

УДК 620.179.101

ЦИКЛИЧЕСКОЕ СЖАТИЕ МНОГОСЛОЙНОГО МНОГОПРОЛЁТНОГО ГОФРИРОВАННОГО ПАКЕТА

© 2013 И. Д. Эскин, Р. И. Алкеев, В. И. Иващенко

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Методом Бубнова – Галеркина выполнено решение задачи о циклическом сжатии многослойного многопролётного гофрированного пакета с учётом поворота сечений пакета, лежащих в вершинах гофров. Получены соотношения, описывающие любые процессы загрузки в поле упругогистерезисных петель пакета.

Многослойный многопролётный гофрированный пакет, циклическое сжатие, метод Бубнова – Галеркина.

Имея решение для многослойного одиночного гофра [2], можно построить решение для многослойного многопролётного гофрированного пакета.

Условные обозначения

$i = 1, 3, 5, 7, \dots$ – порядковые номера процессов нагружения,
 $i = 2, 4, 6, 8, \dots$ – порядковые номера процессов разгрузки,
 $j = 1, 2, 3, \dots, m$ – номер проскользнувшего гофра и номер этапа загрузки пакета,
 m – число гофров в пакете,
 n – число лент в пакете,
 (*) – индекс, указывающий, что значения параметров взяты в конце этапа загрузки пакета (для одиночного гофра в конце процесса загрузки),
 h – толщина ленты пакета,
 b – ширина пакета,
 f – начальный выгиб гофра ленты,
 y_0 – текущий начальный выгиб гофра ленты,
 t – шаг гофра ленты,
 $I = bh^3/12$ – момент инерции поперечного сечения ленты,
 E – модуль упругости материала лент пакета,
 μ – коэффициент трения скольжения на контактных поверхностях пакета,
 $k = 1, 2, 3, \dots, m$ – порядковый номер гофра,
 P_i – текущее значение циклической силы,

действующей на одиночный гофр на i -й загрузке,

P_i^* – значение циклической силы, действующей на одиночный гофр в конце i -й загрузки,

x – координата текущего сечения гофра,

y_{kji} – текущее приращение деформации k -го гофра на j этапах i -й загрузки в сечении x ,

\tilde{y}_{ij} – текущее приращение деформации на j этапах i -й загрузки в серединах пролетов пакета при $x = t/2$,

$\tilde{\tilde{y}}_{ij}$ – текущее значение деформации на j этапах i -й загрузки в серединах пролетов пакета при $x = t/2$,

$\Delta \tilde{y}_{ij}$ – текущее значение деформации на j -м этапе i -й загрузки в серединах пролетов пакета при $x = t/2$,

y_{0kij} – текущее значение остаточного выгиба k -го гофра на j -м этапе i -й загрузки в сечении x ,

\tilde{y}_{0ij} – остаточный выгиб на j -м этапе i -й загрузки в серединах пролетов пакета при $x = t/2$,

P_{kji} – сжимающая сила, действующая на k -й гофр на j -м этапе i -й загрузки,

F_{ji} – сжимающая сила, действующая на пакет на j -м этапе i -й загрузки,

$\delta(x - t/2)$ – импульсивная функция Дирака, которая определяется следующим образом:

$\delta = 0$ при $t/2 < x < t/2$, $\delta = \infty$ при $x = t/2$,

$$\int_0^t dx = 1,$$

$S = b \cdot h$ – площадь поперечного сечения гофра,

N_{li} – продольная сила, растягивающая или сжимающая одиночный гофр на первом этапе i -й разгрузки или i -й повторной нагрузки,

N_{kji} – продольная сила, растягивающая или сжимающая k -й гофр на j -м этапе i -й повторной нагрузки в случае, когда $j < k$.

Первичное нагружение. При первичном сжатии пакета гофры распрямляются и точки контакта смещаются симметрично от середины. При этом на каждую j -ю половину гофра, считая от концов пакета, действуют поперечные силы $P_{j1}/2$ и продольные силы:

$$m \left(\sum_{i=1}^{i=j-1} P_{i1} + \frac{P_{j1}}{2} \right) \quad (1)$$

Распределение углов поворота сечений лент, лежащих в вершинах гофров, описывается некоторой плавной функцией, симметрично убывающей от концов пакета к его середине. Причём можно предположить, что углы поворота концов лент определяются соотношением (6) из [2]. Справедливо также считать, что при достаточно большом числе гофров, начиная с m_1 -й вершины, сечения лент, лежащие в вершинах гофров, не поворачиваются. Здесь также номера вершинам присваиваются симметрично средней вершине пакета, начиная с концевых, которым присвоен номер «0» (рис. 1).

С учётом высказанных соображений функцию распределения углов поворота сечений, лежащих в вершинах гофров, в случае, когда $m_1 \geq m$, запишем в виде:

$$\tilde{y}'_{1k} = \tilde{y}'_{10} \cos \frac{pk}{2k} = \tilde{y}'_1 \frac{p}{t} \cos \frac{pk}{2m}, \quad (2)$$

где $k=0,1,2,\dots,m$ – текущий номер вершины гофра, и в случае, когда $m_1 < m$, – в виде:

$$\tilde{y}'_{1k} = \tilde{y}'_{10} \cos \frac{pk}{2m_1} = \tilde{y}'_1 \frac{p}{t} \cos \frac{pk}{2m_1}. \quad (3)$$

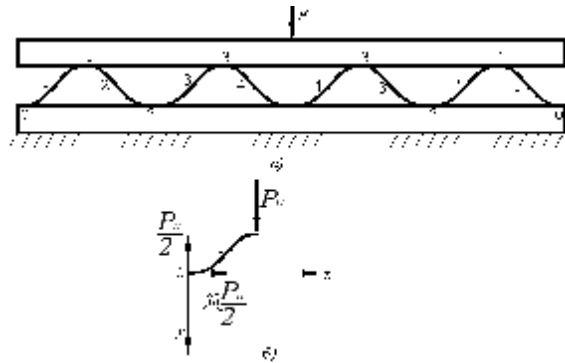


Рис. 1. Схема нагружения многопролетного гофра:
а) нумерация гофров и их вершин,
б) первый полугофр ($j=1$)

Примем, что углы поворота сечений вершин с номерами, большими m_1 , равны нулю. Силу, действующую в процессе первичного нагружения на гофр, составленный из двух первых симметрично расположенных половинок (рис. 1), найдём по (28) из [2] при $i=1$ и $k_3=1,5$. Определим силу, действующую на любой j -й гофр, составленный из j -х половинок, номера которых содержатся в интервале $2 \leq j \leq m_1$. Дифференциальное уравнение, описывающее изгиб j -го гофра, запишется в виде:

$$EJ \frac{d^4 y_1}{dx^4} + m \left(P_{11} + \dots + \frac{P_{j1}}{2} \right) \frac{d^2 y_{01}}{dx^2} = P_{j1} d \left(x - \frac{t}{2} \right) \quad (4)$$

где

$$y_{01} = -\frac{f}{2} \left(1 - \cos \frac{2px}{t} \right) + y_1. \quad (5)$$

Решение уравнения ищем в виде:

$$y_1 = \frac{d_j}{2} \left(1 - \cos \frac{2px}{t} \right) + A_j \sin \frac{px}{t}, \quad (6)$$

где d_j и A_j – постоянные, определяемые из граничных условий:

$$y_1'(0) = -y_1'(t) = \tilde{y}_1 \frac{p}{t} \cos \frac{p(j-1)}{2m_1},$$

$$y_1\left(\frac{t}{2}\right) = \tilde{y}_1. \quad (7)$$

Функция (6) удовлетворяет также граничным условиям:

$$y_1(0) = y_1(t) = 0,$$

$$y_1'\left(\frac{t}{2}\right) = 0. \quad (8)$$

Найдя d_j и A_j из (7), окончательно получим

$$y_1 = \frac{\tilde{y}_1}{2} \left(1 - \cos \frac{p(j-1)}{2m_1}\right) \left(1 - \cos \frac{2px}{t}\right) + \tilde{y}_1 \cos \frac{p(j-1)}{2m_1} \sin \frac{px}{t}. \quad (9)$$

Решая уравнение методом Галеркина, получим

$$P_{j1} = \frac{2C_0 \tilde{y}_1 \left(1 - \cos \frac{p(j-1)}{2m_1}\right) + \frac{4}{3} \left[\frac{C_0}{p} - 2m \frac{p}{t} \sum_{k=1}^{j-1} P_{k1} \right] \tilde{y}_1 \cos \frac{p(j-1)}{2m_1}}{2 + \frac{1}{2} m \frac{p^2}{t} \left[\tilde{y}_1 \left(\cos \frac{p(j-1)}{2m_1} \right) - f \right] + \frac{4}{3} m \tilde{y}_1 \frac{p}{t} \cos \frac{p(j-1)}{2m_1}} - \frac{m \sum_{k=1}^{j-1} P_{k1} \frac{p^2}{t} \left[\tilde{y}_1 \left(\cos \frac{p(j-1)}{2m_1} \right) - f \right]}{2 + \frac{1}{2} m \frac{p^2}{t} \left[\tilde{y}_1 \left(\cos \frac{p(j-1)}{2m_1} \right) - f \right] + \frac{4}{3} m \tilde{y}_1 \frac{p}{t} \cos \frac{p(j-1)}{2m_1}}, \quad (10)$$

где C_0 определяется по (33) из [2].

Определим силу, действующую на любой j -й гофр, составленный из двух симметрично расположенных j -х половинок, номер которых содержится в интервале $m_1 + 1 \leq j \leq m$.

Дифференциальное уравнение, описывающее изгиб гофра в этом случае, запишется в виде:

$$EJ \frac{d^4 y_1}{dx^4} + m \left(P_{11} + \dots + P_{m_1} + \dots + P_{j-1,1} + \frac{P_{j1}}{2} \right) \frac{d^2 y_{01}}{dx^2} = P_{j1} d \left(x - \frac{t}{2} \right) \quad (11)$$

$$j = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m,$$

где y_{01} определяется из (5).

Решение (11) ищем в виде, аналогичном (8) из [2]:

$$y_1 = -\frac{\tilde{y}_1}{2} \left(1 - \cos \frac{2px}{t} \right) \quad (12)$$

В результате получим значение силы, действующей на j -й гофр, в виде:

$$P_{j1} = \frac{2C_0 \tilde{y}_1 - m \sum_{k=1}^{j-1} P_{k1} \frac{p^2}{t} (\tilde{y}_1 - f)}{2 + m \frac{p^2}{t} (\tilde{y}_1 - f)}. \quad (13)$$

$$j = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m.$$

Соотношения (28) из [2], (10), (13) позволяют последовательно найти силу, действующую на первый, второй, третий и так до последнего m -го гофра. Силу, действующую на пакет, найдем как равнодействующую этих сил

$$F_1 = P_{11} + \sum_{j=2}^{m_1} P_{j1} + \sum_{j=m_1+1}^m P_{j1}$$

в виде:

$$F_1 = \frac{1,5 C_0 \tilde{y}_1}{4 - \frac{m p^2}{t} \left(\frac{8f}{3p} - \tilde{y}_1 \right)} + \sum_{j=2}^{m_1} \frac{2C_0 A_j + m \frac{p^2}{t} (f - \tilde{y}_1 B_j) \sum_{k=1}^{j-1} P_{k1}}{2 + \frac{m p^2}{2t} \left[\tilde{y}_1 \left(\cos \frac{p(j-1)}{2m_1} \right) - f \right] + \frac{4 \tilde{y}_1 m p}{3t} \cos \frac{p(j-1)}{2m_1}} + \sum_{j=m_1+1}^m \frac{2C_0 \tilde{y}_1 - m \frac{p^2}{t} (\tilde{y}_1 - f) \sum_{k=1}^{j-1} P_{k1}}{2 + m \frac{p^2}{2t} (\tilde{y}_1 - f)}, \quad (14)$$

где

$$A_j = 1 + \left(\frac{2}{3p} - 1 \right) \cos \frac{p(j-1)}{2m_1},$$

$$B_j = 1 - \left(1 - \frac{8}{3p} \right) \cos \frac{p(j-1)}{2m_1}. \quad (15)$$

Поскольку силы P_{j1} отличаются незначительно, упростим соотношения (10), (13) и (14), заменив в них, как и в [1], продольную силу, действующую на j -ю половину гофра, приближенным значением. Тогда для силы, действующей на j -й гофр, с номером, расположенным в интервале $2 \leq j \leq m_1$, получим

$$P_{j1} = \frac{C_0 \tilde{y}_1 A_j}{1 + m \frac{p^2}{t} \left(\frac{2j-1}{4} \right) (\tilde{y}_1 B_j - f)} \quad (16)$$

$$j = 2, 3, \dots, m_1.$$

Для силы, действующей на j -й гофр с номером в интервале $m_1+1 \leq j \leq m$:

$$P_{j1} = \frac{C_0 \tilde{y}_1}{1 + \frac{mp^2}{4t}(2j-1)(\tilde{y}_1 - f)} \quad (17)$$

Сила, действующая на гофрированный пакет в процессе первичного нагружения, определяется из соотношения:

$$F_1 = \frac{1,5 C_0 \tilde{y}_1}{4 - \frac{mp^2}{t} \left(\frac{8f}{3p} - \tilde{y}_1 \right)} + \sum_{j=2}^{m_1} \frac{C_0 A_j \tilde{y}_1}{1 + \frac{mp^2}{t} \left(\frac{2j-1}{4} \right) (\tilde{y}_1 B_j - f)} + \sum_{j=m_1+1}^m \frac{C_0 \tilde{y}_1}{1 + \frac{mp^2}{t} (2j-1)(\tilde{y}_1 - f)} \quad (18)$$

Значение параметра m_1 определено экспериментально (результаты экспериментального расчетного исследования приведены в [3]) и равно $m_1=2$. Подставив это значение m_1 в (18), для силы, действующей на пакет в процессе первичного нагружения, окончательно получим

$$F_1 = \left[\frac{1,5}{4 - \frac{mp^2}{t} \left(\frac{8f}{3p} - \tilde{y}_1 \right)} + \frac{A_2}{1 + \frac{3mp^2}{4t} (\tilde{y}_1 B_2 - f)} + \sum_{j=3}^m \frac{1}{1 + \frac{mp^2}{4t} (2j-1)(\tilde{y}_1 - f)} \right] C_0 \tilde{y}_1 \quad (19)$$

где значения A_2 и B_2 получим из (15) при $j=2$.

Разгрузка. На первом этапе разгрузки все гофры деформируются без смещения их вершин и поворота сечений, лежащих в вершинах. Здесь так же, как и на последующих этапах разгрузки, принимаем, что пакет деформируется, как одна лента с жёсткостью, равной сумме жёсткостей отдельных лент. Возможность использования этого допущения для многослойного многопролётного гофрированного пакета подтверждена хорошим совпадением экспериментальных и теоретических результатов. Кроме того, модель многослойного многопролётного гофрированного пакета, у которого в каждом пролёте все слои проскальзывают относительно друг друга и опорных плит одновременно, но проскальзывание постепенно распространяется от крайних пролётов к среднему, является вполне приемлемой.

На основании теоретических результатов, полученных для многослойного однопролётного гофра, можно утверждать, что вышеуказанное допущение будет справедливо и для этой модели многослойного многопролётного гофрированного пакета.

Текущее значение приращения деформации гофров на первом этапе разгрузки запишется в виде (8) из [2].

Продольная сила, действующая на первый гофр, составленный из двух крайних полугофров, определяется из соотношения (13) из [2]. Продольную силу, действующую на первом этапе разгрузки на j -й гофр, составленный из двух симметрично расположенных j -х половинок, определим по (13) из [2], предварительно определив удлинение упругой линии гофра по (8) из [2].

Тогда для гофров, номер j которых содержится в интервале $2 \leq j \leq m_1$, продольная сила запишется в виде:

$$N_{j12} = \frac{3t C_0 \tilde{y}_{12}}{p^2 h^2} (f - \tilde{y}_1^* B_j) \quad (20)$$

Для гофров с номером j , содержащимся в интервале $m_1 + 1 \leq j \leq m$:

$$N_{j12} = \frac{3t C_0 \tilde{y}_{12}}{p^2 h^2} (f - \tilde{y}_1^*) \quad (21)$$

Дифференциальное уравнение, описывающее изгиб первого гофра на первом этапе разгрузки, запишется в виде:

$$EJ \frac{d^4 y_{12}}{dx^4} - N_{112} \frac{d^2 y_{0112}}{dx^2} + m P_{j1}^* \frac{d^2 y_{12}}{dx^2} = (P_{112} - P_{11}^*) f \left(x - \frac{t}{2} \right) \quad (22)$$

Для любого j -го гофра запишется в виде:

$$EJ \frac{d^4 y_{12}}{dx^4} - N_{j12} \frac{d^2 y_{0j12}}{dx^2} + m \left(\sum_{i=1}^{j-1} P_{i1}^* + \frac{P_{j1}^*}{2} \right) \frac{d^2 y_{12}}{dx^2} = (P_{j12} - P_{j1}^*) f \left(x - \frac{t}{2} \right) \quad (23)$$

$j=2, 3, 4, \dots, m$,

где y_{12} определяется по (8) из [2], N_{112} – по (13) из [2], N_{j12} при $2 \leq j \leq m_1$ – по (20) и при $m_1 + 1 \leq j \leq m$ – по (21). Остаточный выгиб первого гофра на первом этапе разгрузки:

$$y_{0112} = y_{011}^* + y_{12} = -\frac{1}{2}(f - \tilde{y}_{12}^*) \left(1 - \cos \frac{2px}{t}\right) + \tilde{y}_1^* \sin \frac{px}{t}, \quad (24)$$

остаточный выгиб j -го гофра:

$$y_{0j12} = \frac{1}{2} \left[\tilde{y}_1^* \left(1 - \cos \frac{p(j-1)}{2m_1}\right) - f - \tilde{y}_{12}^* \right] \left(1 - \cos \frac{2px}{t}\right) + \tilde{y}_1^* \sin \frac{p(j-1)}{2m_1} \sin \frac{px}{t}, \quad (25)$$

$2 \leq j \leq m_1,$

$$y_{0j12} = \frac{1}{2} \left(\tilde{y}_1^* - f - \tilde{y}_{12}^* \right) \left(1 - \cos \frac{2px}{t}\right), \quad (26)$$

$m_1 + 1 \leq j \leq m.$

Уравнения (22) и (23) решим методом Галеркина. Правые и левые части уравнений умножим на $1 - \cos 2px/t$ и проинтегрируем их в пределах от 0 до t .

В результате, пренебрегая членами второго порядка малости, найдём силы, действующие на первом этапе разгрузки на гофры, составленные из симметрично расположенных полугофров, в виде:

на первый гофр

$$P_{112} = P_{11}^* - \tilde{y}_{12}^* \left\{ C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} \left(f - \frac{8}{3p} \tilde{y}_1^* \right)^2 \right] - \tilde{y}_1^* \sin \frac{\pi p}{2t} P_{11}^* \right\}, \quad (27)$$

на любой j -й гофр

$$P_{j12} = P_{j1}^* - \tilde{y}_{12}^* \left\{ C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} \left(f - \tilde{y}_1^* B_j \right)^2 \right] - \frac{\pi p}{2t} \left(P_{11}^* + \dots + P_{j-11}^* + \frac{P_{j1}^*}{2} \right) \right\}, \quad (28)$$

$2 \leq j \leq m_1,$

$$P_{j12} = P_{j1}^* - \tilde{y}_{12}^* \left\{ C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} \left(f - \tilde{y}_1^* \right)^2 \right] - \frac{\pi p}{2t} \left(P_{11}^* + \dots + P_{m_1}^* + \dots + P_{j-11}^* + \frac{P_{j1}^*}{2} \right) \right\}, \quad (29)$$

$m_1 + 1 \leq j \leq m.$

Силу, действующую на пакет на первом этапе разгрузки, найдём как равнодействующую этих сил в виде:

$$F_{12} = F_1^* - \tilde{y}_{12}^* \left\{ C_0 \left[m + \frac{3}{2h^2} \left[(m - m_1) \left(f - \tilde{y}_1^* \right)^2 + \sum_{j=1}^{j=m_1} \left(f - \tilde{y}_1^* B_j \right)^2 \right] \right] - \frac{\pi p}{2t} \sum_{j=1}^{j=m_1} \left(m - j + \frac{1}{2} \right) P_{j1}^* \right\}, \quad (30)$$

где силы P_{*j1}^* определяются при $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_1^*$ из соотношений: (28) из [2] при $j=1$ и $i=1$; (16) при $2 \leq j \leq m_1$ и (17) при $m_1 + 1 \leq j \leq m$.

Учитывая, что $m_1=2$, окончательно получим

$$F_{12} = F_1^* - \tilde{y}_{12}^* \left\{ C_0 \left[m + \frac{3}{2h^2} \left[(m - 2) \left(f - \tilde{y}_1^* \right)^2 + \left(f - \frac{8}{3p} \tilde{y}_1^* \right)^2 + \left(f - \tilde{y}_1^* B_2 \right)^2 \right] \right] - \frac{\pi p}{2t} \sum_{j=1}^{m_1} \left(m - j + \frac{1}{2} \right) P_{j1}^* \right\}. \quad (31)$$

Первый этап разгрузки закончится тогда, когда продольные силы преодолеют силы трения на крайних вершинах пакета и произойдёт проскальзывание этих вершин. Определим силу, действующую на пакет в конце первого этапа разгрузки.

Приращение деформации гофров в конце первого этапа разгрузки можно определять двумя путями: из условия

$$|N_{112}| = \frac{m}{2} (P_{11}^* + P_{12}^*) \quad (32)$$

и условия сшивки процессов разгрузки первого гофра при неподвижных и подвижных концевых сечениях

$$\frac{1.5 C_0 \tilde{y}_{12}^*}{4 + \frac{\pi p}{t} \left(\frac{8}{3p} f - \tilde{y}_{12}^* \right)} = P_{11}^* - \tilde{y}_{12}^* \left\{ C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} \left(f - \frac{8}{3p} \tilde{y}_1^* \right)^2 \right] - \frac{\pi p}{2t} P_{11}^* \right\} \quad (33)$$

Из (33), учитывая, что деформация пакета в конце первого этапа разгрузки

$$\tilde{y}_{12}^* = \tilde{y}_1^* - \tilde{y}_{12}^*, \quad (34)$$

и отбросив величины второго порядка малости, найдём

$$\tilde{y}_{12}^* = \frac{1,5 C_0 \tilde{y}_1^* - P_{11}^* \left[4 + \frac{mp^2}{t} \left(\frac{8}{3p} f - \tilde{y}_1^* \right) \right]}{1,5 C_0 + P_{11}^* \frac{mp^2}{t} - \left\{ C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} \left(f - \frac{8}{3p} \tilde{y}_1^* \right)^2 \right] - P_{11}^* \frac{mp^2}{2t} \right\} \left[4 + \frac{mp^2}{t} \left(\frac{8}{3p} f - \tilde{y}_1^* \right) \right]} \quad (35)$$

Подставив (35) в (31), определим силу, действующую на пакет в конце первого этапа разгрузки. Деформацию пакета в конце первого этапа разгрузки найдём, подставив (34) в (35). При дальнейшей разгрузке проскальзывания постепенно будут распространяться от крайних гофров к среднему гофру.

Так как $m_1=2$, для полного рассмотрения процесса разгрузки достаточно рассмотреть ещё второй этап, когда первый гофр уже проскользнул, j -й этап, когда проскользнул $j - 1$ -й гофр, составленный из расположенных симметрично относительно середины пакета полугофров (номер j содержится в интервале $m_1+1 \leq j \leq m$), и последний этап разгрузки, когда все гофры пакета проскользнули.

Рассмотрим второй этап разгрузки. Силу, действующую на первый гофр, составленный из симметрично расположенных полугофров, найдём по соотношению (28) из [2], подставив в него вместо \tilde{y}_i значение деформации пакета на втором этапе разгрузки

$$\tilde{y}_{22}^* = \tilde{y}_{12}^* - \Delta \tilde{y}_{22} \quad (36)$$

Определим силы, действующие на каждый из $m - 1$ непроскользнувших гофров.

$$F_{22} = \frac{1,5 C_0 \left(\tilde{y}_{12}^* - \Delta \tilde{y}_{22} \right)}{4 + \frac{mp^2}{t} \left(\frac{8}{3p} f - \tilde{y}_{12}^* + \Delta \tilde{y}_{22} \right)} - C_0 \left(\tilde{y}_{12}^* + \Delta \tilde{y}_{22} \right) \left\{ m-1 + \frac{3}{2h^2} \left[\left(\tilde{y}_{12}^* + \Delta \tilde{y}_{22} \right) \left(f - \tilde{y}_1^* B_2 \right) + \left(f - \tilde{y}_1^* B_2 \right)^2 \right] + (m-2) \left(f - \tilde{y}_1^* \right) \left(f - \tilde{y}_{12}^* + \Delta \tilde{y}_{22} \right) \right\} + \left(\tilde{y}_{12}^* + \Delta \tilde{y}_{22} \right) \frac{mp^2}{2t} \left[\sum_{j=1}^m \left(m-j + \frac{1}{2} \right) P_{j1}^* - \frac{1}{2} P_{j1}^* \right] + \sum_{k=2}^m P_{k1}^* \quad (40)$$

Дифференциальное уравнение, описывающее деформацию любого k -го гофра ($1 \leq k \leq m$), запишется в виде:

$$EJ \frac{d^4 \tilde{y}_{k22}}{dx^4} - N_{k22} \frac{d^2 y_{0k22}}{dx^2} + m \left(\sum_{i=1}^{k-1} P_{i-1,1}^* + \frac{P_{k1}^*}{2} \right) \frac{d^2 \tilde{y}_{k22}}{dx^2} = (P_{k22} - P_{k1}^*) d \left(x - \frac{t}{2} \right) \quad (37)$$

где N_{k22} определяется из соотношения (20), $k = 2$ и из (21), если $2 < k \leq m$, при подстановке в них \tilde{y}_{22} вместо \tilde{y}_{12} и

$$y_{22} = -\frac{\tilde{y}_{22}}{2} \left(1 - \cos \frac{2px}{t} \right).$$

Решив уравнение (37) методом Галеркина, получим силу, действующую на второй гофр:

$$P_{222} = P_{21}^* - \left(\tilde{y}_{12}^* + \Delta \tilde{y}_{22} \right) \times \left\{ C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} \left[\left(\tilde{y}_{12}^* + \Delta \tilde{y}_{22} \right) \left(f - \tilde{y}_1^* B_2 \right) + \left(f - \tilde{y}_1^* B_2 \right)^2 \right] \right] - \frac{mp^2}{2t} \left(P_{11}^* + \frac{P_{21}^*}{2} \right) \right\} \quad (38)$$

и на любой k -й гофр:

$$P_{k22} = P_{k1}^* - \left(\tilde{y}_{12}^* + \Delta \tilde{y}_{22} \right) \left\{ C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} \left(f - \tilde{y}_1^* \right) \left(f - \tilde{y}_{12}^* + \Delta \tilde{y}_{22} \right) \right] - \frac{mp^2}{2t} \left(P_{11}^* + \dots + P_{k-1,1}^* + \frac{P_{k1}^*}{2} \right) \right\} \quad (39)$$

$2 < k \leq m$. Силу, действующую на пакет на втором этапе разгрузки, найдём, просуммировав все усилия, действующие на отдельные гофры:

Приращение деформации в конце второго этапа разгрузки, когда произойдёт проскальзывание второго гофра, может быть найдено из условия

$$\frac{1}{2} m P_{122}^* + |N_{222}| = m \left(P_{11}^* + \frac{P_{21}^*}{2} + \frac{P_{222}^*}{2} + \frac{P_{122}^*}{2} \right)$$

$$\frac{C_0 A_2 (\tilde{y}_{12}^* - \Delta \tilde{y}_{22}^*)}{1 - \frac{3mp^2}{4t} \left[(\tilde{y}_{12}^* - \Delta \tilde{y}_{22}^*) B_2 - f \right]} = P_{21}^* - (\tilde{y}_{12}^* + \Delta \tilde{y}_{22}^*) \left\{ C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} \left((\tilde{y}_{12}^* + \Delta \tilde{y}_{22}^*) (f - \tilde{y}_1^* B_2) + (f - \tilde{y}_1^* B_2)^2 \right) \right] - \frac{mp^2}{2t} \left(P_{11}^* + \frac{P_{21}^*}{2} \right) \right\} \quad (41)$$

Способ определения стоящей в первой части (41) силы, действующей на второй гофр при проскальзывающих концевых сечениях, поясним ниже при рассмотрении последнего этапа разгрузки.

где N_{222} определяется из (20), P_{222}^* – из (38) при $\Delta \tilde{y}_{22}^* = \Delta \tilde{y}_{22}^*$, P_{11}^* и P_{21}^* – соответственно по (28) из [2] и (16) при $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_1^*$.

Приращение можно также найти из условия сшивки процессов разгрузки второго гофра при неподвижных и подвижных концевых сечениях в конце второго этапа разгрузки:

Приращение деформации пакета, найденное из условия (41) с точностью до членов второго порядка малости и при условии малости величины $\tilde{y}_{12}^* + \Delta \tilde{y}_{22}^*$, запишется в виде:

$$\Delta \tilde{y}_{22}^* = \frac{C_0 A_2 \tilde{y}_1^* - P_{21}^* \left[1 - \frac{3mp^2}{4t} (\tilde{y}_1^* B_2 - f) \right]}{C_0 A_2 + \frac{3mp^2}{4t} B_2 P_{21}^* - \left[1 - \frac{3mp^2}{4t} (\tilde{y}_1^* B_2 - f) \right] \left\{ C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} (f - \tilde{y}_1^* B_2)^2 \right] - \frac{mp^2}{2t} \left(P_{11}^* + \frac{P_{21}^*}{2} \right) \right\}} - \tilde{y}_{12}^* \quad (42)$$

Подставив (42) в (40) и учитывая малость величины $(\tilde{y}_{12}^* + \Delta \tilde{y}_{22}^*)^2$, найдём силу в конце второго этапа разгрузки. Соответствующую деформацию пакета \tilde{y}_{22}^* найдём, подставив (42) в (36).

Рассмотрим j -й этап разгрузки ($3 \leq j \leq m$). Определим силы, действующие на проскользнувшие гофры. Силу, действующую на первый гофр, найдём по (28) из [2], подставив вместо \tilde{y}_i значение деформации пакета на j -м этапе разгрузки, равное

$$\tilde{y}_{j2}^* = \tilde{y}_{j-1,2}^* - \Delta \tilde{y}_{j2}^* \quad (43)$$

Сила, действующая на второй гофр, равна

$$P_{2j2}^* = \frac{C_0 (\tilde{y}_{j-1,2}^* - \Delta \tilde{y}_{j2}^*)}{1 - \frac{3mp^2}{4t} \left[(\tilde{y}_{j-1,2}^* - \Delta \tilde{y}_{j2}^*) B_2 - f \right]} \quad (44)$$

Сила, действующая на любой k -й гофр ($3 \leq k \leq j - 1$), равна

$$P_{kj2}^* = \frac{C_0 A_2 (\tilde{y}_{j-1,2}^* - \Delta \tilde{y}_{j2}^*)}{1 - \frac{3mp^2}{4t} (2k-1) (\tilde{y}_{j-1,2}^* - \Delta \tilde{y}_{j2}^* - f)} \quad (45)$$

Способ определения сил (44) и (45) изложен ниже при рассмотрении последнего этапа разгрузки.

Силы, действующие на $(m - j + 1)$ непроскользнувших гофров, определяются аналогично силам, действовавшим на втором этапе на 3-й, 4-й, ..., m -й непроскользнувшие гофры. Приведём значения этих сил

$$P_{kj2}^* = P_{kl}^* (\tilde{y}_{j-1,2}^* - \Delta \tilde{y}_{j2}^*) \times \left\{ C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} (f - \tilde{y}_1^* B_2) (f - \tilde{y}_1^* + \tilde{y}_{j-1,2}^* + \Delta \tilde{y}_{j2}^*) \right] - \frac{mp^2}{2t} \left(\frac{P_{kl}^*}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} P_{il}^* \right) \right\} \quad 3 \leq k \leq m. \quad (46)$$

Сила, действующая на пакет на j -м этапе разгрузки, запишется в виде:

$$F_{j2} = C_0 \left(\tilde{y}_{j-1,2}^* - \Delta \tilde{y}_{j2}^* \right) \left[\frac{15}{4 + \frac{mp^2}{2} \left(\frac{8}{3p} f - \tilde{y}_{j-1,2}^* + \Delta \tilde{y}_{j2}^* \right)} + \frac{A}{1 - \frac{3mp^2}{4} \left[\left(\tilde{y}_{j-1,2}^* - \Delta \tilde{y}_{j2}^* \right) B_2 - f \right]} + \sum_{k=3}^{j-1} \frac{1}{1 - \frac{mp^2}{4} (2k-1) \left(\tilde{y}_{j-1,2}^* - \Delta \tilde{y}_{j2}^* - f \right)} \right] \quad (47)$$

$$- C_0 \left(\tilde{y}_{j-1,2}^* - \Delta \tilde{y}_{j2}^* \right)^{m-j+1} \left[1 + \frac{3}{2h} \left(f - \tilde{y}_1^* \right) \left(f - \tilde{y}_1^* + \tilde{y}_{j-1,2}^* + \Delta \tilde{y}_{j2}^* \right) + \frac{mp^2}{2} \left(\tilde{y}_{j-1,2}^* + \Delta \tilde{y}_{j2}^* \right) \left[(m-j+1) \sum_{k=1}^{j-1} P_{kl}^* + \sum_{k=j}^m \left(m-k + \frac{1}{2} \right) P_{kl}^* \right] + \sum_{k=j}^m P_{kl}^* \right]$$

При $j=3$ в выражении (47) $\Sigma_1 = 0$. J -й этап закончится, когда проскользнет j -й гофр.

Приращение деформации в конце j -го этапа может быть определено из условия преодоления продольной силой N_{jj2} сил трения, приложенных к j -й вершине

$$|N_{jj2}| = m \left(P_{11}^* + P_{21}^* + \dots + P_{j-1,1}^* + \frac{P_{j1}^*}{2} + \frac{P_{jj2}^*}{2} - P_{1j2}^* - \dots - P_{j-2,j2}^* \right) \quad 3 \leq j \leq m$$

или из условия сшивки процессов разгрузки j -го гофра с неподвижными и подвижными концевыми сечениями в конце j -го этапа разгрузки

$$\frac{C_0 \left(\tilde{y}_{j-1,2}^* - \Delta \tilde{y}_{j2}^* \right)}{1 - \frac{mp^2}{4t} (2j-1) \left(\tilde{y}_{j-1,2}^* - \Delta \tilde{y}_{j2}^* - f \right)} = P_{j1}^* - \left(\tilde{y}_{j-1,2}^* + \Delta \tilde{y}_{j2}^* \right) \left\{ C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} \left(f - \tilde{y}_1^* \right) \left(f - \tilde{y}_1^* - \tilde{y}_{j-1,2}^* + \Delta \tilde{y}_{j2}^* \right) \right] - \frac{mp^2}{2t} \left(\frac{P_{j1}^*}{2} + \sum_{i=1}^{j-1} P_{i1}^* \right) \right\} \quad (48)$$

Отбросив члены второго порядка малости, из (48) найдём

$$\Delta \tilde{y}_{j2}^* = \frac{A_3 \left(P_{j1}^* - \tilde{y}_{j-1,2}^* A_4 \right) - C_0 \tilde{y}_{j-1,2}^*}{\left[\frac{mp^2}{4t} (2j-1) \left(f + \tilde{y}_{j-1,2}^* - \Delta \tilde{y}_{j2}^* \right) + 1 \right] \cdot A_4 + A_5}, \quad 3 \leq j \leq m, \quad (49)$$

где

$$A_3 = \left[1 - \frac{mp^2}{4t} (2j-1) \left(\tilde{y}_{j-1,2}^* - f \right) \right];$$

$$A_4 = C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} \left(f - \tilde{y}_1^* \right) \left(f - \tilde{y}_1^* + \tilde{y}_{j-1,2}^* \right) \right] - \frac{mp^2}{2t} \left(\frac{P_{j1}^*}{2} + \sum_{i=1}^{j-1} P_{i1}^* \right);$$

$$A_5 = \frac{3}{2h^2} C_0 \tilde{y}_{j-1,2}^* \left(f - \tilde{y}_1^* \right) \left[1 - \frac{mp^2}{4t} (2j-1) \left(\tilde{y}_{j-1,2}^* - f \right) \right] - \frac{mp^2}{4t} (2j-1) P_{j1}^* - C_0.$$

Силу, действующую на пакет, и деформацию пакета в конце j -го этапа разгрузки ($3 \leq j \leq m$) найдём, подставив (49) в (47) и в (43).

На следующем этапе разгрузки многослойный многопролётный гофрированный пакет деформируется при подвижных концевых сечениях пролётов.

Дифференциальные уравнения, описывающие деформацию каждого гофра пакета, будут отличаться от соответствующих дифференциальных уравнений последнего этапа первичной нагрузки только знаком перед членом, содержащим силы трения. Способы решения этих уравнений и упрощения конечных выражений

для действующих сил аналогичны описанным при рассмотрении последнего этапа первичной нагрузки.

Поэтому ограничимся лишь приведением значений действующих сил.

Сила, действующая на первый гофр, будет равна

$$P_{12} = \frac{1,5C_0 \tilde{y}_2}{4 + \frac{mp^2}{t} \left(\frac{8}{3p} f - \tilde{y}_2 \right)} \quad (50)$$

Сила, действующая на пакет на последнем этапе разгрузки, запишется в виде:

$$F_2 = C_0 \tilde{y}_2 \left[\frac{1,5}{4 + \frac{mp^2}{2t} \left(\frac{8}{3p} f - \tilde{y}_2 \right)} + \frac{A_2}{1 - \frac{3mp^2}{4t} \left(\tilde{y}_2 B_2 - f \right)} + \sum_{k=3}^m \frac{1}{1 - \frac{mp^2}{4t} (2k-1) \left(\tilde{y}_2 - f \right)} \right] \quad (53)$$

и деформация пакета \tilde{y}_2 в сечениях $x=t/2$ может принимать последовательно все значения в интервале $0 \leq \tilde{y}_2 \leq \tilde{y}_{m2}^*$.

Повторная нагрузка. При полной разгрузке пакета ($\tilde{y}_2^* = 0$) повторное нагружение его осуществляется по процессу первичного нагружения и зависимость между действующей силой и деформацией пакета при этом нагружении определяется соотношением (19).

При неполной разгрузке ($\tilde{y}_2^* > 0$) на первом этапе повторной нагрузки все гофры будут деформироваться без смещения и поворота сечений, лежащих в вершинах. При дальнейшем нагружении, как и в процессе разгрузки, будет происходить проскальзывание вершин гофров, постепенно распространяющееся от крайних гофров к среднему. На последнем этапе повторного нагружения пакет будет деформироваться со смещением всех вершин (за исключением средней) и зависимость между действующей силой и деформацией пакета будет описываться соотношением (19).

Анализ соотношений, полученных при рассмотрении первичного нагружения и разгрузки, позволяет получить все необ-

ходимые соотношения, описывающие любую i -ую загрузку пакета. Соотношения, описывающие повторную нагрузку, при неполной разгрузке ($\tilde{y}_2^* > 0$) могут быть получены из этих соотношений как частный случай.

Сила, действующая на 2-й гофр, запишется в виде:

$$P_{22} = \frac{C_0 A_2 \tilde{y}_2}{1 - \frac{3mp^2}{4t} \left(\tilde{y}_2 B_2 - f \right)} \quad (51)$$

где A_2 и B_2 определяются из соотношений (15) при $j = 2$.

Сила, действующая на любой k -й гофр ($3 \leq k \leq m$), будет равна

$$P_{k2} = \frac{C_0 \tilde{y}_2}{1 - \frac{mp^2}{4t} (2k-1) \left(\tilde{y}_2 - f \right)} \quad (52)$$

i -ая загрузка пакета. Здесь возможно несколько случаев загрузки пакета. **Случай 1.** Первый гофр не проскользнул в $i-1$ -м процессе загрузки.

В этом случае i -я загрузка идет по первому этапу $i-1$ -й загрузки и при достижении действующей силой значения F_{i-2}^* пакет при дальнейшем приращении силы (приращение того же знака) будет загружаться по последнему этапу $i-2$ -й загрузки.

Случай 2. Первый гофр проскользнул в $i-1$ -й загрузке.

На первом этапе i -й загрузки гофры деформируются без смещения вершин и приращение деформации в текущем сечении и деформацию гофров в сечениях $x = t/2$ определим из соотношений:

$$y_{ii} = (-1)^{i+1} \frac{\tilde{y}_{ii}}{2} \left(1 - \cos \frac{2px}{t} \right) \quad (54)$$

и

$$\tilde{y}_{ii} = \tilde{y}_{i-1}^* + (-1)^{i+1} \tilde{y}_{ii} \quad (55)$$

где \tilde{y}_{i-1}^* – деформация пакета в конце i -й загрузки.

Продольная сила, действующая на первый гофр, будет равна

$$N_{1i} = (-1)^{i+1} \frac{3C_0 t}{p^2 h^2} \tilde{y}_{1i} \left(\frac{8}{3p} \tilde{y}_{i-1}^* - f \right) \quad (56)$$

Силу, действующую на первый гофр, найдём, решив уравнение

$$EJ \frac{d^4 y_{li}}{dx^4} - N_{1i} \frac{d^2 y_{01li}}{dx^2} + (-1)^i m \frac{P_{li-1}^*}{2} \frac{d^2 y_{li}}{dx^2} = \left(P_{11i} - P_{li-1}^* \right) d \left(x - \frac{t}{2} \right) \quad (57)$$

в виде

$$P_{1i} = P_{li-1}^* + \tilde{y}_{li} \left\{ (-1)^{i+1} C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} \left(\frac{8}{3p} \tilde{y}_{i-1}^* - f \right)^2 \right] + \frac{mp^2}{4} P_{li-1}^* \right\} \quad (58)$$

Уравнение, описывающее деформацию второго гофра, запишется в виде:

$$EJ \frac{d^4 y_{li}}{dx^4} - N_{2i} \frac{d^2 y_{02li}}{dx^2} + R_{2i-1}^* \frac{d^2 y_{li}}{dx^2} = (P_{2i} - P_{2i-1}^*) d \left(x - \frac{t}{2} \right) \quad (59)$$

где

$$y_{02i} = \frac{f - \tilde{y}_{i-1}^* + \tilde{y}_{k_2}^* \cos \frac{p}{4} - (-1)^{i+1} \tilde{y}_{li}}{2} \left(1 - \cos \frac{2px}{t} \right) + \tilde{y}_{k_2}^* \cos \frac{p}{4} \sin \frac{px}{4}, \quad (60)$$

$\tilde{y}_{k_2}^*$ – деформация второго гофра в конце k_2 -й загрузки ($1 \leq k_2 \leq i - 1$), на которой последний раз второй гофр проскользнул (принято, что когда второй гофр отслоился на k_2 -й загрузке, то его деформация в отслоённом состоянии определялась соотношением (9)),

$$N_{2i} = (-1)^{i+1} \frac{3C_0 t}{p^2 h^2} \tilde{y}_{li} \left[\tilde{y}_{i-1}^* - f + \tilde{y}_{k_2}^* \left(1 - \frac{8}{3p} \right) \cos \frac{p}{4} \right], \quad (61)$$

R_{2i-1}^* – продольная сила, действующая на второй гофр в конце $i-1$ -ой загрузки.

Запишем R_{2i-1}^* в виде рекуррентной зависимости

$$R_{2i-1}^* = R_{2i-2}^* - N_{2i-1}^*,$$

$$i = k+2, k+3, \dots, \quad (62)$$

а приращение продольной силы на $i-1$ -й загрузке N_{2i-1}^* определим из (61) соответствующей заменой индексов в виде:

$$N_{2i-1}^* = (-1)^{i+1} \frac{3C_0 t}{p^2 h^2} \tilde{y}_{li} \left[\tilde{y}_{i-1}^* - f + \tilde{y}_{k_2}^* \left(1 - \frac{8}{3p} \right) \cos \frac{p}{4} \right]. \quad (63)$$

При вычислении R_{2i-1}^* из (62) следует иметь в виду, что

$$R_{2k_2}^* = (-1)^{k_2+1} m \left(P_{1k_2}^* + \frac{P_{2k_2}^*}{2} \right) \quad (64)$$

Учитывая (62), (63), (64), можно R_{2i-1}^* записать в следующем виде:

$$R_{2i-1}^* = (-1)^{k_2+1} m \left(P_{1k_2}^* + \frac{P_{2k_2}^*}{2} \right) - \frac{3C_0 t}{p^2 h^2} \sum_{s=k_2+1}^{i-1} (-1)^{s+1} \tilde{y}_{li} \left[\tilde{y}_{s-1}^* - f - \tilde{y}_{k_2}^* \left(1 - \frac{8}{3p} \right) \cos \frac{p}{4} \right]. \quad (65)$$

Тогда, решив (59), получим силу, действующую на второй гофр на первом этапе i -й загрузки, в виде:

$$P_2 = P_{2i-1}^* + (-1)^{i+1} \tilde{y}_{li} \left\{ C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} \left[\tilde{y}_{i-1}^* - f - \tilde{y}_{k_2}^* \left(1 - \frac{8}{3p} \right) \cos \frac{p}{4} \right]^2 \right] \right\} \frac{p^2}{2} R_{2i-1}^* \quad (66)$$

Определим силу, действующую на j -й гофр ($2 < j \leq m$). Дифференциальное уравнение, описывающее деформацию j -го гофра на первом этапе i -й загрузки, получим из (59), заменив в нём индекс «2» на « j »:

$$EJ \frac{d^4 y_{li}}{dx^4} - N_{ji} \frac{d^2 y_{0jli}}{dx^2} + R_{j-1}^* \frac{d^2 y_{li}}{dx^2} = (P_{jli} - P_{j-1}^*) d \left(x - \frac{t}{2} \right) \quad 2 \leq j \leq m, \quad (67)$$

где

$$N_{ji} = (-1)^{i+1} \frac{3C_0 t}{p^2 h^2} \tilde{y}_{li} \left(\tilde{y}_{i-1}^* - f \right),$$

$$y_{0jli} = - \frac{f - \tilde{y}_{i-1}^* - (-1)^{i+1} \tilde{y}_{li}}{2} \left(1 - \cos \frac{2px}{t} \right), \quad (68)$$

$$R_{j-1}^* = R_{j-2}^* - N_{j-1}^*,$$

$$R_{jk_j}^* = (-1)^{k_j+1} m \left(P_{1k_j}^* + \dots + P_{j-1, k_j}^* + \frac{P_{jk_j}^*}{2} \right)$$

$$1 \leq k_j \leq i - 1, \quad (69)$$

$$N_{j-1}^* = (-1)^{i+1} \frac{3C_0 t}{p^2 h^2} \tilde{y}_{li} \left(\tilde{y}_{i-1}^* - f \right) \quad (70)$$

Тогда силу, действующую на j -й гофр, найдём в виде:

$$P_{ji} = P_{ji-1}^* + (-1)^{i+1} \tilde{y}_{li} \left\{ C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} (\tilde{y}_{i-1}^* - f)^2 \right] - \frac{p^2}{2t} R_{ji-1}^* \right\}, \quad 2 \leq j \leq m. \quad (71)$$

Сила, действующая на пакет на первом этапе i -й загрузки, имеет вид

$$F_{ii} = (-1)^{i+1} \tilde{y}_{li} \left\{ C_0 \left[m + \frac{3}{2h^2} \left[\left(\frac{8}{3p} \tilde{y}_{i-1}^* - f \right)^2 + \left[\tilde{y}_{i-1}^* - f - \tilde{y}_{k2}^* \left(1 - \frac{8}{3p} \right) \cos \frac{p}{4} \right]^2 + (m-2) \left(\tilde{y}_{i-1}^* - f \right)^2 \right] \right] - \frac{p^2}{2t} \left[(-1)^i \frac{m}{2} P_{li-1}^* + \sum_{j=2}^m R_{ji-1}^* \right] \right\} + \sum_{j=1}^m P_{ji-1}^* \quad (72)$$

Первый (или любой j -й) этап закончится либо когда приращение деформации сменит знак (тогда закончится i -я загрузка), либо когда проскользнет первый (или любой j -й) гофр. Случай смены знака приращения не нуждается в дополнительных пояснениях.

Приращение деформации гофров в конце первого этапа i -й загрузки в случае проскальзывания первого гофра найдём, отбрасывая члены второго порядка малости, из условия, аналогичного (33), в виде:

$$\tilde{y}_{li}^* = \frac{C_0 \tilde{y}_{i-1}^* - P_{li-1}^* A_6}{\frac{mp^2}{4t} P_{li-1}^* - (-1)^{i+1} C_0 + A_6 \cdot A_7}, \quad (73)$$

где

$$A_6 = 1 - (-1)^i \frac{mp^2}{4t} \left(\tilde{y}_{i-1}^* - f \right);$$

$$A_7 = (-1)^{i+1} C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} \left(\frac{8}{3p} \tilde{y}_{i-1}^* - f \right)^2 \right] + \frac{mp^2}{4t} P_{li-1}^*.$$

Силу, действующую на пакет в конце первого этапа i -й загрузки, найдём, подставив (73) в (72).

Случай 3. В $i-1$ -й загрузке проскользнуло j гофров ($2 < j \leq m$).

В этом случае $kj = i-1$ и для любого r -го гофра из j гофров, проскользнувших в процессе $i-1$ -ой загрузки,

$$R_{ri-1}^* = (-1)^i m \left(\sum_{s=1}^{r-1} P_{si-1}^* + \frac{P_{ri-1}^*}{2} \right),$$

$$1 \leq r \leq j, \quad 2 \leq j \leq m. \quad (74)$$

При $r=1$ сумма в (74) равна нулю. Для любого s -го гофра ($j < s \leq m$) из $m-j$,

не проскользнувших в процессе $i-1$ -ой загрузки гофров, величина R_{si-1}^* определяется из рекуррентного соотношения, аналогичного (62):

$$R_{si-1}^* = R_{si-2}^* - \sum_{r=1}^{r=j} N_{sri-1}, \quad (75)$$

$$i = k_2 + 2, k_2 + 3, \dots,$$

где

$$R_{k_i}^* = (-1)^{k_i+1} m \left(\sum_{r=1}^{r=i} P_{rk_i}^* + \frac{P_{sk_i}^*}{2} \right) \quad (76)$$

Рассмотрим первый этап i -й загрузки. На этом этапе гофры деформируются без смещения вершин и приращение деформации в текущем сечении и деформация гофров в сечениях $x = t/2$ определяются из соотношений (54) и (55).

Приращение продольной силы и сила, действующая на первый гофр, определяются из соотношений (56) и (58). Приращение продольной силы и сила, действующая на второй гофр, определяются соответственно соотношениями (61) и (66), в которых учтено, что $k_2 = i - 1$. Приращение продольной силы, действующее на любой из $m - 2$ остальных гофров, определяется из соотношения (70), а сила – из (71).

При определении силы, действующей на любой r -й гофр из числа j , проскользнувших на $i-1$ -ой загрузке, в (71) вместо R_{i-1}^* подставляется R_{ri-1}^* из (74), а при определении силы, действующей на любой s -й гофр ($j < s \leq m$) из числа $m-j$, не проскользнувших в процессе $i-1$ -й загрузки, величина R_{si-1}^* берётся из (75).

Сила, действующая на пакет на первом этапе i -й загрузки, определяется соотношением

$$F_{1i} = (-1)^{i+1} \tilde{y}_{1i} \left\{ C_0 \left[m + \frac{3}{2h^2} \left[\left(\frac{8}{3p} \tilde{y}_{i-1}^* - f \right)^2 + \left[\tilde{y}_{i-1}^* B_2 - f \right]^2 + (m-2) \left(\tilde{y}_{i-1}^* - f \right)^2 \right] \right] - \frac{P^2}{2t} \left(\sum_{r=1}^{i-j} R_{r-1}^* + \sum_{s=j+1}^{s=m} R_{s-1}^* \right) \right\} + \sum_{j=1}^{j=m} P_{j-1}^* \quad (77)$$

Приращение деформации гофров в конце первого этапа i -й загрузки определяется из (73). Силу, действующую на пакет в конце первого этапа i -й загрузки, найдём, подставив (73) в (77).

Рассмотрим второй этап i -й загрузки. Деформация пакета \tilde{y}_{2i} определяется

$$F_{2i} = \frac{1.5 C_0 \left[\tilde{y}_{i-1}^* + (-1)^{i+1} \tilde{y}_{2i} \right]}{4 + (-1)^{i+1} \frac{mp^2}{t} \left(\frac{8}{3p} f - \tilde{y}_{i-1}^* - (-1)^{i+1} \tilde{y}_{2i} \right)} + \quad (78)$$

$$+ (-1)^{i+1} \tilde{y}_{2i} \left\{ C_0 \left[m-1 + \frac{3}{2h^2} \left[\left(B_2 \tilde{y}_{i-1}^* - f \right)^2 + (m-2) \left(\tilde{y}_{i-1}^* - f \right)^2 \right] \right] - \frac{P^2}{2t} \left(\sum_{r=2}^{r=j} R_{r-1}^* + \sum_{s=j+1}^m R_{s-1}^* \right) \right\} + \sum_{j=2}^m P_{j-1}^*$$

Приращение деформации на втором этапе i -й загрузки найдём из условия, аналогичного (41), отбросив члены, содержащие $(y_{*1i} + \Delta y_{*2i})^2$:

$$\Delta \tilde{y}_{2i}^* = \frac{\left[P_{2i-1}^* + (-1)^{i+1} \tilde{y}_{1i}^* - C_0 A_2 \tilde{y}_{1i}^* \right]}{(-1)^{i+1} A_2 C_0 - \frac{3mp^2}{4t} B_2 P_{2i-1}^* - \frac{3mp^2}{4t} \left(\tilde{y}_{1i}^* B_2 - f \right) A_9}, \quad (79)$$

где

$$A_9 = C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} \left(f - \tilde{y}_{i-1}^* B_2 \right)^2 \right] - \frac{P^2}{2t} R_{r=2, i-1}^*;$$

из (55) при замене индекса «1» на индекс «2».

Силу, действующую на пакет, с учётом (40), (74), (75) и малости \tilde{y}_{2i} по сравнению с \tilde{y}_{2i}^* или максимальной деформацией пакета на k -й загрузке найдём в виде:

$$A_8 = \left[1 - (-1)^i \frac{3mp^2}{4t} \left(\tilde{y}_{1i}^* B_2 - f \right) \right].$$

Подставив в (78) и (55) (в этом выражении предварительно индекс «1» заменим на индекс «2»), приращение деформации в конце второго этапа, равно $\tilde{y}_{2i}^* = \tilde{y}_{1i}^* + \Delta \tilde{y}_{2i}^*$, (80)

и (79), найдём соответственно силу, действующую на пакет и деформацию пакета в конце второго этапа i -й загрузки.

Рассмотрим теперь любой k -й этап i -й загрузки ($3 \leq k \leq J$, $2 \leq j \leq m$). Сила, действующая на пакет, запишется в виде:

$$F_{ki} = C_0 \left[\tilde{y}_{k-1}^* + (-1)^{i+1} \Delta \tilde{y}_{ki} \right] \left\{ \frac{1.5}{4 + (-1)^i \frac{mp^2}{t} \left(\frac{8}{3p} f - \tilde{y}_{k-1}^* - (-1)^{i+1} \Delta \tilde{y}_{ki} \right)} + \frac{A_2}{1 - (-1)^i \frac{3mp^2}{4t} \left[\left(\tilde{y}_{k-1}^* + (-1)^{i+1} \Delta \tilde{y}_{ki} \right) B_2 - f \right]} \right\} + \quad (81)$$

$$+ \sum_{s=3}^{k-1} \frac{1}{1 - (-1)^i \frac{mp^2}{4t} (2s-1) \left(\tilde{y}_{k-1}^* + (-1)^{i+1} \Delta \tilde{y}_{ki} - f \right)} \left\{ \sum_{s=k}^m P_{s-1}^* + (-1)^{i+1} \left(\tilde{y}_{k-1}^* + \Delta \tilde{y}_{ki} \right) \left[C_0 (m-k+1) \left[1 + \frac{3}{2h^2} \left(f - \tilde{y}_{i-1}^* \right) \left[f - \tilde{y}_{i-1}^* + (-1) \left(\tilde{y}_{k-1}^* + \Delta \tilde{y}_{ki} \right) \right] \right] - \frac{P^2}{2t} \left(\sum_{r=k}^{r=j} R_{r-1}^* + \sum_{s=j+1}^{s=m} R_{s-1}^* \right) \right\}$$

Деформацию пакета найдём из соотношения

$$\tilde{y}_{ki} = \tilde{y}_{k-1,i}^* + (-1)^{i+1} \Delta \tilde{y}_{ki} \tag{82}$$

Приращение деформации за k -й этап i -й загрузки найдём из условия, аналогичного (48), пренебрегая членами, содержащими $\Delta \tilde{y}_{ki}^2$:

$$\Delta \tilde{y}_{ki}^* = \frac{A_{10} \left[P_{ki-1}^* + (-1)^{i+1} \tilde{y}_{k-1,i}^* A_{11} \right] - C_0 \tilde{y}_{k-1,i}^*}{(-1)^{i+1} C_0 + \tilde{y}_{k-1,i} C_0 \frac{3}{2h^2} \left(f - \tilde{y}_{i-1}^* \right) A_{10} - (-1)^{i+1} A_{11} \cdot A_{12} + \frac{mp^2}{4t} (2k-1) (-1)^{i+1} P_{ki-1}^*}$$

$3 \leq k \leq j, 3 \leq j \leq m,$ (83)

где

$$A_{10} = \left[1 - \frac{mp^2}{4t} (2k-1) \left(\tilde{y}_{k-1,i}^* - f \right) \right];$$

$$A_{11} = C_0 \left[1 + \frac{3}{2h^2} \left(f - \tilde{y}_{i-1}^* \right) \left[f - \tilde{y}_{i-1}^* + (-1)^i \tilde{y}_{k-1,i}^* \right] \right] - \frac{p^2}{2t} R_{r=k,i-1}^*;$$

$$F_i = C_0 \tilde{y}_i \left[\frac{1,5}{4 + (-1)^i \frac{mp^2}{t} \left(\frac{8}{3p} f - \tilde{y}_i \right)} + \frac{A_2}{1 - (-1)^i \frac{3mp^2}{4t} \left(\tilde{y}_i B_2 - f \right)} + \sum_{j=3}^m \frac{1}{1 - (-1)^i \frac{mp^2}{4t} (2j-1) \left(\tilde{y}_i - f \right)} \right], \tag{84}$$

где деформация пакета принимает все значения в интервале

$$(-1)^{i+1} \tilde{y}_{mi}^* \leq (-1)^{i+1} \tilde{y}_i \leq (-1)^{i+1} \tilde{y}_i^*.$$

Отметим, что при чётных $i=2, 4, 6, \dots$ соотношения (54) ... (84) будут описывать разгрузочные процессы, а при нечётных – нагрузочные.

Например, при $i=1$ соотношение (84) совпадает с соотношением (19), описывающем силу, действующую на пакет при первом нагружении.

При $i=2$, определяя R_{ri-1}^* из (74) и учитывая, что $j=m$ и $R_{si-1}^*=0$, из соотношений (54) ... (84) найдём ранее полученные соотношения, описывающие первую разгрузку, а при $i=3$ – соотношения, описывающие первую повторную нагрузку.

$$A_{12} = 1 - \frac{mp^2}{4t} (2k-1) \left[\tilde{y}_{k-1,i}^* + (-1)^{i+1} \tilde{y}_{k-1,i}^* - f \right].$$

Подставив (82) и (83) в (81), найдём силу в конце k -го этапа i -й загрузки.

При достижении на $j+1$ -м этапе i -й загрузки ($1 \leq j \leq m$) состояния, когда $y_{j+1} = y_{i-2}^*$, дальнейшее нагружение пакета при сохранении знака приращения деформации будет происходить по последнему этапу $i-2$ -й загрузки.

В случае, когда на $i-1$ -й загрузке проскользнули все гофры ($j=m$), в соотношениях (77), (78), (81) следует принять $R_{si-1}^*=0$ и подставить в них $j=m$.

На последнем этапе i -й загрузки в этом случае пакет деформируется при всех подвижных концевых сечениях полётов. Сила, действующая на пакет на последнем этапе i -й загрузки, запишется в виде:

Библиографический список

1. Кондрашов, Н.С. Упруго-фрикционные характеристики демпферов с гофрированными лентами [Текст] / Н.С. Кондрашов // Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов. – Вып. 51. Куйбышев: КуАИ, 1972. – С.45-62.
2. Эскин, И.Д. Циклическое сжатие многослойного однопролетного пакета. [Текст] / И.Д. Эскин, Р.И. Алкеев, В.И. Иващенко // Вестник Самар. гос. аэрокос. ун-та. – 2012. – Вып. 3 (34), Ч. 2. – С.97-106.
3. Эскин, И.Д. Упрощенная модель циклического сжатия многослойного многопролетного гофрированного пакета. Экспериментальное и расчетное исследование. [Текст] / И.Д. Эскин, Р.И. Алкеев, В.И. Иващенко // Вестник Самар. гос. аэрокос. ун-та. – 2013. – №1.

CYCLIC COMPRESSION OF A MULTILAYER MULTISPAN LAMINATED PACKAGE OF CORRUGATED SHEETS

©2013 I. D. Eskin, R. I. Alkeev, V. I. Ivashchenko

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov
(National Research University)

The task on cyclic compression of a multilayer multispans package of corrugated sheets is solved by the Bubnov-Galerkin method taking into account the rotation of the package sections located at the vertices of corrugations. The relations describing any loading processes in the field of elastic - hysteresis loops of the package are obtained.

Multilayer multispans package of corrugated sheets, cyclic compression, Bubnov–Galerkin method.

Информация об авторах

Эскин Изольд Давидович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: eskinid_33@mail.ru. Область научных интересов: конструкционное демпфирование, динамика и прочность.

Алкеев Руслан Иванович, старший преподаватель кафедры инженерной графики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: ruruslan@hotmail.ru. Область научных интересов: конструкционное демпфирование, динамика и прочность.

Ивашченко Владимир Иванович, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой инженерной графики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: ivashch@yandex.ru. Область научных интересов: конструкционное демпфирование, динамика и прочность.

Eskin Izold Davidovich, candidate of technical science, senior researcher, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: eskinid_33@mail.ru. Area of research: structural damping, dynamics and strength.

Alkeev Ruslan Ivanovich, assistant of the engineering drawing department, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: ruruslan@hotmail.ru. Area of research: structural damping, dynamics and strength.

Ivashchenko Vladimir Ivanovich, candidate of technical science; associate professor, head of the engineering drawing department, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: ivashch@yandex.ru. Area of research: structural damping, dynamics and strength.