

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЕБИСИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ НЕСЖИМАЕМОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

© 2011 А. Н. Харитонов², В. Г. Шахов¹

¹Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

²ФГУП ГНПРКЦ «ЦСКБ-ПРОГРЕСС», г. Самара

Для решения нестационарных задач несжимаемого пограничного слоя рассматривается возможность применения конечно-разностного метода Себиси. С помощью данного метода решены задачи исследования пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении; обтекания круглого цилиндра в поперечном направлении; продольного обтекания профиля крыла NASA 0012 для нулевого угла атаки; обтекания движущегося круглого цилиндра для случая ламинарного нестационарного пограничного слоя.

Несжимаемый пограничный слой, метод Себиси, коэффициент сопротивления трения, толщина вытеснения, задача Блазиуса.

В настоящее время решение нестационарных задач несжимаемого пограничного слоя является весьма актуальным направлением научных исследований. Подобные задачи достаточно успешно решаются благодаря значительному увеличению мощности компьютерной техники и появлению таких вычислительных комплексов, как Ansys Fluent, StarCD, в основе которых лежат алгоритмы, основанные на численных методах решения полных уравнений Навье-Стокса. Но, с другой стороны, использование подобных программ требует значительных вычислительных ресурсов и занимает много времени, что не всегда рационально. Кроме того, данные программные комплексы не всегда дают возможность получить решение конкретной задачи с учётом всех особенностей обтекания. Поэтому весьма актуальным по-прежнему остаётся использование приближённых методов, позволяющих получить решение задачи со значительной экономией временных и вычислительных ресурсов.

В данной работе рассматривается возможность применения метода Себиси для решения нестационарных задач несжимаемого пограничного слоя.

В общем случае система уравнений для несжимаемого двумерного пограничного слоя может быть записана следующим образом [1, 2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \\ &+ v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

при этом граничные условия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} u = v = 0 \quad \text{при } y = 0, \\ u \rightarrow U_e(x, t) \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь

u, v – продольная и поперечная компоненты скорости,

x, y – декартовы координаты,

U_e – скорость на внешней границе пограничного слоя,

t – время,

n – кинематический коэффициент вязкости.

При этом касательное напряжение $-\overline{u'v'}$ может быть заменено в формуле (1) соотношением

$$-\overline{u'v'} = e_m \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3)$$

где

e_m – коэффициент турбулентной кинематической вязкости.

Данное соотношение используется для того, чтобы в дальнейшем можно было применять модель турбулентности Себиси-Смита.

Для использования метода Себиси, который в свою очередь основывается на неявном методе Келлера (схема «прямоугольник»), вводятся следующие переменные:

$$h = \sqrt{\frac{U_0(x)}{nx}} y, \quad y = \sqrt{nxU_0} f(x, h, t), \quad (4)$$

где

$f(x, h, t)$ – безразмерная функция тока,

$U_0(x)$ – некоторая функция, зависящая только от x .

Тогда уравнение неразрывности в системе (1) тождественно удовлетворяется, если функция тока y определяется соотношением

$$u = \frac{\partial y}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial y}{\partial x}. \quad (5)$$

Используя правило дифференцирования сложной функции и соотношения (4), (5), уравнение движения в системе (1) можно представить в следующей форме (штрихом обозначено дифференцирование по h):

$$\begin{aligned} (bf'')' + \frac{m+1}{2} ff'' - m(f')^2 + m_1 = \\ = x \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{U_0} \frac{\partial f'}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$f' = \frac{u}{U_0}, \quad m = \frac{x}{U_0} \frac{dU_0}{dx}, \quad b = 1 + \frac{\varepsilon_m}{v},$$

$$m_1 = \frac{x}{U_0^2} \left(U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial U_0}{\partial t} \right).$$

При этом граничные условия (2) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} f = f' = 0 \quad \text{при } h = 0, \\ f' = U_e/U_0 \quad \text{при } h \rightarrow h_\infty. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Решение уравнения (6) с граничными условиями (7) осуществляется конеч-

но-разностным методом Себиси в четыре этапа:

1. Уравнение (6) заменяется системой дифференциальных уравнений первого порядка (для этого вводятся новые переменные).

2. Дифференциальные уравнения заменяются конечно-разностными с использованием формул центральных разностей.

3. Полученная система нелинейных конечно-разностных уравнений линейруется с помощью метода Ньютона и записывается в векторно-матричном виде.

4. Система линейных уравнений решается методом матричной прогонки.

Более подробно метод Себиси рассмотрен в работах [1, 3]. На основе данного метода была разработана программа в среде программирования Delphi для решения нестационарных задач несжимаемого двумерного пограничного слоя. Программа позволяет получить решение уравнения (6) с граничными условиями (7) и ряд характеристик пограничного слоя, в том числе местный коэффициент сопротивления трения (c_f) и толщину вытеснения (d^*), определяемых по формулам:

$$c_f = \frac{2t_w}{rU_e^2}, \quad d^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_e}\right) dy,$$

где

t_w – напряжение поверхностного трения,

r – плотность.

В качестве тестовых задач для проверки работоспособности метода Себиси и программы были рассмотрены следующие стационарные задачи:

1. Исследование пограничного слоя на плоской пластине, обтекаемой в продольном направлении.

2. Обтекание круглого цилиндра в поперечном направлении.

Полученные решения данных задач хорошо согласуются с решениями, приведёнными в работах Г. Шлихтинга и Л.Г. Лойцянского [2, 4], что подтверждает правильность работы алгоритма и программы. Так, например, для первой задачи

на рис. 1 представлено распределение скоростей в пограничном слое на плоской пластине по Блазиусу и методу Себиси. Точное решение данной задачи приведено в работе Шлихтинга [2]. В случае обтека-

ния круглого цилиндра (вторая задача) отрыв наблюдается в точке, равной примерно 105° , а в работе Шлихтинга [2] отрыв достигается в точке $104,5^\circ$.

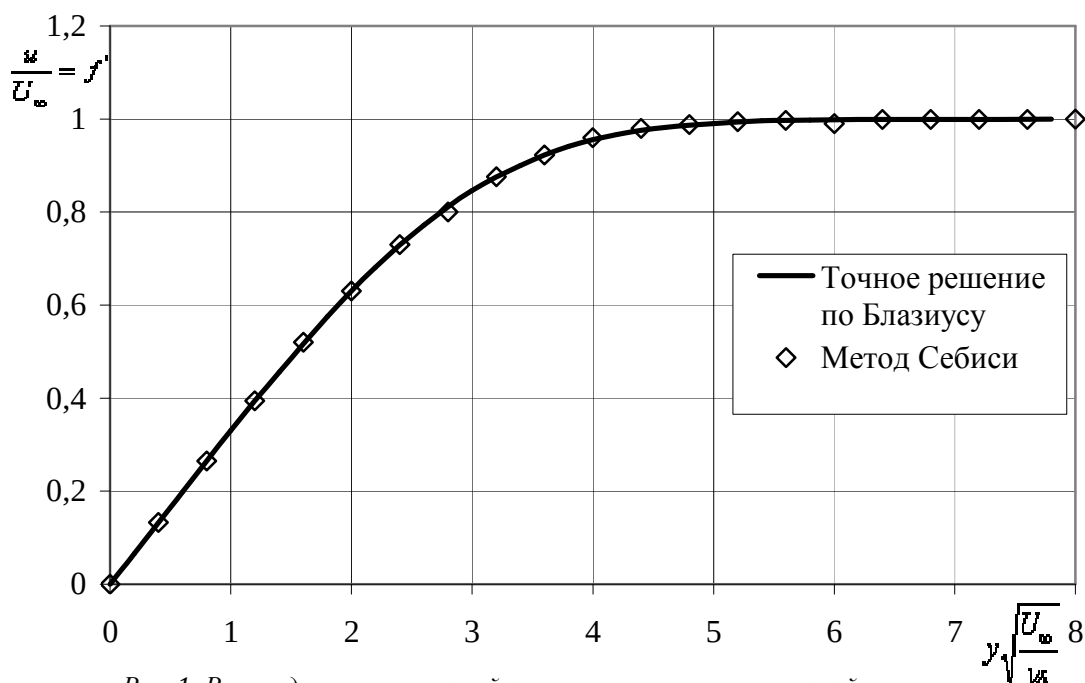


Рис. 1. Распределение скоростей в пограничном слое на плоской пластине по Блазиусу и методу Себиси

Кроме того, для случая как ламинарного, так и турбулентного течения была рассмотрена задача продольного обтекания профиля крыла NACA 0012 для нулевого угла атаки, где

$$U_e(x, t) = U_{e0}(x)(1 + B \cos(\omega t)).$$

В данной формуле, использованной Себиси:

B — амплитуда,

ω — угловая частота (рад/с).

Примеры полученных результатов для профиля крыла NACA 0012 представлены на рис. 2 и 3.

Графики, представленные на рис. 2, соответствуют результатам, полученным Себиси, что подтверждает правильность работы алгоритма и программы. На рис. 3 приведены дополнительные расчёты изменения местного коэффициента сопротивления трения при различных значениях амплитуды и угловой частоты.

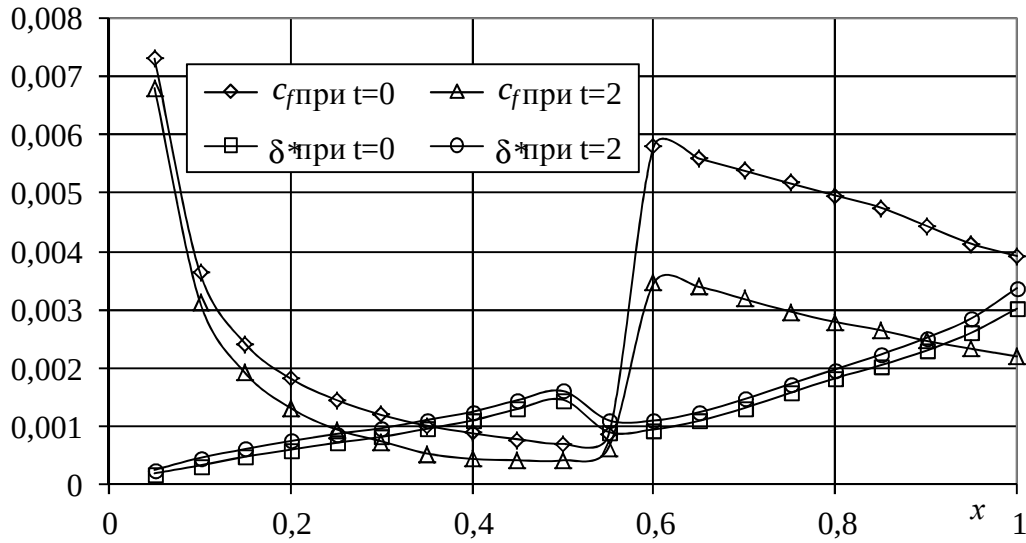


Рис. 2. Изменение местного коэффициента сопротивления трения и толщины вытеснения пограничного слоя в различные моменты времени для профиля крыла NACA 0012

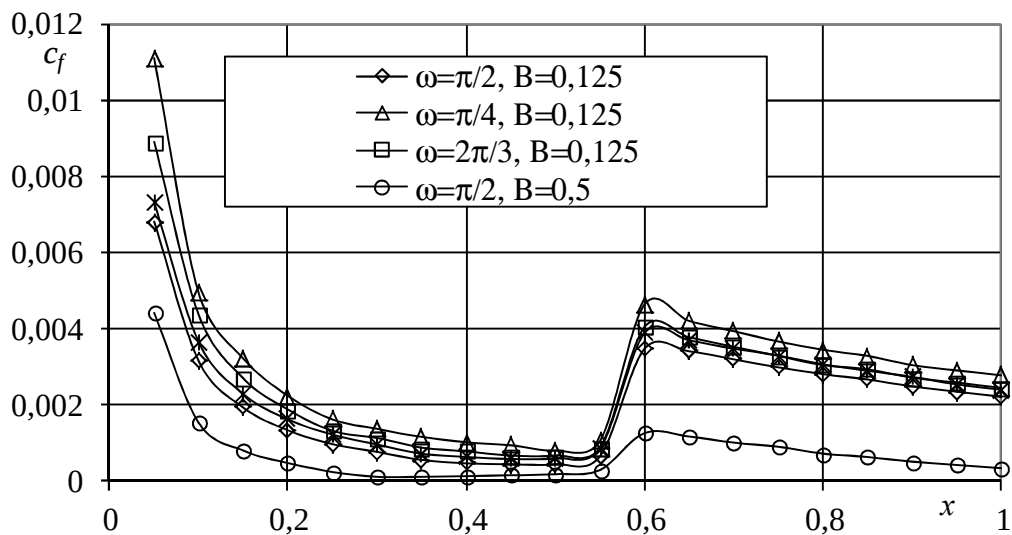


Рис. 3. Изменение местного коэффициента сопротивления трения для профиля крыла NACA 0012 при $t=2$

Для случая ламинарного нестационарного пограничного слоя была рассмотрена задача обтекания движущегося круглого цилиндра радиуса R , причём ско-

рость U_e на внешней границе пограничного слоя определялась формулой:

$$U_e(x, t) = 2tU_\infty \sin(x/R).$$

Полученные результаты приведены на рис. 4 и 5.

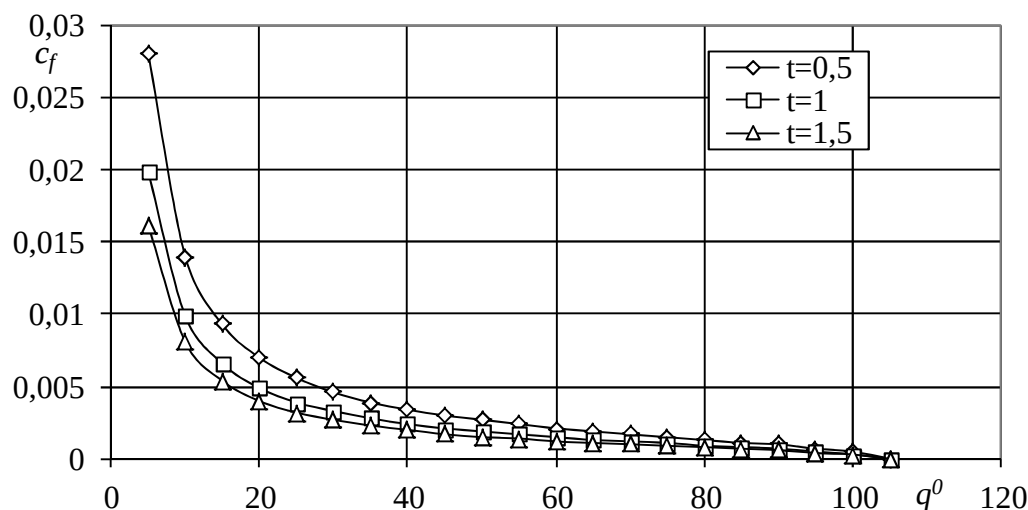


Рис. 4. Изменение местного коэффициента сопротивления трения для круглого цилиндра в различные моменты времени t

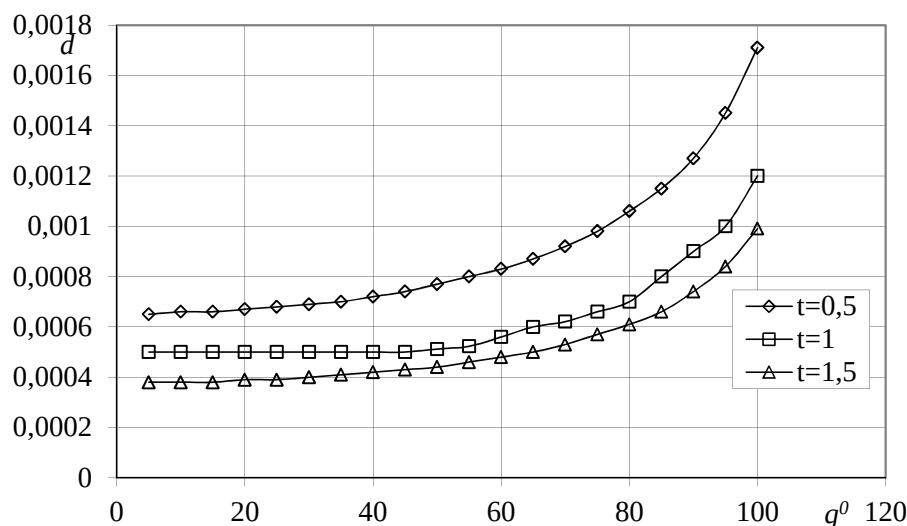


Рис. 5. Изменение толщины вытеснения пограничного слоя для круглого цилиндра в различные моменты времени t

В заключение следует отметить, что применение метода Себиси и разработанной на его основе программы позволяет решать нестационарные задачи несжимаемого двумерного пограничного слоя за относительно короткое время и даёт возможность в дальнейшем использовать их для решения различных технических задач.

Данная работа проведена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-

педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

Библиографический список

1. Себиси, Т. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы [Текст] / Т. Себиси, П. Брэдшоу. – М.: Мир, 1987. – 592 с.
2. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя [Текст] / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
3. Cebeci, T. Computational fluid dy-

namics for engineers [Текст] / Т. Cebeci, J. P. Shao, F. Kafyeke, E. Laurendeau. – California: Horizons Publishing Inc., 2005. – 396 с.

граничный слой [Текст] / Л. Г. Лойцянский. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 478 с.

4. Лойцянский, Л. Г. Ламинарный по-

APPLICATION OF CEBECI'S METHOD FOR SOLVING TIME-DEPENDENT PROBLEMS OF THE INCOMPRESSIBLE BOUNDARY LAYER

© 2011 A. N. Kharitonova², V. G. Shakhov¹

¹Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov
(National Research University)

²State Research and Production Space Rocket Center "TsSKB – Progress", Samara

The opportunity of using the Cebeci method to solve time-dependent problems of the incompressible boundary layer is dealt with in the paper. The method helped to solve the problems of analyzing the boundary layer on a flat plate streamlined in the longitudinal direction; the flow around a circular cylinder in the transverse direction; the longitudinal flow of the NACA 0012 airfoil for the zero angle of attack; the flow around a moving circular cylinder for the case of laminar non-stationary boundary layer.

Incompressible boundary layer, Cebeci method, local skin-friction coefficient, displacement thickness, Blasius problem.

Информация об авторах

Харитоновна Анна Николаевна, начальник группы. ФГУП ГНПРКЦ «ЦСКБ-ПРОГРЕСС», г. Самара. Область научных интересов: механика жидкости и газа, исследования в области пространственного пограничного слоя. E-mail: annqwer@mail.ru.

Шахов Валентин Гаврилович, кандидат технических наук, профессор, заведующий кафедрой аэрогидродинамики. Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). Область научных интересов: аэродинамика, механика жидкости и газа, исследования в области пограничного слоя. E-mail: shakhov@ssau.ru.

Kharitonova Anna Nicolayevna, head of group, State Research and Production Space Rocket Center "TsSKB – Progress", annqwer@mail.ru. Area of research: mechanics of fluids and gases, research in the area of three-dimensional boundary layer.

Shakhov Valentin Gavrilovitch, candidate of technical sciences, professor, head of aerohydrodynamic department, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University), shakhov@ssau.ru. Area of research: aerodynamics, mechanics of fluids and gases, research in the area of boundary layer.