  
 а - графики осевой интенсивности;  
 поперечные распределения интенсивности на различных расстояниях:  
 б -  $z=137$  мкм (минимум), в -  $z=266$  мкм (максимум), г -  $z=400$  мкм

### Заключение

Выполнен сравнительный численный расчёт на основе разложения по плоским волнам и с использованием интеграла Рэля-Зоммерфельда. Первый метод требует больших временных затрат, чем второй, так как в первом методе используется вычисление спектра. Расхождения между результатами двух методов невелики, что позволяет говорить о практической актуальности интеграла Рэля-Зоммерфельда и его аналога для моделирования распространения лазерных пучков.

Проведено исследование распространения мод Гаусса-Лагерра и Бесселя в различных средах (изотропной и анизотропной) двумя вышеприведёнными методами. Показано, что гауссовы моды сохраняют свою структуру на большем протяжении, чем бесселевы моды, однако при этом уширяются.

Численное моделирование с различным типом поляризации пучков и различным положением оси кристалла позволило определить условия, при которых происходит наибольшее астигматическое искажение пучков. Проведённый анализ может быть полезен на практике для определения положения оси кристалла.

### Библиографический список

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973. 720 с.
2. Luneburg R.K. *Mathematical Theory of Optics*. Berkeley, California: University of California Press, 1964. 440 p.
3. Федоров Ф.И. Оптика анизотропных сред. Минск: Изд-во Академии наук БССР, 1958. 381 с.
4. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах. М.: Мир, 1987. 616 с.
5. Fleck J.A.Jr., Feit M.D. Beam propagation in uniaxial anisotropic media // *J. Opt. Soc. Am.* 1983. V. 73, no. 7. P. 920-926.
6. Ciattoni A., Crosignani B., Di Porto P. Vectorial theory of propagation in uniaxially anisotropic media // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2001. V. 18, no. 7. P. 1656-1661.
7. Досколович Л.Л., Казанский Н.Л., Харитонов С.И. Интегральные представления решений системы уравнений Максвелла для анизотропных сред // *Компьютерная оптика*. 2010. Т. 34. № 1. С. 52-57.
8. Хонина С.Н., Харитонов С.И. Аналог интеграла Рэля-Зоммерфельда для анизотропной и гиротропной сред // *Компьютерная оптика*. 2012. Т. 36. № 2. С. 172-182.
9. Khonina S.N., Kharitonov S.I. An analog of the Rayleigh-Sommerfeld integral for anisotropic and gyrotropic media // *Journal of Modern Optics*. 2013. V. 60, no. 10. P. 814-822.
10. Bleistein N., Handelsman R.A. *Asymptotic Expansions of Integrals*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975. P. 340-359.
11. Fadeyeva T.A., Shvedov V.G., Izdebskaya Y.V., Volyar A.V., Brasselet E., Neshev D.N., Desyatnikov A.S., Krolikowski W., Kivshar Y.S. Spatially engineered polarization states and optical vortices in uniaxial crystals // *Opt. Expr.* 2010. V. 18, no. 10. P. 10848-10863.
12. Zusin D.H., Maksimenka R., Filipov V.V., Chulkov R.V., Perdrix M., Gobert O., Grabtchikov A.S. Bessel beam transformation by anisotropic crystals // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2010. V. 27, no. 8. P. 1828-1833.
13. Picon A., Benseny A., Mompert J., Calvo G.F. Spin and orbital angular momentum propagation in anisotropic media: theory // *J. Opt.* 2011. V. 13. P. 064019 (7pp).
14. Khilo N.A. Conical diffraction and transformation of Bessel beams in biaxial crystals // *Optics Communications*. 2013. V. 286. P. 1-5.
15. Stallinga S. Axial birefringence in high-numerical-aperture optical systems and the light distribution close to focus // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2001. V. 18, no. 11. P. 2846-2859.

16. Seshadri S.R. Beam dynamics of two modes propagating along the optic axis in a uniaxial crystal // J. Opt. Soc. Am. A. 2005. V. 22, no 2. P. 361-369.

17. Liu D., Zhou Z. Various dark hollow beams propagating in uniaxial crystals orthogonal to the optical axis // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 2008. V. 10. P. 095005 (9pp).

18. Хонина С.Н., Волотовский С.Г., Харитонов С.И. Периодическое измене-

ние интенсивности модовых лазерных пучков при распространении в анизотропных одноосных кристаллах // Изв. Самар. науч. центра Российской академии наук. 2012. Т. 14. № 4. С. 18-27.

19. Хонина С.Н., Зотеева О.В., Харитонов С.И. Непараксиальное распространение гауссовых пучков под углом к оси анизотропного кристалла // Компьютерная оптика. 2012. Т. 36. № 3. С. 346-356.

### Информация об авторах

**Краснов Андрей Павлович**, студент, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: [kraan2009@yandex.ru](mailto:kraan2009@yandex.ru). Область научных интересов: дифракционная оптика.

**Хонина Светлана Николаевна**, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт систем обработки изображений РАН. E-mail: [khonina@smr.ru](mailto:khonina@smr.ru). Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений.

## COMPARATIVE MODELLING OF LASER BEAM PROPAGATION IN A UNIAXIAL CRYSTAL BASED ON INTEGRAL OPERATORS

© 2014 A. P. Krasnov<sup>1</sup>, S. N. Khonina<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Samara State Aerospace University, Samara, Russian Federation

<sup>2</sup>Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russian Federation

A comparative numerical calculation of propagation of Gauss-Laguerre and Bessel laser modes in an isotropic medium and in a uniaxial crystal by means of integral propagation operators based on the plane and spherical wave expansion is presented.

Numerical simulations with different types of beam polarization and different position of the crystal axis has made it possible to determine the conditions under which the greatest astigmatic distortion of the beams takes place. The analysis may be useful in practice to determine the position of the crystal axis.

*Expansion in plane waves, Raleigh-Sommerfield integral, Gauss-Laguerre modes, Bessel modes, uniaxial crystal, ordinary and extraordinary beams.*

### References

1. Born M., Wolf E. Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. Cambridge University Press, 1999. 952 p.

2. Luneburg R.K. Mathematical theory of optics. Berkeley, California: University of California Press, 1964. 440 p.

3. Fedorov F.I. Optika anizotropnykh sred [Optics of anisotropic media]. Minsk:

Academy of Sciences of BSSR Publ., 1958. 381 p.

4. Yariv A., Yeh P. Optical waves in crystals: propagation and control of laser radiation. Wiley-Interscience, 2002. 608 p.

5. Fleck J.A.Jr., Feit M.D. Beam propagation in uniaxial anisotropic media // J. Opt. Soc. Am. 1983. V. 73, no. 7. P. 920-926.

6. Ciattoni A., Crosignani B., Di Porto P. Vectorial theory of propagation in uniaxially anisotropic media // J. Opt. Soc. Am. A. 2001. V. 18, no. 7. P. 1656-1661.

7. Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L., Kharitonov S.I. Integral representations for solutions of Maxwell's equations for anisotropic media // Computer Optics. 2010. V. 34, no 1. P. 52-57. (In Russ.)

8. Khonina S.N., Kharitonov S.I. Analogue of Rayleigh-Sommerfeld integral for anisotropic and gyrotropic media // Computer Optics. 2012. V. 36, no 2. P. 172-182. (In Russ.)

9. Khonina S.N., Kharitonov S.I. An analog of the Rayleigh-Sommerfeld integral for anisotropic and gyrotropic media // Journal of Modern Optics. 2013. V. 60, no. 10. P. 814-822.

10. Bleistein N., Handelsman R.A. Asymptotic expansions of integrals. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1975. P. 340-359.

11. Fadeyeva T.A., Shvedov V.G., Izdebskaya Y.V., Volyar A.V., Brasselet E., Neshev D.N., Desyatnikov A.S., Krolikowski W., Kivshar Y.S. Spatially engineered polarization states and optical vortices in uniaxial

crystals // Opt. Expr. 2010. V. 18, no. 10. P. 10848-10863.

12. Zusin D.H., Maksimenka R., Filipov V.V., Chulkov R.V., Perdrix M., Gobert O., Grabtchikov A.S. Bessel beam transformation by anisotropic crystals // J. Opt. Soc. Am. A. 2010. V. 27, no. 8. P. 1828-1833.

13. Picon A., Benseny A., Mompert J., Calvo G.F. Spin and orbital angular momentum propagation in anisotropic media: theory // J. Opt. 2011. V. 13. P. 064019 (7 p).

14. Khilo N.A. Conical diffraction and transformation of Bessel beams in biaxial crystals // Optics Communications. 2013. V. 286. P. 1-5.

15. Stallinga S. Axial birefringence in high-numerical-aperture optical systems and the light distribution close to focus // J. Opt. Soc. Am. A. 2001. V. 18, no. 11. P. 2846-2859.

16. Seshadri S.R. Beam dynamics of two modes propagating along the optic axis in a uniaxial crystal // J. Opt. Soc. Am. A. 2005. V. 22, no 2. P. 361-369.

17. Liu D., Zhou Z. Various dark hollow beams propagating in uniaxial crystals orthogonal to the optical axis // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 2008. V. 10. P. 095005 (9 p).

18. Khonina S.N., Volotovskiy S.G., Kharitonov S.I. Periodic intensity change for laser mode beams propagating in anisotropic uniaxial crystals // Izv. SNC RAN. 2012. V. 4, no. 4. P. 18-27. (In Russ.)

19. Khonina S.N., Zoteeva O.V., Kharitonov S.I. Nonparaxial propagation of gaussian beams on the angle to the axis of the anisotropic crystal // Computer Optics. 2012. V. 36, no. 3. P. 346-356. (In Russ.)

### About the authors

**Krasnov Andrey Pavlovich**, undergraduate student, Samara State Aerospace University. E-mail: [kraan2009@yandex.ru](mailto:kraan2009@yandex.ru). Area of research: diffractive optics.

**Khonina Svetlana Nikolaevna**, Doctor of Physics and Mathematics; Professor,

Leading Researcher of the Image Processing Systems Institute of the RAS. Area of research: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing.