

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕСУЩЕГО АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ МЕТОДОМ СОПРЯЖЁННОГО ГРАДИЕНТА

© 2011 Е. В. Печеник

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Рассматривается задача оптимизации формы несущего аэродинамического профиля. Сформулирована функция цели, в которой помимо аэродинамических учитываются массовые характеристики профиля. Задача оптимизации решается при помощи метода сопряжённого градиента для вязкого несжимаемого течения. Прямая задача решается при помощи алгоритма SIMPLE в вычислительном пакете Star-CD. Сопряжённые уравнения решаются при помощи адаптированного алгоритма SIMPLE.

Функция цели, функции ограничений, проектные переменные, сопряжённые уравнения, несущий аэродинамический профиль.

Введение. В настоящее время проектирование формы несущего аэродинамического профиля опирается на экспериментальное и математическое моделирование. Методы вычислительной гидроаэродинамики (ВГАД) позволяют относительно дёшево и быстро проанализировать различные формы профиля. Эксперимент, в свою очередь, даёт возможность верифицировать результаты, полученные при помощи ВГАД. Однако перебор альтернативных вариантов не гарантирует получение оптимальной формы профиля. Поэтому актуальной проблемой является разработка эффективного алгоритма оптимизации аэродинамических форм для вязкого течения жидкости и газа. В работе используется метод сопряжённого градиента. Принципиальным отличием метода является возможность использовать большое количество проектных переменных (величин, определяющих форму профиля), так как машинное время решения задачи оптимизации практически не зависит от их количества.

При разработке метода за основу был взят непрерывный подход составления сопряжённых уравнений [1,2]. Прямая задача, описываемая осреднёнными

по Рейнольдсу уравнениями Навье-Стокса для двумерного стационарного течения, решается при помощи алгоритма SIMPLE [3,4] в вычислительном пакете Star-CD. Сопряжённые уравнения решаются при помощи адаптированного алгоритма SIMPLE.

Помимо разработки эффективного алгоритма оптимизации важно адекватно сформулировать функцию цели. Аэродинамический профиль не только создаёт подъёмную силу, но и размещает в себе конструкцию крыла, необходимую для восприятия аэродинамических нагрузок. Масса этой конструкции (речь идёт о погонной массе сечения крыла) зависит, главным образом, от формы профиля и величины изгибающего момента, действующего в данном сечении. Таким образом, если в оптимизации учитывать только аэродинамические характеристики, можно получить профиль с высоким аэродинамическим качеством, но с неприемлемо высокой погонной массой. В результате общий эффект (например, топливная эффективность самолёта) может оказаться отрицательным. Погонную массу сечения крыла на основе геометрии профиля можно достаточно точно оценить при помощи так называемого силового фактора I_m [5]. Поэтому задача оптимизации формулируется следующим образом: минимизировать

ются лобовое сопротивление профиля X_a , отклонение подъёмной силы от исходной величины

$$\frac{1}{2} \left(\frac{Y_a - Y_{a0}}{Y_{a0}} \right)^2 \text{ и отклонение силового фактора от исходного значения } \frac{1}{2} \left(\frac{I_m - I_{m0}}{I_{m0}} \right)^2,$$

где

Y_a – подъёмная сила текущего профиля;

Y_{a0} – подъёмная сила исходного профиля;

I_m – силовой фактор для текущего профиля;

I_{m0} – силовой фактор для исходного профиля.

Формулировка метода. Пусть задана функция цели $I(w, s)$ и функции ограничений $R(w, s) = 0$, где $w(s)$ – переменные поля течения, s – проектные переменные. Функцией цели, например, может быть лобовое сопротивление тела, подъёмная сила или заданное распределение давления. Необходимо найти такие проектные переменные, при которых удовлетворяются функции ограничений и функция цели достигает своего локального минимума. Функциями ограничений являются уравнения Навье-Стокса для двумерного стационарного несжимаемого течения. Для удобства обозначим декартовы координаты x_1, x_2 , а компоненты вектора скорости $\bar{V}$ – u_1, u_2 . Также будем подразумевать суммирование по повторяющимся индексам i ($i=1,2$). Тогда уравнения Навье-Стокса могут быть записаны как

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i^v}{\partial x_i} = 0 \text{ в области } D, \quad (1)$$

где

$$f_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ ru_1u_i + pd_{i1} \\ ru_2u_i + pd_{i2} \end{Bmatrix}; \quad f_i^v = \begin{Bmatrix} 0 \\ s_{ij}d_{j1} \\ s_{ij}d_{j2} \end{Bmatrix};$$

$$s_{ij} = m \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad d_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j \\ 1, \text{ если } i = j \end{cases};$$

p – давление; ρ – плотность; μ – вязкость.

За переменные поля течения $w(s)$ принимается вектор $w = (p, u_1, u_2)^T$. Для вывода сопряжённых уравнений векторное уравнение (1) необходимо представить в вычислительном пространстве с системой координат ξ_1, ξ_2 такой, что контур исследуемого профиля лежит на оси ξ_1 :

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i^v}{\partial x_i} = 0 \text{ в области } D_x, \quad (2)$$

где $F_i = S_{ij} f_j$; $F_i^v = S_{ij} f_j^v$;

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x_1} \end{pmatrix}.$$

Из выражения (2) получим вариацию функций ограничений $\delta R(w, s)$. Так как в вычислительном пространстве форма тела и соответственно область D_ξ остаются неизменными при вариациях формы в физическом пространстве, то для любой точки вычислительной области можно записать

$$dR = \frac{\partial(dF_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial(dF_i^v)}{\partial x_i} = 0. \quad (3)$$

Запишем вариации для потоков в следующем виде:

$$dF_i = dF_{Ii} + dF_{IIi}, \quad dF_i^v = dF_{Ii}^v + dF_{IIi}^v,$$

где вариации с индексом I – вклады, связанные с изменением переменных поля течения dw , а с индексом II – вклады, связанные с изменением формы тела δs .

Рассмотрим функцию цели I , которую можно представить как интеграл по границе профиля в вычислительном пространстве $B_{\xi w}$:

$$I = \int_{B_{\xi w}} M(w, s) dB_x. \quad (4)$$

Выражение для вариации функции цели можно записать:

$$dI = \int_{B_{\xi w}} dM(w, s) dB_x. \quad (5)$$

Уравнение (3) умножим на вектор множителей Лагранжа, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$ в каждой точке рассматриваемой области D_ξ , проинтегрируем по ней, применив теорему

Остроградского-Гауса, и вычтем из выражения (5). В результате получим

$$dI = \int_{B_{\kappa w}} dM(w, s) dB_{\kappa} - \int_{B_{\kappa}} n_i^x y^T (dF_i - dF_i^v) dB_{\kappa} + \\ + \int_{D_{\kappa}} \frac{\partial y}{\partial x_i}^T (dF_i - dF_i^v) dD_{\kappa} \quad ,$$

где n_i^{ζ} - компоненты вектора внешней нормали к границе области B_{ζ} в вычислительном пространстве.

Исходя из предположения, что на внешней границе рассматриваемой области вариации потоков вследствие изменения формы тела равны нулю, можно записать

$$dI = \int_{B_{\kappa w}} [dM - n_i^x y^T (dF_i - dF_i^v)] dB_{\kappa} + \\ + \int_{D_{\kappa}} \frac{\partial y}{\partial x_i}^T (dF_{Ii} - dF_{Ii}^v) dD_{\kappa} + \\ + \int_{D_{\kappa}} \frac{\partial y}{\partial x_i}^T (dF_{IIi} - dF_{IIi}^v) dD_{\kappa} . \quad (6)$$

Необходимо найти такие ψ , чтобы первые два интеграла выражения (6) обратились в нуль. Таким образом, сопряжённые уравнения и соответствующие граничные условия можно записать в форме:

$$\int_{D_{\kappa}} \frac{\partial y}{\partial x_i}^T (dF_{Ii} - dF_{Ii}^v) dD_{\kappa} = 0; \quad (7)$$

$$\int_{B_{\kappa w}} [dM - n_i^x y^T (dF_i - dF_i^v)] dB_{\kappa} = 0. \quad (8)$$

Граничные условия для сопряжённых уравнений определяются видом функции цели. Положим, что функцией цели является вектор результирующей силы $\bar{T} = (X, Y)$, действующий на профиль, спроецированный на некоторое направление $\bar{q} = (q_1, q_2)$. Тогда в вычислительном пространстве функцию цели представим как

$$I = -q_1 \int_{B_{\kappa w}} S_{2j} (d_{j1} p - s_{j1}) dx_1 - \\ - q_2 \int_{B_{\kappa w}} S_{2j} (d_{j2} p - s_{j2}) dx_1.$$

Согласно выражению (4)

$$M(w, s) = -q_1 S_{2j} (d_{j1} p - s_{j1}) - \\ - q_2 S_{2j} (d_{j2} p - s_{j2}).$$

Отметим, что вдоль контура тела $B_{\kappa w}$:

$n_1^x = 0$, $n_2^x = -1$ и $u_1 = u_2 = 0$ (граничное условие прилипания). Поэтому выражение (8) можно записать:

$$\int_{B_{\kappa w}} [dM + y^T d(F_2 - F_2^v)] dB_{\kappa} = \\ - \int_{B_{\kappa w}} q_1 d(S_{21} p - S_{2j} s_{j1}) dx_1 - \\ - \int_{B_{\kappa w}} q_2 d(S_{22} p - S_{2j} s_{j2}) dx_1 + \\ + \int_{B_{\kappa w}} y_2 d(S_{21} p - S_{2j} s_{j1}) dx_1 + \\ + \int_{B_{\kappa w}} y_3 d(S_{22} p - S_{2j} s_{j2}) dx_1. \quad (9)$$

Из равенства (9) следует, что если принять $\psi_2 = q_1$, а $\psi_3 = q_2$ на границе тела, то рассматриваемый интеграл обратится в нуль. Что касается ψ_1 , то его можно выбирать произвольно на границе $B_{\kappa w}$, так как независимо от его значения интеграл обращается в нуль. Граничные условия на внешней границе рассматриваемой области могут быть заданы различными способами, так как вариации потоков вследствие изменения формы тела на этой границе предполагаются равными нулю. Поэтому на внешней границе рассматриваемой области положим $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$.

Определив вектор множителей Лагранжа из уравнений (7), можно найти вариацию функции цели по формуле

$$dI = \int_{D_{\kappa}} \frac{\partial y}{\partial x_i}^T (dF_{IIi} - dF_{IIi}^v) dD_{\kappa}. \quad (10)$$

Вариации потоков представим как

$$dF_{IIi} = \frac{\partial F_i}{\partial s} ds, \quad dF_{IIi}^v = \frac{\partial F_i^v}{\partial s} ds,$$

где $\frac{\partial F_i}{\partial s}$ и $\frac{\partial F_i^v}{\partial s}$ определяются численно, варьированием соответствующего компонента вектора проектных переменных s при неизменном поле течения.

Тогда градиент функции цели есть

$$G = \int_{D_x} \frac{\partial y}{\partial x_i}^T \left(\frac{\partial F_i}{\partial s} - \frac{\partial F_i^v}{\partial s} \right) dD_x.$$

Как правило, градиент G не обладает той же гладкостью, что и исходный контур. Поэтому алгоритм оптимизации может оказаться неустойчивым. Во избежание этого в работе [2] предлагается заменить градиент G сглаженным градиентом $\bar{G}$, который получается в результате решения неявного сглаживающего уравнения:

$$\bar{G} - \frac{\partial}{\partial x_1} e \frac{\partial \bar{G}}{\partial x_1} = G,$$

где e - параметр, влияющий на степень сглаживания градиента.

Таким образом, используя метод наискорейшего спуска, для вариации вектора проектных переменных можно записать:

$$ds = -\alpha \bar{G},$$

где α - положительное малое число, которое определяется в ходе численных экспериментов.

Прямая задача решается для вязкого турбулентного несжимаемого течения при помощи алгоритма SIMPLE в вычислительном пакете Star-CD. Число Рейнольдса $Re \approx 3,3 \cdot 10^6$, модель турбулентности Spalart and Allmaras. Сопряжённые уравнения, в отличие от уравнений Навье-Стокса, являются линейными и поэтому решаются при помощи адаптированного алгоритма SIMPLE.

Постановка задачи. В качестве исходного используется профиль fx 61-163. Угол атаки $\alpha = 5,5^\circ$, что соответствует углу максимального аэродинамического качества данного профиля. Расчётная сетка, которая используется для составления дискретного аналога, как уравнений движения, так и сопряжённых уравнений, строится при помощи метода, основанного на решении уравнений Пуассона [6]. За проектные переменные принимаются координаты узлов расчётной сетки, лежащие на контуре профиля. Фиксированным является узел, принадлежащий задней кромке профиля. Координаты узлов варьируются вдоль линий расчётной сетки (рис. 1).

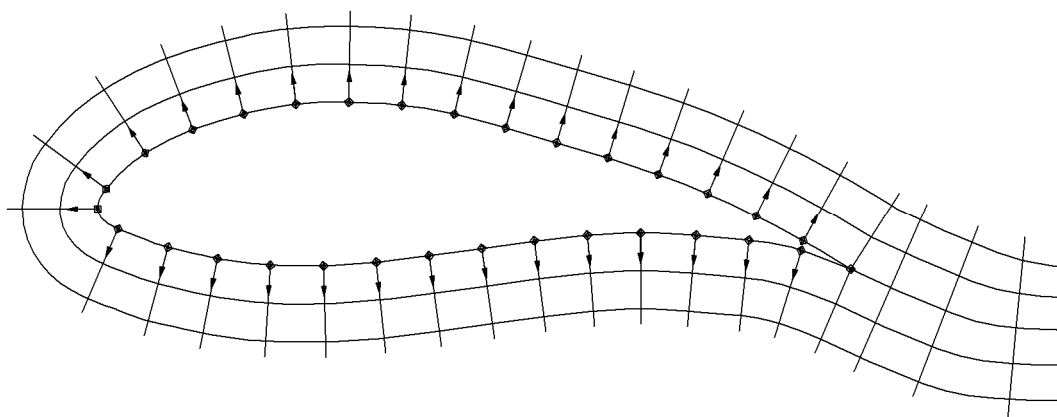


Рис. 1. Проектные переменные

Функция цели. Как уже было отмечено, для получения практически применимых результатов в оптимизации несущего профиля необходимо учитывать погонную массу сечения крыла, которую можно оценить при помощи так называемого силового фактора. Согласно [5] силовой фактор I_m можно представить как

$$I_m = \int_V |s_n| dV,$$

где

$|s_n|$ – модуль нормальных напряжений, возникающих от изгиба в некотором сечении крыла;

V – площадь профиля.

Нормальные напряжения в некотором сечении крыла с изгибающим моментом Q

могут быть определены по известной формуле:

$$s_n = \frac{Q}{I_x} y,$$

где

y – расстояние от нейтральной оси (главная центральная ось x) до рассматриваемого сечения;

I_x – момент инерции, определённый относительно главной центральной оси x .

Тогда силовой фактор можно представить в виде

$$I_m = \frac{Q}{I_x} \int_V |y| dV.$$

Так как силовой фактор пропорционален изгибающему моменту Q , который является заданной величиной, то его величина не будет влиять на результат оптимизации. Поэтому изгибающий момент Q принимается равным 1. Таким образом, согласно формулировке задачи, функцию цели можно записать следующим образом:

$$I = - \int_{B_{\text{св}}} S_{2j} (d_{j1} p - s_{j1}) dx_1 + \frac{c_Y}{2} \left(\frac{Y_a - Y_{a0}}{Y_{a0}} \right)^2 + \frac{c_m}{2} \left(\frac{I_m - I_{m0}}{I_{m0}} \right)^2,$$

где c_Y, c_m – весовые коэффициенты. Они влияют на величины отклонений подъёмной силы и силового фактора от ис-

ходных значений для профиля в ходе оптимизации и подбираются в ходе численного эксперимента. Тогда вариацию функции цели можно записать как

$$dI = - \int_{B_{\text{св}}} d(S_{21} p - S_{2j} s_{j1}) dx_1 - c_Y \left(\frac{Y - Y_0}{Y_0} \right) \int_{B_{\text{св}}} d(S_{22} p - S_{2j} s_{j2}) dx_1 + c_m \left(\frac{I_m - I_{m0}}{I_{m0}} \right) dI_m. \quad (11)$$

Принимаем $\psi_2=1$, $y_3 = c_Y \left(\frac{Y - Y_0}{Y_0} \right)$ на

границе тела и решаем сопряжённые уравнения (7). Получаем вектор множителей Лагранжа. После этого, согласно выражениям (10) и (11), вариацию функции цели можно записать в виде

$$dI = \int_{D_x} \frac{\partial y}{\partial x_i}^T (dF_{\Pi i} - dF_{\Pi i}^v) dD_x + c_m \left(\frac{I_m - I_{m0}}{I_{m0}} \right) dI_m.$$

Таким образом, градиент функции цели определяется численно, за счёт варьирования соответствующего компонента вектора проектных переменных s при неизменном поле течения.

Результаты. На рис. 2 представлен исходный профиль f_x 61-163 и оптимизированный на расчётной сетке 240×40 при числе итераций $N=200$.

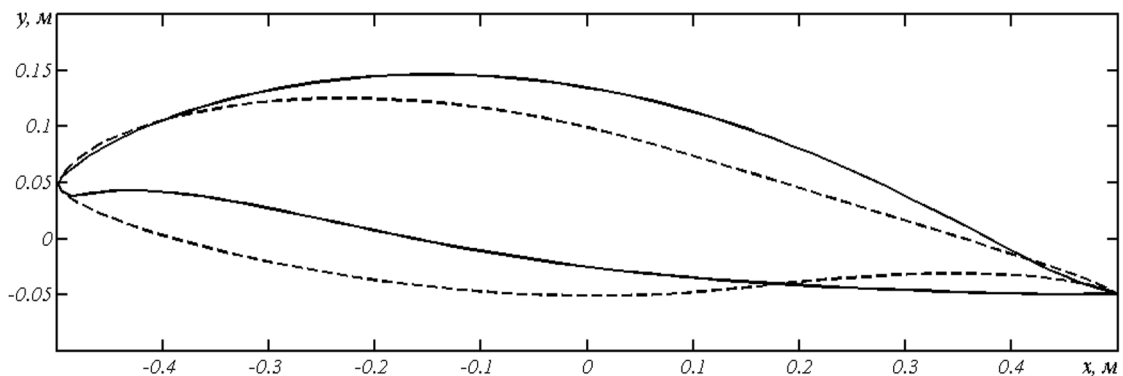


Рис. 2. Профиль, полученный в результате оптимизации (сплошная линия), и исходный профиль f_x 61-163 (пунктирная линия)

На рис. 3 представлено распределение коэффициента давления C_p для исходного профиля fx 61-163 и оптими-

зированного на расчётной сетке 240×40 при числе итераций $N=200$.

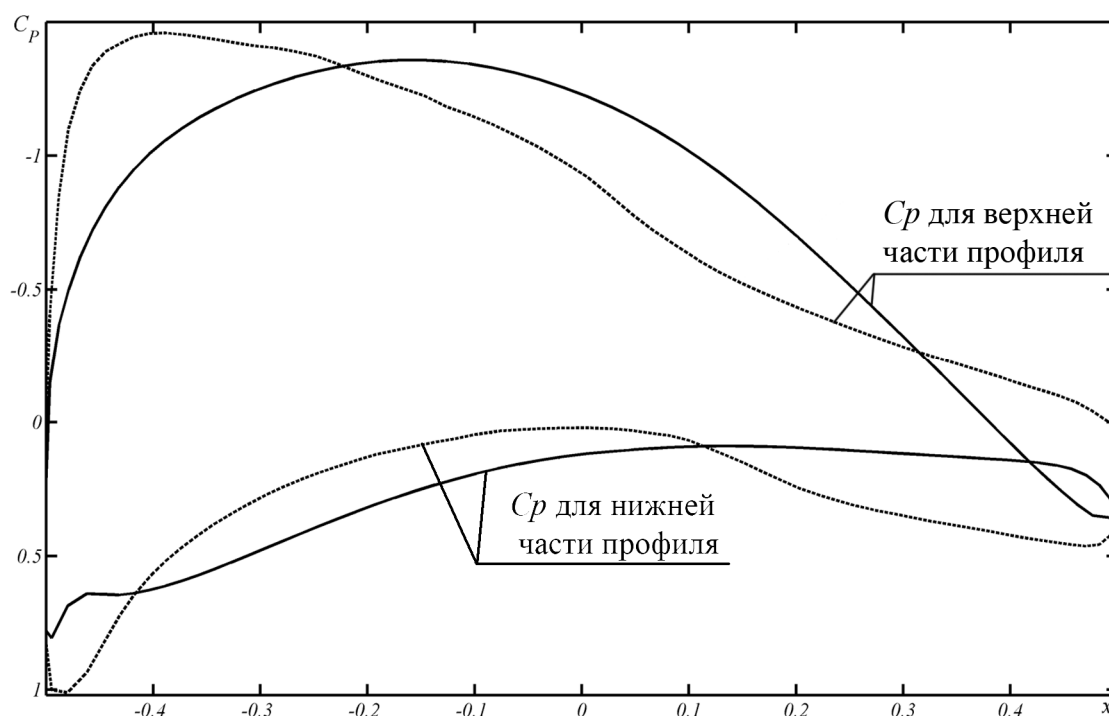


Рис. 3. Распределение коэффициента давления C_p для исходного профиля fx 61-163 (пунктирная линия) и оптимизированного (сплошная линия)

Величина коэффициента лобового сопротивления профиля, полученного в результате оптимизации, по отношению к сопротивлению исходного профиля снизилась на 25,5%, при этом подъёмная сила уменьшилась на 1,6%, силовой

фактор увеличился на 1,1% и аэродинамическое качество увеличилось на 32%.

Процесс сходимости алгоритма оптимизации для исходного профиля fx 61-163 представлен на рис. 4, где изображена зависимость коэффициента лобового сопротивления от числа итераций.

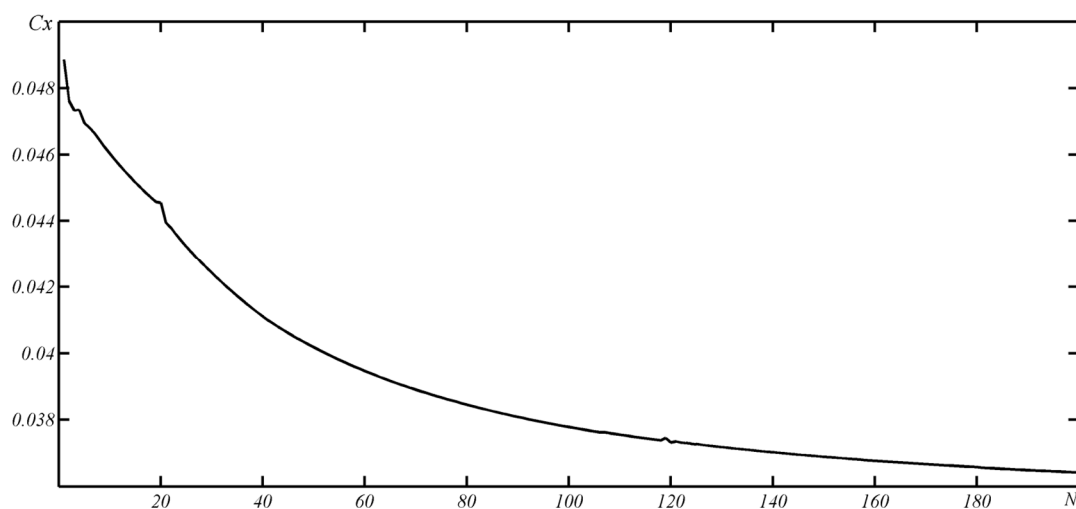


Рис. 4. Зависимость коэффициента лобового сопротивления от числа итераций

Руководствуясь графиком сходимости (рис. 4) и тем, что используемый метод оптимизации является градиентным, можно сделать вывод, что в ходе оптимизации был получен локальный минимум.

Выводы. Полученные результаты и разработанную методику оптимизации несущего аэродинамического профиля можно использовать при выборе формы профиля крыла самолёта, летающего при числе Маха $M < 0,3$.

Библиографический список

1. Jameson, A. Aerodynamic Shape Optimization Techniques Based On Control Theory [Text]/ A. Jameson, J. J. Alonso, J. J. Reuther, L. Martinelli, J. C. Vassberg // AIAA paper 98-2538, 29th AIAA Fluid Dynamics Conference, Albuquerque, NM, June 1998.

2. Jameson, A. Aerodynamic shape optimization using the adjoint method [Text]/ A. Jameson // 2002-2003 Lecture Series at the Von Karman Institute, Von Karman Institute For Fluid Dynamics, Brussels, Belgium, February 6, 2003. - 30 p.

3. Edward, S. A. Parallel Navier-Stokes solver for natural convection and free surface flow [Text]/ S. A. Edward - University of Sydney, 2006. - 218 p.

4. Ferziger, J. H. Computational Methods for Fluid Dynamics [Text]/ J. H. Ferziger and M. Peric - Springer, 2002. - 423 p.

5. Комаров, В. А. Весовой анализ авиационных конструкций: теоретические основы [Текст]/ В. А. Комаров // Полет. - 2000. - № 1. - С. 31-39.

6. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х томах: Т. 2: Пер. с англ. [Текст]/ К. Флетчер - М.: Мир, 1991. - Т. 2. - 552 с.

AIRFOIL SHAPE OPTIMIZATION USING THE ADJOINT GRADIENT METHOD

© 2011 Ye. V. Pechenik

Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov
(National Research University)

The problem of airfoil shape optimization is considered. The original objective function is formulated which takes into account the aerodynamic and mass characteristics of airfoil. The optimization problem is solved by the adjoint gradient method for the incompressible viscous flow. The primal problem is solved by the SIMPLE algorithm using the Star-CD software. Adjoint equations are solved by the SIMPLE adapted algorithm.

Objective function, constraint function, design variables, adjoint equations, airfoil.

Информация об авторах

Печеник Евгений Валерьевич, аспирант кафедры аэрогидродинамики. Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Область научных интересов: численные методы оптимизации в задачах аэрогидродинамики. E-mail: pechenik@list.ru.

Pechenik Yevgeny Valeryevitch, post-graduate student of the aerohydrodynamics department, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University), pechenik@list.ru. Area of research: numerical methods for optimization in aerohydrodynamics.