

## К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ ОБ ИЗМЕНЕНИИ ЖЕСТКОСТИ КОНСТРУКЦИЙ

© 2004 В. А. Комаров

Самарский государственный аэрокосмический университет

Предлагается доказательство теорем о производных потенциальной энергии деформаций конструкций по изменению количества материала ее элементов с использованием принципа возможных изменений напряжений (усилий).

Некоторые читатели высказывают сомнение в правильности доказательства теорем нашей статьи [1]. При этом они соглашаются с их верностью только для статически определимых систем.

Действительно, при выводе производных потенциальной энергии упругих деформаций конструкций по объемам материала их элементов в [1] использована запись энергии через внутренние усилия в элементах конструкции. Эти усилия в общем случае – в статически неопределимых конструкциях и в сплошной среде – зависят от соотношения жесткостей элементов. Определенному распределению материала в конструкции соответствует определенное распределение внутренних усилий. Выписать аналитически такие зависимости удастся только в простейших случаях.

При вычислении производных в [1] внутренние усилия в конструкции предполагаются неизменными. Именно это упрощение вызывает сомнение в полученных результатах и нуждается, по-видимому, в обосновании.

Для этих целей удобно воспользоваться принципом *возможных изменений напряжений (усилий)*, который симметричен хорошо известному и широко используемому принципу *возможных перемещений*.

Принцип возможных изменений напряжений формулируется так: “если деформация системы согласована со всеми имеющимися внутренними и внешними связями, т.е. если соблюдена совместимость деформаций системы, то *сумма работ*, производимых бесконечно малыми возможными изменениями всех внешних и внутренних сил на действительных перемещениях системы (вызванных

самими статически действующими силами), *равна нулю*” (цитирование по [2], курсив наш). Принцип выражает условие стационарности полной потенциальной энергии упругой системы [2, 3].

Не поступаясь общностью рассуждений, рассмотрим вначале произвольную статически неопределимую стержневую систему. Некоторому распределению материала по элементам  $V_i = F_i l_i$  соответствует распределение усилий  $N_i$  для определенной нагрузки (здесь и далее используются обозначения [1]). Дадим какому-либо элементу конструкции с номером  $j$  бесконечно малое приращение объема материала  $dV_j$ . Тогда усилия в элементах конструкции изменятся и станут  $N_i + dN_{ij}$ , где  $dN_{ij}$  - изменение усилий в  $i$ -ом элементе от изменения объема (жесткости) элемента. Теперь заметим, что усилия  $N_i$  и  $N_i + dN_{ij}$  удовлетворяют условиям равновесия. Поэтому  $dN_{ij}$  также удовлетворяют условиям равновесия и, более того, являются самоуравновешенными и поэтому могут рассматриваться как *возможное изменение усилий*, то есть как вариации. В случае сплошной среды такими вариациями будут напряжения, которые удовлетворяют условиям равновесия. Такие вариации не изменяют потенциальной энергии деформаций  $\delta U = 0$ , как следует из названного принципа.

Поэтому процедура дифференцирования выражений (5), (13) и (22) в [1] для потенциальной энергии деформаций конструк-

ций может быть представлена следующей последовательностью:

1. Вычисляется потенциальная энергия исходной конструкции.

2. Дается бесконечно малое приращение количества материала (жесткости) одному из элементов.

3. Вычисляется соответствующее новое значение потенциальной энергии в предположении неизменности внутренних усилий (напряжений – для сплошной среды).

4. К усилиям исходной системы добавляются самоуравновешенные приращения сил (напряжений), которые обеспечивают выполнение условий совместности деформаций, но не изменяют вычисленного нового значения потенциальной энергии.

5. Вычисляется соответствующая производная.

Таким образом, правильность результатов дифференцирования величины потенциальной энергии деформаций конструкции при фиксированных величинах внутренних усилий (напряжений) обеспечивается ее стационарностью по отношению к распределению внутренних усилий.

В качестве примера рассмотрим статически неопределимую ферму, нагруженную силой (рис. 1).

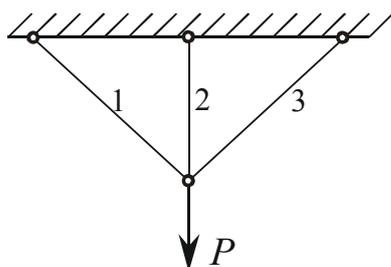


Рис. 1

Примем следующие обозначения и параметры:

1, 2, 3 – номера стержней;  $N_i$ ,  $l_i$ ,  $F_i$ ,  $V_i$  – усилие в  $i$ -ом стержне, его длина, площадь поперечного сечения и объем материала,

соответственно; углы между стержнями  $\pi/4$ ;  $F_1 = F_3$ .

Пользуясь одним из способов раскрытия статической неопределимости, можно получить следующие выражения для усилий в стержнях:

$$N_1 = \frac{F_1 P}{2 \left( F_2 + F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}; \quad (1)$$

$$N_2 = \frac{F_2 P}{F_2 + F_1 \frac{\sqrt{2}}{2}}. \quad (2)$$

Как видим, величины усилий в стержнях существенно зависят от соотношения их жесткостей.

Этим усилиям соответствует потенциальная энергия деформаций фермы

$$U = \frac{P^2}{2E} \frac{l_2}{\left( F_2 + F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}. \quad (3)$$

Из (3), учитывая, что  $V_i = F_i l_i$ , получим для изменения объема стержня 2 величину производной

$$\frac{\partial U}{\partial V_2} = \frac{\partial U}{l_2 \partial F_2} = - \frac{P^2}{2E} \frac{1}{\left( F_2 + F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}. \quad (4)$$

Вычисление удельной потенциальной энергии в этом стержне непосредственно по (2) дает

$$U_2 = \frac{1}{V_2} \frac{N_2^2 l_2}{2EF_2} = \frac{P^2}{2E \left( F_2 + F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2},$$

то есть точно такую же величину (но с обратным знаком), как и по (4), во всем диапазоне отношений  $F_2/F_1$ .

В заключение отметим, что показанное здесь применение принципа возможных изменений напряжений (усилий) может быть полезным и в других задачах, связанных с вычислением коэффициентов чувствительности конструкций, как более строгий подход, чем феноменологический, основанный на наблюдениях свойств консервативности усилий в конструкциях [4, 5].

Автор благодарит А. И. Данилина за дискуссию по данной работе.

## PROVING THEOREMS OF CHANGING STRUCTURE RIGIDITY

© 2004 V. A. Komarov  
 5. Новые направления оптимизации в конструктивном проектировании. Перевод с англ. М.: Стройиздат. 1989. – 588 с.

Samara State Aerospace University

Работа выполнена при поддержке Межотраслевой программы сотрудничества Минобразования России и АО “АВТОВАЗ” (шифр проекта 02.02.016) и гранта CRDF RE0-1386.

### Список литературы

1. Комаров В. А. Повышение жесткости конструкций топологическими средствами // Вестник СГАУ, № 1, 2003, с. 24-37.
2. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Том 2. М.: Наука. 1978. – 616 с.
3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1979. – 744 с.
4. Малков В. П., Угодчиков А. Г. Оптимизация упругих систем. М.: Наука. 1981. – 288 с.
5. Новые направления оптимизации в конструктивном проектировании. Перевод с англ. М.: Стройиздат. 1989. – 588 с.

We propose demonstration of theorems of structure deformation potential energy derivatives according to changing of the amount of the material it consist of using the principle of possible stress changes.