УДК 519.6:311

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСШИРЕННОГО ВОСПРОИЗВОДСТВА НА ОСНОВЕ АВТОРЕГРЕССИИ

© 2003 В. К. Семёнычев

Самарский государственный аэрокосмический университет

Предложен эконометрический подход на основе авторегрессии отсчетов, в соответствии с которым определяются (уточняются) параметры экономической системы и/или справедливость тех или иных допущений для расширенного воспроизводства. Методы идентификации позволяют осуществлять классификацию четырех моделей и получать несмещенные, эффективные и состоятельные оценки параметров моделей на малых объемах выборок.

На начальной стадии прогнозирования и планирования возможных темпов экономического развития экономических систем, оптимального соотношения потребления и накопления, взаимодействия основных факторов в процессах воспроизводства, влияния научно-технического прогресса на динамику, эффективность и интенсификацию производства используются преимущественно макроэкономические модели [1, 2].

В процессе углубления знаний о системе переходят от эпизодического использования отдельных относительно простых моделей к созданию интегрированных моделей и комплексов макроэкономических моделей, совмещают нормативный и дескриптивный (описательный) подходы, осуществляя эконометрическое моделирование по временному ряду отсчетов дохода для оперативной идентификации и коррекции динамических макроэкономических моделей [1, 2].

Простые модели при заданных значениях параметров и постулировании тех или иных допущений могут быть использованы для аналитического предельного (при тех или иных условиях) моделирования экономических процессов [1].

Нов и менее распространен (в силу трудностей идентификации параметров и особенно классов моделей) эконометрический подход, в соответствии с которым определяются (уточняются) параметры экономической системы и/или справедливость тех или иных допущений для реальной системы.

Реализацию данного подхода **проведем в два этапа**, усложняя модель и обеспечивая на каждом этапе возможность эффективной (и по точности, и по быстродействию) идентификации соответствующих моделей.

Первый этап

Воспроизводство при отсутствии лага между производственным накоплением и приростом дохода, пропорциональности производственного накопления приросту дохода на тот же момент времени, а также при независимости (экзогенности) динамики потребления описывается одной из следующих моделей [1, 2, 4]:

экспонентой $Y_к = A_1\, exp(-\alpha_1 T_к)$, (1)

обобщенной экспонентой
$$Y_к = A_1 exp(-\alpha_1 T_к) + A_2, \qquad (2)$$

суммой двух экспонент
$$Y_к = A_1 exp(-\alpha_1 T_к) + A_2 exp\,(-\alpha_2 T_к), \qquad (3)$$

где α_1, α_2, A_1, $A_2 \in R$; $Y_к$ – временной ряд отсчётов с периодом опроса Δ (месячным, годовым) анализируемого экономического параметра (дохода); $T_к = \Delta_к$.

Экономическое содержание параметров моделей (1)-(3) через такие категории, как норма производственного накопления, прирост дохода, темп прироста потребления и динамика нормы накопления, капиталоемкость валового продукта, доход, потребление в начальный момент времени анализа и т. д., раскрыто в [1].

Выбор модели и оценка ее параметров определяется адекватностью опытных данных гипотезам о нулевом, постоянном или экспоненциальном потреблении, соответственно [1, 3].

Климатические и природные явления, структура материальных и духовных потребностей граждан могут быть определены только с некоторой вероятностью. Сложность и динамичность социально-экономических процессов приводят к тому, что затраты на производство, экономический эффект, производительность труда, результаты научных исследований и разработок, эффективность новой техники и т. д. поддаются предварительному расчету только с тем или иным уровнем достоверности.

Будем учитывать «эволюционный» стохастический компонент ξ_κ, который отражается в быстрых, случайных по характеру и незначительных по величине изменениях значений отсчетов.

Начнем с достаточно общего случая - модели (3). Применив к ней Z – преобразование (преобразование Лорана) [4, 5], выполнив действия в области изображений и вернувшись в область действительного переменного, получим соотношение

$$Y_\kappa = \lambda_1 Y_{\kappa-1} - \lambda_2 Y_{\kappa-2} + \Phi_1\delta_\kappa - \Phi_2\delta_{\kappa-1} + \xi_\kappa, \qquad (4)$$

где $\lambda_1 = \exp(-\alpha_1\Delta) + \exp(-\alpha_2\Delta)$,
$\lambda_2=\exp(-(\alpha_1 + +\alpha_2)\Delta)$, $\Phi_1 = A_1 + A_2$,
$\Phi_2 = A_1\exp(-\alpha_2\Delta) + A_2\exp(-\alpha_1\Delta)$,

$\delta_\kappa = \begin{cases} 1, \kappa = 0 \\ 0, \kappa \neq 0 \end{cases}$ - дискретный аналог дельта-функции,

κ=1, 2, 3, …, N; ξ_κ – аддитивный стохастический компонент отсчетов, для которого обычно [6, 7] принимают предположение о нормальном законе распределения, нулевом математическом ожидании, постоянстве дисперсии (гомоскедастичности), некоррелированности в отсчетах («белом спектре» компонента ξ_κ):

$$M[\xi_\kappa] = 0,\ D[\xi_\kappa] = \sigma^2,\ M[\xi_\kappa\,\xi_{\kappa+1}] = 0, \qquad (5)$$

где M – оператор математического ожидания, D – оператор дисперсии.

Кроме ξ_κ в отсчетах могут присутствовать и аномальные помехи, появление которых может быть вызвано ошибками при сборе, записи и передаче информации: сдвиг запятой при перенесении информации из документа, занесение данных в другую графу и т. д. Известны процедуры устранения аномальных наблюдений: методом исследования стандартных отклонений, методикой Ирвина или методикой, изложенной в [4].

Условиями отнесения анализируемого временного ряда к модели (3) (условиями структурной идентификации) будет следующая система неравенств:

$$0 < \lambda_1 < 2,\ 0 < \lambda_2 < 0{,}25\lambda^2_1. \qquad (6)$$

Наиболее простой вид авторегрессии второго порядка, не зависящей от начальных условий, уравнение (2) будет иметь при $\kappa \geq 2$:

$$Y_\kappa = \lambda_1 Y_{\kappa-1} - \lambda_2 Y_{\kappa-2} + \xi_\kappa. \qquad (7)$$

Осуществим идентификацию параметров модели (7) в два шага: на первом найдем динамические параметры α_1 и α_2, а на втором – параметры A_1, A_2, определяемые начальными (при κ = 0) условиями.

Минимальное количество отсчетов выборки для составления системы двух линейных уравнений (второе уравнение получим из (7) заменой индекса «κ» на «κ-1») и определения из нее двух неизвестных параметров равно четырем: Y_κ, $Y_{\kappa-1}$, $Y_{\kappa-2}$, $Y_{\kappa-3}$. Для второго уравнения можно использовать и любой другой индекс, не равный «κ» и больший третьего.

При возможности анализа выборки большого объема (при этом $N \geq 5$) можно рассчитать помехозащищенные оценки коэффициентов λ_1 и λ_2 методом наименьших квадратов (при выполнении условия (5) среднеквадратические оценки будут несмещенными, эффективными и состоятельными [6]):

$$\lambda_1^\circ, \lambda_2^\circ = \arg\min_{\lambda_1,\lambda_2} M\{Y_\kappa - \lambda_1 Y_{\kappa-1} + \lambda_2 Y_{\kappa-2}\}^2, \qquad (8)$$

где ° - символ среднеквадратических оценок коэффициентов авторегрессии.

Реализация условия (8) приводит к системе линейных нормальных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} M\{Y_\kappa Y_{\kappa-1}\} = \lambda_1^\circ M\{Y_{\kappa-1}^2\} - \lambda_2^\circ M\{Y_{\kappa-2} Y_{\kappa-1}\}, \\ M\{Y_\kappa Y_{\kappa-2}\} = \lambda_1^\circ M\{Y_{\kappa-2}^2 Y_{\kappa-1}\} - \lambda_2^\circ M\{Y_{\kappa-2}\}^2, \end{cases}$$

из которой определяются оценки коэффициентов авторегрессии:

$$\lambda_2^\circ = \frac{M\{Y_\kappa Y_{\kappa-2}\}M\{Y_{\kappa-1}^2\} - M\{Y_\kappa Y_{\kappa-1}\}M\{Y_{\kappa-1}Y_{\kappa-2}\}}{M\{Y_{\kappa-1}^2 Y_{\kappa-2}\} - M\{Y_{\kappa-1}^2\}M\{Y_{\kappa-1}Y_{\kappa-2}\}},$$

$$\lambda_1^\circ = \frac{M\{Y_\kappa Y_{\kappa-1}\} + \lambda_2^\circ M\{Y_{\kappa-1}Y_{\kappa-2}\}}{M\{Y_{\kappa-1}^2\}}.$$

Далее с учетом принятых выше обозначений определим и среднеквадратические оценки динамических параметров модели (3)

$$\alpha_{1,2}^\circ = -\frac{1}{\Delta} Ln\left(\frac{\lambda_1^\circ}{2} + \left(\frac{\lambda_1^{\circ 2}}{4} \pm \lambda_2^\circ\right)^{1/2}\right).$$

Найдем параметры, определяемые начальными условиями экономического процесса:

$$\{A_1^\circ, A_2^\circ\} = \underset{A_1, A_2}{\arg\min} \sum_{\kappa=0}^{N} \{Y_\kappa - A_1 \exp(-\alpha_1^\circ \Delta_\kappa) - A_2 \exp(-\alpha_2^\circ \Delta_\kappa)\}^2. \quad (9)$$

Очевидно, что условие (9) приводит к системе линейных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} A_1 \sum_{\kappa=0}^{N} \exp^2(-\alpha_1^\circ \Delta_\kappa) - A_2 \sum_{\kappa=0}^{N} \exp\{-(\alpha_1^\circ + \alpha_2^\circ)\Delta_\kappa\} = \sum_{\kappa=0}^{N} Y_\kappa \exp(-\alpha_1^\circ \Delta_\kappa), \\ A_1 \sum_{\kappa=0}^{N} \exp\{-(\alpha_1^\circ + \alpha_2^\circ)\Delta_\kappa\} - A_2 \sum_{\kappa=0}^{N} \exp^2(-\alpha_1^\circ \Delta_\kappa) = \sum_{\kappa=0}^{N} Y_\kappa \exp(-\alpha_2^\circ \Delta_\kappa). \end{cases}$$

Подстановка вычисленных помехозащищенных оценок α°_1, α°_2, A°_1, A°_2 в (3) позволит рассчитать помехозащищенные (сглаженные) значения Y°_κ при значениях индекса «*к*» от 0 до N и осуществить тем самым прогноз экономического показателя при других (будущих по отношению к используемой выборке) значениях индекса «*к*».

Как правило, трендовый прогноз осуществляют на интервал значений вперед не более 1/3 от объема используемой для идентификации выборки N, называемой в этом случае «горизонтом прогнозирования». Модели (1) и (2) будут получены как частные случаи при условиях $A^\circ_2 = 0$ и $\alpha^\circ_2 = 0$, соответственно, которые проверяются как статистические гипотезы [5]. Проверка данных гипотез может рассматриваться и как обоснование для реальных данных предположений о нулевом, постоянном (почти постоянном) или экспоненциальном (с непрерывным темпом прироста) потреблении.

Второй этап

Для моделирования реально имеющегося на практике лага между производственным накоплением и приростом дохода [1] (показателями выпуска продукции и приростом производственных фондов [2]) в модель расширенного воспроизводства вводят два запаздывания первого порядка [2].

Первое из них соответствует формированию вложений как фиксированной части конечного продукта, второе – запаздыванию в их освоении, завершающемуся выпуском продукции.

В такой постановке процесс расширенного воспроизводства во многих случаях описывается экспоненциальной функцией с положительным показателем, на которую накладывается гармонический цикл с большим периодом $T_1 = 2\pi/\omega$ и затухающей амплитудой [2]:

$$Y_k = C_1 \exp(\alpha_1 T_\kappa) + C_2 \exp(-\alpha_2 T_\kappa) \cos(\omega T_\kappa + \phi), \quad (10)$$

которому, как можно показать, соответствует при $\kappa \geq 0$ модель авторегрессии третьего порядка

$$Y_\kappa = \mu_1 Y_{\kappa-1} - \mu_2 Y_{\kappa-2} + \mu_3 Y_{\kappa-3} + \xi_\kappa, \quad (11)$$

где $\lambda_1 = 2\nu_3\nu_2 + \nu_1{}^2$; $\lambda_2 = \nu_2 + 2\nu_3\nu_2\nu_1{}^2$;
$\lambda_3 = \nu_2\nu_1$; $\nu_1 = \exp(\alpha_1\Delta)$;
$\nu_2 = \exp(-\alpha_2\Delta)$; $\nu_3 = \cos \omega\Delta$;
$C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2, \omega \in R$.

Адекватность реальных отсчетов третьему порядку авторегрессии (процедуры определения порядка авторегрессии известны [5-7]) указывает на необходимость учета временного лага при моделировании расширенного воспроизводства.

Определив для (7) среднеквадратическое приближение μ°_1, μ°_2, μ°_3, придем к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \mu_1^0 M\{Y_{\kappa-1}^2\} + \mu_2^\circ M\{Y_{\kappa-1}Y_{\kappa-2}\} + \mu_3^\circ M\{Y_{\kappa-3}Y_{\kappa-1}\} = M\{Y_\kappa Y_{\kappa-1}\}, \\ \mu_1^0 M\{Y_{\kappa-1}Y_{\kappa-2}\} + \mu_2^\circ M\{Y_{\kappa-2}^2\} + \mu_3^\circ M\{Y_{\kappa-3}Y_{\kappa-2}\} = M\{Y_\kappa Y_{\kappa-2}\}, \\ \mu_1^0 M\{Y_{\kappa-1}Y_{\kappa-3}\} + \mu_2^\circ M\{Y_{\kappa-2}Y_{\kappa-3}\} + \mu_3^\circ M\{Y_{\kappa-3}^2\} = M\{Y_\kappa Y_{\kappa-3}\}, \end{cases}$$

из которой после известного решения относительно μ°_1, μ°_2, μ°_3 достаточно очевидными итерациями определим и переменные ν_1, ν_2, ν_3. Из кубического уравнения

$\nu_1^{\,3} - \mu^\circ_1\nu_1^{\,2} + \mu^\circ_2\nu_1 - \mu^\circ_3 = 0$

найдем ν°_1, $\nu^\circ_2 = \lambda^\circ_3/\nu^\circ_1$

и $\nu^\circ_3 = (\lambda^\circ_2 - \nu^\circ_2)/(2\nu^\circ_1\nu^\circ_2)$.

Очевидно, что искомые динамические параметры модели (10) расширенного воспроизводства с учетом принятых обозначений могут быть рассчитаны следующим образом:

$$\alpha_1^\circ = \frac{1}{\Delta}\mathrm{Ln}\nu_1^\circ,\ \alpha_2^\circ = \frac{1}{\Delta}\mathrm{Ln}\nu_2^\circ,$$

$$\omega^\circ = \frac{1}{\Delta}\mathrm{Arc}\,cos\,\nu_3^\circ.$$

Приведенные формулы позволяют определить реальный (по экспериментальным данным) лаг конкретной экономической системы и принять меры, если это возможно и/или необходимо, по их коррекции.

Запишем условие нахождения параметров C_1, C_2 и ϕ:

$$C_1^\circ, C_3^\circ, C_4^\circ = \arg\min_{C_1,C_2,C_3} \sum_{\kappa=0}^{N}\Big\{Y_\kappa - C_1\exp\left(\alpha_1^\circ\Delta_\kappa\right) - C_3\exp\left(-\alpha_2^\circ\Delta_\kappa\right)\cos\omega^\circ\Delta_\kappa + $$
$$+ C_4\exp\left(-\alpha_2^\circ\Delta_\kappa\right)\sin\Delta_\kappa\Big\}^2,$$

где $C_3 = C_2\cos\phi$, $C_4 = C_2\sin\phi$.

Соответствующая система линейных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} C_1^\circ\sum\limits_{\kappa=0}^{N}\exp^2\left(\alpha_1^\circ\Delta_\kappa\right) + C_3^\circ\sum\limits_{\kappa=0}^{N}\exp\left\{\left(\alpha_1^\circ - \alpha_2^\circ\right)\Delta_\kappa\right\}\cos\omega^\circ\Delta_\kappa - \\ \quad - C_4^0\sum\limits_{\kappa=0}^{N}\exp\left\{\left(\alpha_1^\circ - \alpha_2^\circ\right)\Delta_\kappa\right\}\sin\omega^\circ\Delta_\kappa = \sum\limits_{\kappa=0}^{N}Y_\kappa\exp\left(\alpha_1^\circ\Delta_\kappa\right), \\ C_1^\circ\sum\limits_{\kappa=0}^{N}\exp\left\{\left(\alpha_1^\circ - \alpha_2^\circ\right)\Delta_\kappa\right\}\cos\omega^\circ\Delta_\kappa + C_3^\circ\sum\limits_{\kappa=0}^{N}\exp^2\left(-\alpha_2^\circ\Delta_\kappa\right)\cos^2\omega^\circ\Delta_\kappa - \\ \quad - C_4^0/2\sum\limits_{\kappa=0}^{N}\exp^2\left(-\alpha_2^\circ\Delta_\kappa\right)\sin 2\omega^\circ\Delta_\kappa = \sum\limits_{\kappa=0}^{N}Y_\kappa\exp\left(-\alpha_2^\circ\Delta_\kappa\right)\cos\omega^\circ\Delta_\kappa, \\ C_1^\circ\sum\limits_{\kappa=0}^{N}\exp\left\{\left(\alpha_1^\circ - \alpha_2^\circ\right)\Delta_\kappa\right\}\sin\omega^\circ\Delta_\kappa + C_3^\circ/2\sum\limits_{\kappa=0}^{N}\exp^2\left(-\alpha_2^\circ\Delta_\kappa\right)\sin 2\omega^\circ\Delta_\kappa - \\ \quad - C_4^0/2\sum\limits_{\kappa=0}^{N}\exp^2\left(-\alpha_2^\circ\Delta_\kappa\right)\sin^2\omega^\circ\Delta_\kappa = \sum\limits_{\kappa=0}^{N}Y_\kappa\exp\left(-\alpha_2^\circ\Delta_\kappa\right)\sin\omega^\circ\Delta_\kappa. \end{cases}$$

Ее решение позволит определить

$$C_2^\circ = \left\{\left(C_3^\circ\right)^2 + \left(C_4^\circ\right)^2\right\}^{1/2},\ \varphi = \mathrm{arctg}\left(C_4^\circ / C_3^\circ\right).$$

Известные методы идентификации позволяют получить простое решение лишь для модели (1) с мультипликативным стохастическим компонентом путем логарифмирования значений временного ряда, что приводит к смещенности и неэффективности оценок параметров из-за нелинейного характера преобразования и нарушения условий (5).

Модели (7) и (11) авторегрессии являются линейными формами отсчетов, и в силу этого получаемые оценки параметров моделей авторегрессии и расширенного воспроизводства по методу наименьших квадратов эффективные, несмещенные и состоятельные.

Предложенные эконометрические методы идентификации применимы к четырем приближенным к практике (за счет аддитивного характера помехи, учета временного лага, различной динамики потребления) моделям, что позволяет соотнести с реальными данными ту или иную модель расширенного воспроизводства. Они реализуются на малых объемах выборки, что выгодно отличает их от известных методов.

Таким образом, модели (1)-(3) (10) и предложенные методы их идентификации применимы с высокой точностью в реальном масштабе времени для широкого ряда конкретных экономических процессов [1-3]; имеют прикладное значение для выработки концепций экономического и социального развития, изучения альтернатив экономической политики, прогнозирования и планирования системы обобщающих показателей.

Список литературы

1.Гранберг А. Г. Динамические модели народного хозяйства. М.: Экономика, 1985.

2.Кобринский Н. Е., Кузьмин В. И. Точность экономико–математических моделей. М.: Финансы и статистика, 1981.

3.Экономико-математические методы и прикладные модели. / В. А.Половников и др. М.: Финстатинформ, 1997.

4.Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971.

5.Морозов В. К., Семёнычев В. К., Якубович С. К. Основы информационных процессов и управления. Самара: Самвен, 1996.

6.Айвазян С. А. Прикладная статистика. Основы эконометрики. М.: 2001. ЮНИТИ – ДАНА, 2001.

7.Кашьяп Р. А., Рао А. Р. Построение динамических стохастических моделей по эмпирическим данным. М.: Наука, 1983.

ECONOMETRIC SIMULATION OF EXPANDED REPRODUCTION ON THE BASIS OF AUTOREGRESSION

© 2003 V. K. Semyonitchev

Samara State Aerospace University

An econometric approach based on readings auto regression is proposed. In accordance with the approach the parameters of an economic system are specified and/or the validity of particular assumptions for expanded reproduction is estimated. Methods of identification make it possible to classify four models and to obtain unbiased, efficient and valid estimates of model parameters using limited sampling.