

УДК 531.36+629.7.01

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УГЛОМ АТАКИ ГИПЕРЗВУКОВОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА ЭТАПЕ РАЗГОНА–НАБОРА ВЫСОТЫ В АТМОСФЕРЕ

© 2013 А. А. Бебяков

Ульяновское конструкторское бюро приборостроения

Приведено решение задачи оптимального управления углом атаки гиперзвукового летательного аппарата (ГЛА) двойного применения из условия минимума расхода топлива. С использованием формализма принципа максимума Понтрягина определены оптимальные программы управления и траектории ГЛА. Показано, что оптимальное управление должно обеспечивать в сверхзвуковом диапазоне скоростей снижение силы лобового сопротивления ГЛА, а в гиперзвуковом для значений конечного угла наклона траектории более  $10^\circ$  – рикошет от плотных слоёв атмосферы.

*Гиперзвуковой летательный аппарат, воздушно-реактивный двигатель, минимальный расход топлива, принцип максимума Понтрягина, начальные приближения сопряжённых переменных, краевая задача, оптимальная программа управления, рикошет.*

### Введение

Сегодня, наряду с основными проблемами создания ГЛА в сферах двигателестроения, аэродинамики и конструкции, не менее актуальной остаётся проблема оптимизации траекторий движения ГЛА на этапе разгона-набора высоты в атмосфере. Основные трудности, возникающие при исследовании задач оптимального управления в общей постановке, связаны с проблемой поиска начальных приближений сопряжённых переменных при решении краевой задачи [1]. Поэтому общепринятым при определении функций оптимального управления движением ГЛА является подход, основанный на выборе оптимальных профилей полёта, исходя из конструкционных возможностей объекта управления, а также с целью максимизации эффективных характеристик комбинированной силовой установки [2, 3, 4]. Очевидно, что основным недостатком такого подхода является сужение класса траекторий, на которых определяется экстремум выбранного критерия эффективности, например, массы топлива, расходуемого на разгон-набор высоты.

Целью работы является исследование оптимальных программ управления углом атаки и соответствующих опти-

мальных траекторий движения гиперзвукового летательного аппарата с воздушно-реактивным двигателем (ВРД). Для достижения поставленной цели решена задача оптимального управления углом атаки в общей постановке. В процессе решения определены аналитические зависимости сопряжённых переменных от фазовых координат состояния объекта управления и угла атаки. Проведён анализ результатов решения, в процессе которого выявлены характерные особенности оптимального движения ГЛА.

### 1. Постановка задачи

В качестве объекта управления рассматривается ГЛА двойного применения с максимальным числом Маха, равным 6, и с возможностью использования в качестве гиперзвукового маршевого самолёта (ГМС) и гиперзвукового самолёта-разгонщика (ГСР) в составе двухступенчатой авиационно-космической системы [3].

Для математической постановки задачи определяются следующие уравнения и соотношения.

1. Функционал (критерий оптимизации):

$$m = m(t_k) - m(t_n), \quad (1)$$

где  $m$  – масса ГЛА;  $t_n, t_k$  – моменты времени начала и окончания движения, соответственно.

2. Ограничения на управление:

$$a_{\min} \leq a(t) \leq a_{\max}. \quad (2)$$

3. Уравнения невозмущённого движения центра масс ГЛА в вертикальной плоскости для малых углов атаки [5]:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{rR_0}{2m}(2-a^2) - C_{xa} \frac{rV^2}{2m} S - g_0 \sin q, \\ \dot{q} = \frac{1}{V} \left( \frac{rR_0 a}{m} + C_{ya} \frac{rV^2}{2m} S - g_0 \cos q \right) + \frac{V \cos q}{R_3 + h}, \\ \dot{h} = V \sin q, \\ \dot{r} = -b_c. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $V$  [м/с] – скорость,  $q$  [рад/с] – угол наклона траектории,  $h$  [м] – высота полёта,  $M$  – число Маха;  $r$  – относительная тяга ВРД,  $R_0$  [Н] – тяга на старте,  $b_c$  [кг/с] – секундный расход топлива;  $a$

[рад] – угол атаки,  $C_{xa}$  – коэффициент силы лобового сопротивления;  $C_{ya}$  – коэффициент подъёмной силы,  $S$  [м<sup>2</sup>] – характерная площадь ГЛА;  $r$  [кг/м<sup>3</sup>] и  $a$  [м/с] – соответственно плотность атмосферы и скорость звука, аналитические зависимости которых принимаются согласно [2];  $g_0$  [м/с<sup>2</sup>] и  $R_3$  [м] – соответственно ускорение свободного падения и радиус Земли. Аэродинамические характеристики ГЛА (коэффициенты  $C_{xa}$  и  $C_{ya}$ ) определяются согласно [3].

Секундный расход топлива определяется в виде:

$$b_c(M, h) = b_0 r(M, h) / j_{y0}(M, h),$$

где  $b_0$  [кг/с] – секундный расход топлива на старте,  $j_{y0}$  – относительный удельный импульс.

Таблица 1. Зависимость  $j_{y0}(M, h)$

$M \backslash h, \text{ м}$	0	0,7	0,9	1,1	1,4	1,6	1,9	2,4	2,8	3,7	4,7	5,4	6
0	1	0,98	1	1,08	1,18	1,24	1,26	1,24	1,22	1,16	1,08	1,02	0,96
5000	1,04	1,02	1,04	1,12	1,22	1,28	1,3	1,28	1,26	1,2	1,12	1,06	1
10000	1,06	1,04	1,06	1,14	1,24	1,3	1,32	1,3	1,28	1,22	1,14	1,08	1,02
15000	1,06	1,04	1,06	1,14	1,24	1,3	1,32	1,3	1,28	1,22	1,14	1,08	1,02
20000	1,06	1,04	1,06	1,14	1,24	1,3	1,32	1,3	1,28	1,22	1,14	1,08	1,02
25000	1,05	1,03	1,05	1,13	1,23	1,29	1,31	1,29	1,27	1,21	1,13	1,07	1,01
30000	1,04	1,02	1,04	1,12	1,22	1,28	1,3	1,28	1,26	1,2	1,12	1,06	1
35000	1,01	0,99	1,01	1,09	1,19	1,25	1,27	1,25	1,23	1,27	1,09	1,03	0,97
40000	0,98	0,96	0,98	1,06	1,16	1,22	1,24	1,22	1,2	1,14	1,06	1	0,94

Высотно-скоростные характеристики (ВСХ) двигателя задаются в виде аналитической зависимости относительной тяги от числа Маха и высоты полёта, которая принимается на основе анализа графической зависимости тяги от скоростного напора из [2]:

$$r = 0,01706M^2 - 0,1254M + 1,365 + 2(ra^2M^2 \cdot 10^{-6} - 0,2),$$

а также табличной зависимости относительного удельного импульса от числа Маха и высоты полёта, которая принимается в виде табл. 1 на основе анализа графической зависимости удельного импульса от скорости полёта ГЛА, приведённой в [3].

4. Граничные условия движения:

$$\begin{aligned} t=t_n: V=M_n \cdot a(h_n), \theta=\theta_n, h=h_n, m=m_n, \\ t=t_k: V=M_k \cdot a(h_k), \theta=\theta_k, h=h_k, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $M_n, M_k, q_n, q_k, h_n, h_k, m_n$  – заданные числа.

В результате получим следующую постановку задачи оптимального управления: требуется определить программу управления углом атаки  $a(t)$  с заданными ограничениями (2) для системы дифференциальных уравнений (3) с граничными условиями (4), доставляющую минимум функционалу (1).

$$\begin{aligned} H = y_v \left[ \frac{rR_0}{2m} (2 - a^2) - C_{xa} \frac{rV^2}{2m} S - g_0 \sin q \right] + \\ + y_q \left[ \frac{1}{V} \left( \frac{rR_0 a}{m} + C_{ya} \frac{rV^2}{2m} S - g_0 \cos q \right) + \frac{V \cos q}{R_3 + h} \right] + y_h V \sin q - y_m b_c, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $y_v, y_q, y_h, y_m$  – сопряжённые переменные, соответствующие фазовым координатам системы (3).

2. Система дифференциальных уравнений для сопряжённых координат:

## 2. Метод решения

В качестве метода решения поставленной задачи применяется формализм принципа максимума Понтрягина [6]. Указанный метод используют в задачах оптимального управления, в которых существует возможность выхода функции управления на границу области допустимых значений. Так как рассматриваемый тип объекта управления с  $M_{\max}=6$  предполагает движение на высотах свыше 20000-30000 м, то выход функции управления (угла атаки) на границу, задаваемую неравенством (2), вполне возможен. Поэтому использование указанного метода, который, тем не менее, является достаточно сложным для применения на практике (в задачах проектирования реальных прототипов ГЛА), представляется необходимым. Основные трудности при использовании указанного метода определения оптимальных программ и траекторий связаны с поиском начальных приближений переменных, сопряжённых фазовым координатам состояния объекта управления, при решении соответствующей краевой задачи.

1. Для постановки краевой задачи определим следующие уравнения и соотношения.

Функция Гамильтона:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \dot{y}_v &= -y_v \left[ \frac{\partial r}{\partial M} \cdot \frac{2-a^2}{2ma} \cdot R_0 - \left( \frac{\partial C_{xa}}{\partial M} \cdot \frac{V}{2a} + C_{xa} \right) \frac{rV}{m} S \right] + \\
 &+ y_q \left[ \left( \frac{ra}{V} - \frac{\partial r}{\partial M} \right) \frac{aR_0}{Vma} - \left( \frac{\partial C_{ya}}{\partial M} \cdot \frac{V}{a} + C_{ya} \right) \frac{rS}{2m} - \frac{\cos q}{R_3+h} - \frac{g_0 \cos q}{V^2} \right] - \\
 &- y_h \sin q + y_m \frac{\partial b_c}{\partial M} \cdot \frac{1}{a}, \\
 \dot{y}_q &= g_0 y_v \cos q + y_q \left( \frac{V}{R_3+h} - \frac{g_0}{V} \right) \sin q - y_h V \cos q, \\
 \dot{y}_h &= -y_v \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial h} - \frac{\partial r}{\partial M} \cdot \frac{\partial a}{\partial h} \cdot \frac{V}{a^2} \right) \frac{2-a^2}{2m} \cdot R_0 + \right. \\
 &+ \left. \left( \frac{\partial C_{xa}}{\partial M} \cdot \frac{\partial a}{\partial h} \cdot \frac{rV}{a^2} - C_{xa} \frac{\partial r}{\partial h} \right) \frac{V^2 S}{2m} \right] - y_q \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial h} - \frac{\partial r}{\partial M} \cdot \frac{\partial a}{\partial h} \cdot \frac{V}{a^2} \right) \frac{a}{Vm} \cdot R_0 - \right. \\
 &- \left. \left( \frac{\partial C_{ya}}{\partial M} \cdot \frac{\partial a}{\partial h} \cdot \frac{rV}{a^2} - C_{ya} \frac{\partial r}{\partial h} \right) \frac{VS}{2m} - \frac{V \cos q}{(R_3+h)^2} \right] + y_m \left( \frac{\partial b_c}{\partial h} - \frac{\partial b_c}{\partial M} \cdot \frac{\partial a}{\partial h} \cdot \frac{V}{a^2} \right) \\
 \dot{y}_m &= \frac{y_v}{2m^2} [(2-a^2)rR_0 - C_{xa} rV^2 S] + \frac{y_q}{2Vm^2} [2arR_0 + C_{ya} rV^2 S]
 \end{aligned} \right. \quad (6)$$

3. Граничное условие для системы

(6):

$$y_{mk} = 1 \quad (7)$$

получено с помощью граничных условий

(3) из условия трансверсальности вида

$$[y_v dV + y_q dq + y_h dh + (y_m - 1) + H dt]_n^k = 0. \quad (8)$$

4. Функция управления углом атаки [5]:

$$a = \frac{y_q [2rR_0 + C_{ya1} rV^2 S] - y_v C_{xa1} rV^2 S}{2y_v [rR_0 + C_{xa2} rV^2 S]} \quad (9)$$

получена из необходимого условия максимума функции Гамильтона:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial a} &= -y_v \left( \frac{rR_0}{2m} a + \frac{\partial C_{xa}}{\partial a} \frac{rV^2}{2m} S \right) + \\
 &+ \frac{y_q}{V} \left( \frac{rR_0}{m} + \frac{\partial C_{ya}}{\partial a} \frac{rV^2}{2m} S \right) = 0
 \end{aligned} \quad (10)$$

и зависимостей коэффициентов силы лобового сопротивления и подъёмной силы, определяемых в виде [5]:

$$\begin{aligned}
 C_{xa} &= C_{xa0}(M) + C_{xa1}(M)a + C_{xa2}(M)a^2, \\
 C_{ya} &= C_{ya0}(M) + C_{ya1}(M)a.
 \end{aligned}$$

В результате рассматриваемая задача оптимального управления сводится к следующей четырёхпараметрической краевой задаче: требуется найти решение совокупной системы уравнений (3), (6), замкнутой соотношением (9), которое удовлетворяет граничным условиям (4), (7).

Параметрами краевой задачи являются значения сопряжённых переменных в начальный момент времени:

$$y_{vn}, y_{qn}, y_{hn}, y_{mn}.$$

### 3. Определение начальных приближений параметров краевой задачи

Согласно [5]  $y_{mn} \in [0,9;1]$ , а сопряжённые переменные  $y_q$  и  $y_h$  выражаются через значения фазовых координат и угла атаки, а также координат  $y_v$  и  $y_m$  в виде:

$$y_q = y_v \frac{2rR_0 a + (C_{xa1} + 2C_{xa2} arV^2 S)}{2rR_0 + C_{ya1} rV^2 S}; \quad (11)$$

$$y_h = \frac{b y_m}{V \sin q} - \frac{y_v}{V \sin q} \left\{ \left[ \frac{rR_0}{2m} (2 - a^2) - C_{xa} \frac{rV^2}{2m} - g_0 \sin q \right] + \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{V} \left( \frac{rR_0}{m} a - C_{ya} \frac{rV^2}{2m} S - g_0 \cos q \right) + \frac{V \cos q}{R_3 + h} \right] \frac{2rR_0 a + (C_{xa1} + 2C_{xa2} arV^2 S)}{2rR_0 + C_{ya1} rV^2 S} \right\}. \quad (12)$$

Для определения значения  $y_v$  используем интеграл совокупной системы уравнений (3), (6) вида

$$\left( \frac{\partial H}{\partial a}, H \right) = 0, \quad (13)$$

который определяется с помощью операции «скобки Пуассона» над интегралом (10) и гамильтонианом  $H$  [7].

Подставляя в (13) выражения (5) и (10), получим

$$(f_1 + f_2) y_v + f_3 y_q + f_4 y_h + f_5 y_m = 0, \quad (14)$$

$$\text{где } f_1 = \left[ \frac{\partial R}{\partial M} \cdot \frac{2 - a^2}{2ma} - \left( \frac{\partial C_{xa}}{\partial M} \cdot \frac{V}{2a} + C_{xa} \right) \frac{rV}{m} S \right] \left[ \frac{R}{m} a + (2C_{xa2} a + C_{xa1}) \frac{rV^2}{2m} S \right] + \\ + \frac{g_0 \cos q}{V} \left( \frac{R}{m} + C_{ya1} \frac{rV^2}{2m} S \right) - \left[ \frac{rR_0}{2m} (2 - a^2) - C_{xa} \frac{rV^2}{2m} S - g_0 \sin q \right] \times \\ \times \left\{ \frac{\partial R}{\partial M} \cdot \frac{a}{ma} + \left[ \left( 2 \cdot \frac{\partial C_{xa2}}{\partial M} a + \frac{\partial C_{xa1}}{\partial M} \right) \cdot \frac{V}{2a} + 2C_{xa2} a + C_{xa1} \right] \frac{rV}{m} S \right\} + \\ + \left\{ \left[ \left( 2 \frac{\partial C_{xa2}}{\partial M} a + \frac{\partial C_{xa1}}{\partial M} \right) \cdot \frac{\partial a}{\partial h} \cdot \frac{rV}{a^2} - (2C_{xa2} a + C_{xa1}) \frac{\partial r}{\partial h} \right] \frac{V^2}{2m} S - \left( \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{\partial R}{\partial M} \cdot \frac{\partial a}{\partial h} \cdot \frac{V}{a^2} \right) \frac{a}{m} \right\} \times \\ \times V \sin q - \frac{b_c}{m^2} \left[ Ra + (2C_{xa2} a + C_{xa1}) \frac{rV^2 S}{2} \right];$$

$$f_2 = -\frac{1}{m} (R + C_{xa2} rV^2 S);$$

$$f_3 = -\left[ \frac{R}{m} a + (2C_{xa2} a + C_{xa1}) \frac{rV^2}{2m} S \right] \times \\ \times \left[ \left( \frac{Ra}{V} - \frac{\partial R}{\partial M} \right) \frac{a}{Vma} - \left( \frac{\partial C_{ya}}{\partial M} \cdot \frac{V}{a} + C_{ya} \right) \frac{rS}{2m} - \frac{\cos q}{R_3 + h} - \frac{g_0 \cos q}{V^2} \right] + \\ + \frac{1}{V} \left( \frac{R}{m} + C_{ya1} \frac{rV^2}{2m} S \right) \left( \frac{V}{R_3 + h} - \frac{g_0}{V} \right) \sin q - \left[ \frac{rR_0}{2m} (2 - a^2) - C_{xa} \frac{rV^2}{2m} S - g_0 \sin q \right] \times$$

$$\times \left[ \left( \frac{Ra}{V} - \frac{\partial R}{\partial M} \right) \frac{1}{Vma} - \left( \frac{\partial C_{ya1}}{\partial M} \cdot \frac{V}{a} + C_{ya1} \right) \frac{rS}{2m} \right] + \frac{b_c}{2Vm^2} [2R + C_{ya1} rV^2 S] +$$

$$+ \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial h} - \frac{\partial R}{\partial M} \cdot \frac{\partial a}{\partial h} \cdot \frac{V}{a^2} \right) \frac{1}{Vm} - \left( \frac{\partial C_{ya1}}{\partial M} \cdot \frac{\partial a}{\partial h} \cdot \frac{rV}{a^2} - C_{ya1} \frac{\partial r}{\partial h} \right) \frac{VS}{2m} \right] V \sin q;$$

$$f_4 = \left[ \frac{R}{m} a + (2C_{xa2} a + C_{xa1}) \frac{rV^2}{2m} S \right] \sin q - \left( \frac{R}{m} + C_{ya1} \frac{rV^2}{2m} S \right) \cos q;$$

$$f_5 = - \left[ \frac{R}{m} a + (2C_{xa2} a + C_{xa1}) \frac{rV^2}{2m} S \right] \cdot \frac{\partial b_c}{\partial M} \cdot \frac{1}{a}.$$

Подставляя в (14) выражения (11) и (12), получим

$$\left\langle f_1 + f_2 \mathfrak{A} + \frac{2rR_0 a + (C_{xa1} + 2C_{xa2} arV^2 S)}{2rR_0 + C_{ya1} rV^2 S} f_3 - \right.$$

$$- \frac{f_4}{V \sin q} \left[ \left[ \frac{rR_0}{2m} (2 - a^2) - C_{xa} \frac{rV^2}{2m} S - g_0 \sin q \right] + \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{1}{V} \left( \frac{rR_0}{m} a + C_{ya} \frac{rV^2}{2m} S - g_0 \cos q \right) + \frac{V \cos q}{R_3 + h} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{2rR_0 a + (C_{xa1} + 2C_{xa2} arV^2 S)}{2rR_0 + C_{ya1} rV^2 S} \right\rangle y_v + \left( \frac{f_4 b_c}{V \sin q} + f_5 \right) y_m = 0.$$

Выразим из последнего уравнения значение  $y_v$ :

$$y_v = -y_m \left( \frac{f_4 b_c}{V \sin q} + f_5 \right) \left\langle f_1 + f_2 \mathfrak{A} + \frac{2rR_0 a + (C_{xa1} + 2C_{xa2} arV^2 S)}{2rR_0 + C_{ya1} rV^2 S} f_3 - \right.$$

$$- \frac{f_4}{V \sin q} \left[ \left[ \frac{rR_0}{2m} (2 - a^2) - C_{xa} \frac{rV^2}{2m} S - g_0 \sin q \right] + \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{1}{V} \left( \frac{rR_0}{m} a + C_{ya} \frac{rV^2}{2m} S - g_0 \cos q \right) + \frac{V \cos q}{R_3 + h} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{2rR_0 a + (C_{xa1} + 2C_{xa2} arV^2 S)}{2rR_0 + C_{ya1} rV^2 S} \right\rangle^{-1}. \quad (15)$$

Соотношения (11), (12) и (15) определяют зависимости сопряжённых переменных  $y_v, y_q, y_h$  от фазовых координат, угла атаки, производной угла атаки по времени и сопряжённой координаты  $y_m$ . С учётом (3) в начальный момент времени в указанных соотношениях неизвестными являются три параметра:  $a_n, \mathfrak{A}_n$  и  $y_{mn}$ ,

первые два из которых имеют ясный физический смысл, а для третьего определён диапазон изменения.

Таким образом, исходная четырёхпараметрическая краевая задача сведена к трёхпараметрической с параметрами  $a_n, \mathfrak{A}_n$  и  $y_{mn}$ .

#### 4. Определение оптимальных программ управления и траекторий

Начальные условия движения объекта управления определяются положением ГЛА на типовой траектории в начале сверхзвукового участка, т.е. на линии максимального скоростного напора при  $M = 1,8...2$  и  $h = 10000...12000$  м [4]. Для удобства в последующих расчётах примем:

$$\begin{aligned} M_n &= 2, \quad q_n = 11^0, \quad h_n = 11000 \text{ м,} \\ m_n &= 290000 \text{ кг.} \end{aligned} \quad (16)$$

Указанные значения соответствуют скоростному напору  $q = 64$  кПа.

В конце траектории разгона-набора высоты рассматриваемый тип ГЛА по скорости и высоте полёта достигает значений  $M_k = 6$  и  $h_k = 30000$  м соответственно.

Значения конечного угла наклона траектории  $q_k$  выбираются из ряда значений  $0, 5^0, 10^0, 15^0...$  до значения, при котором обеспечивается сходимость краевой задачи в области допустимых значений фазовых координат  $N_{дон}$ , которая имеет вид:

$$N_{дон} : \begin{cases} V(t) - 6a(h(t)) \leq 0, \\ \left| q(t) - \frac{p}{2} \right| \leq 0, \\ h(t) - 40000 \leq 0, \\ h(t) \geq 0. \end{cases}$$

Были приняты следующие значения величин, используемых при моделировании движения:

$$\begin{aligned} a_{\min} &= -2^0, \quad a_{\max} = 10^0; \quad S = 890 [\text{м}^2]; \\ g_0 &= 9,81 [\text{м/с}^2], \quad R_3 = 635676 [\text{м}], \\ b_0 &= 72,5 [\text{кг/с}]. \end{aligned}$$

В качестве начального приближения параметров краевой задачи  $[a_n, \alpha_n, y_{mn}]^T$  принимается вектор-столбец  $[0; 0; 0,975]^T$ . Подстановка данных значений в формулы (11), (12) и (15) после вычислений даёт:

$$\begin{aligned} y_{v_n} &= 9,1951; \quad y_{q_n} = 370,12; \\ y_{h_n} &= 0,14623; \quad y_{m_n} = 0,975. \end{aligned} \quad (17)$$

Результаты решения задачи Коши для системы уравнений (3) и (6) с начальными условиями (16) и (17), а также при незначительных изменениях параметров  $[a_n, \alpha_n, y_{mn}]^T$  приведены в табл. 2.

Численное интегрирование проводится методом Рунге–Кутты четвёртого порядка. В качестве условия окончания интегрирования используется условие (7). Шаг интегрирования  $\Delta t = 0,1$  с.

Таблица 2. Результаты решения задачи Коши

№ п/п	$a_n$ , градус	$\alpha_n$ , град/с	$y_{mn}$	$\tilde{M}_k$	$\tilde{q}_k$ , градус	$\tilde{h}_k$ , м
1	0	0	0,975	2,837	14,822	37776
2	-0,01	0	0,975	2,836	14,934	37758
3	0,1	0	0,975	2,84	14,665	37817
4	0	-0,001	0,975	2,841	14,792	37718
5	0	0,001	0,975	2,834	14,807	37857
6	0	0	0,974	2,9	12,614	38823
7	0	0	0,976	2,785	16,888	36649

Для решения краевой задачи используем метод Ньютона. Матрица Якоби, рассчитанная по данным табл. 2, имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} \partial M_{\kappa} / \partial a_n & \partial M_{\kappa} / \partial \alpha_n & \partial M_{\kappa} / \partial y_{mn} \\ \partial q_{\kappa} / \partial a_n & \partial q_{\kappa} / \partial \alpha_n & \partial M_{\kappa} / \partial y_{mn} \\ \partial h_{\kappa} / \partial a_n & \partial h_{\kappa} / \partial \alpha_n & \partial M_{\kappa} / \partial y_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,662 & -270,95 & -67,206 \\ -518,76 & 2947,6 & 2278,6 \\ -40040 & 2685852 & -1006604 \end{pmatrix}$$

Определим невязки – разности между конечными значениями фазовых координат, полученными из решения задачи Коши (табл. 2, строка 1), и конечными условиями при  $q_{\kappa} = 0$ :

$$\begin{aligned} \Delta M_{\kappa} &= M_{\kappa} - \tilde{M}_{\kappa}^{(1)} \approx 6 - 2,8 = 3,2; \\ \Delta q_{\kappa} &= q_{\kappa} - \tilde{q}_{\kappa}^{(1)} \approx 0 - 15 = -15^0; \\ \Delta h_{\kappa} &= h_{\kappa} - \tilde{h}_{\kappa}^{(1)} \approx 30000 - 38000 = 8000 \text{ м.} \end{aligned}$$

Полученные значения невязок по абсолютной величине в 5-10 раз меньше соответствующих значений элементов матрицы Якоби, полученных выше, за исключением значения элемента  $\partial M_{\kappa} / \partial a_n = 6,662$ , который больше невязки  $\Delta M_{\kappa}$  в три раза. Следовательно, на сходимость краевой задачи существенно может повлиять только величина  $\Delta M_{\kappa}$ . Поэтому решение краевой задачи будем проводить посредством последовательных приближений по параметру  $M_{\kappa}$ . Примем в качестве максимального значения невязки 5% от интервала изменения числа  $M$ . Тогда

$$\Delta M_{\kappa(\max)} = \frac{M_{\kappa} - M_n}{20} = \frac{6 - 2}{20} = 0,2.$$

Конечные условия для приближённого решения задачи с номером  $i$  определим в виде:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\kappa}^{(i)} &= \hat{M}_{\kappa}^{(0)} + i \Delta M_{\kappa(\max)}; \quad \hat{q}_{\kappa}^{(i)} = q_{\kappa}; \\ \hat{h}_{\kappa}^{(i)} &= h_{\kappa}, \quad i = \overline{1, i_{\max}}, \end{aligned}$$

где  $\hat{M}_{\kappa}^{(0)} = \tilde{M}_{\kappa}^{(1)} \approx 2,8$  – значение параметра, полученное из решения задачи Коши (табл. 2);

$$i_{\max} = \frac{M_{\kappa} - \hat{M}_{\kappa}^{(0)}}{\Delta M_{\kappa(\max)}} = \frac{6 - 2,8}{0,2} = 16 \quad \text{– количество}$$

требуемых приближённых решений краевой задачи.

Условие сходимости решения краевой задачи на итерации с номером  $n$  имеет вид:

$$\begin{aligned} & \left( |M_{\kappa}^{(n)} - \tilde{M}_{\kappa}^{(i)}| \leq 0,1 \right) \cap \left( |q_{\kappa}^{(n)} - q_{\kappa}| \leq \frac{P}{180} \right) \cap \\ & \cap \left( |h_{\kappa}^{(n)} - h_{\kappa}| \leq 100 \text{ м} \right) \end{aligned}$$

Итерационные процессы решения краевой задачи для  $q_{\kappa} = 0$  и  $q_{\kappa} = 24^0$  изображены на рис. 1 и рис. 2 соответственно.

Решения краевых задач для конечных углов наклона траектории более  $24^0$  получить не удалось, так как соответствующая траектория  $V(t)$ , получаемая из решения задачи Коши, выходит в этом случае за границы области допустимых значений  $N_{\text{дон}}$ .

Результаты решения краевых задач приведены на рис. 3 для оптимальных программ управления углом атаки и на рис. 4 для оптимальных фазовых траекторий движения в координатах  $h, M$ .

Дополнительно к оптимальным траекториям на рис. 4 построена линия максимально допустимого скоростного напора  $q_{\max} = 64$  кПа.



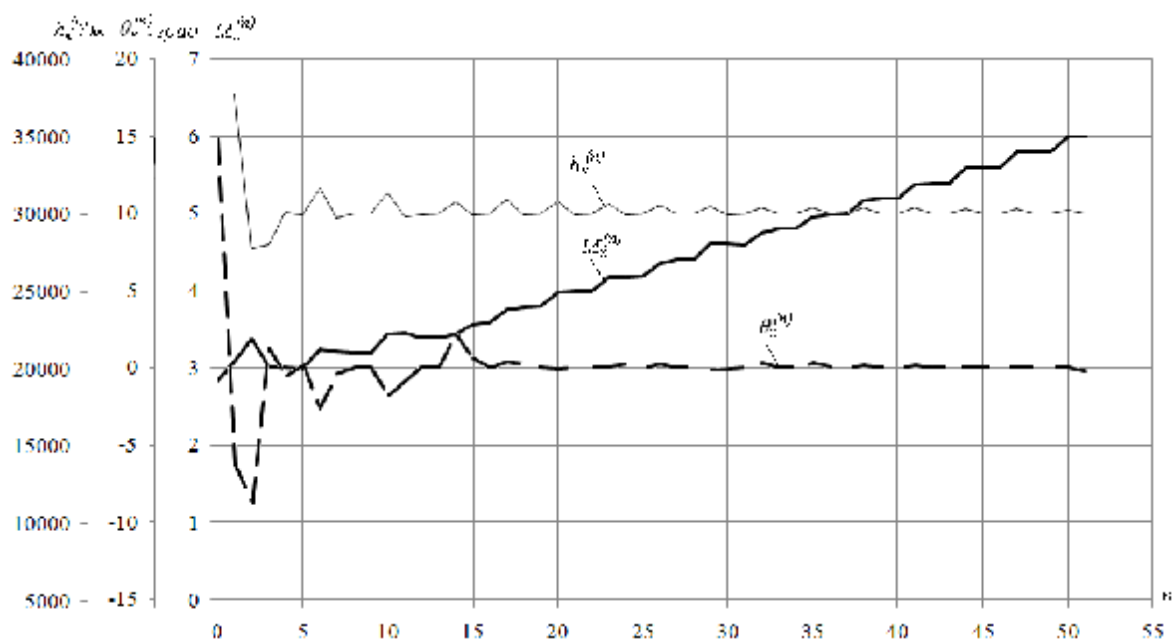


Рис. 1. Итерационные процессы сходимости краевой задачи при  $q_k = 0$

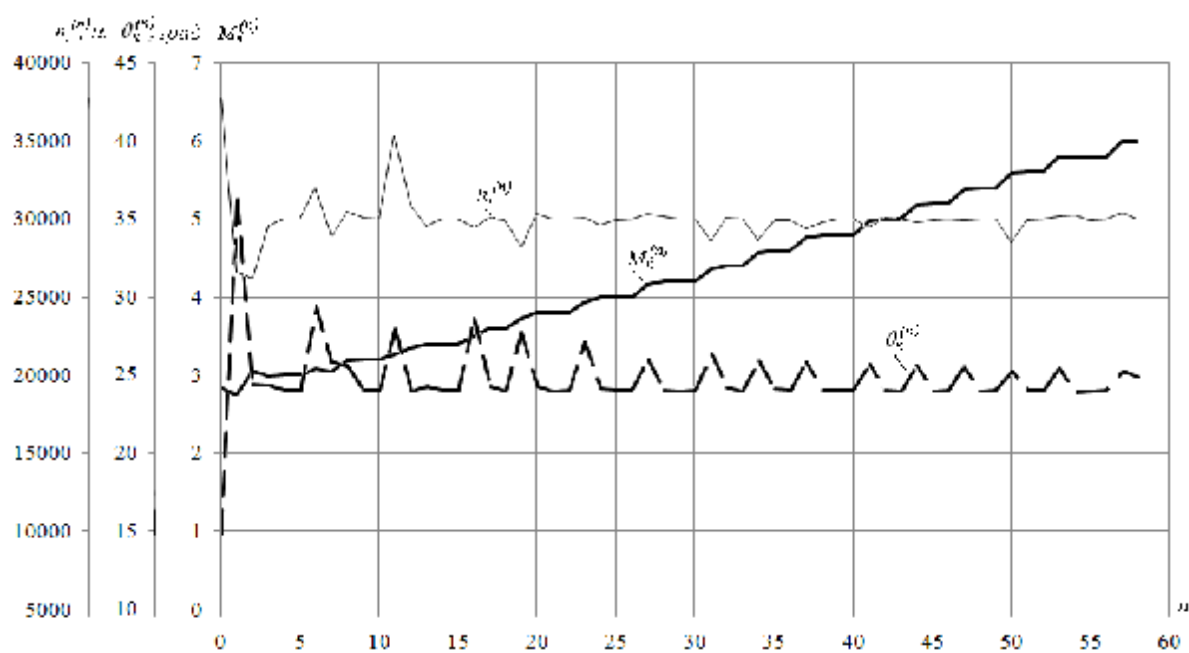


Рис. 2. Итерационные процессы сходимости краевой задачи при  $\theta_k = 24^{\circ}$

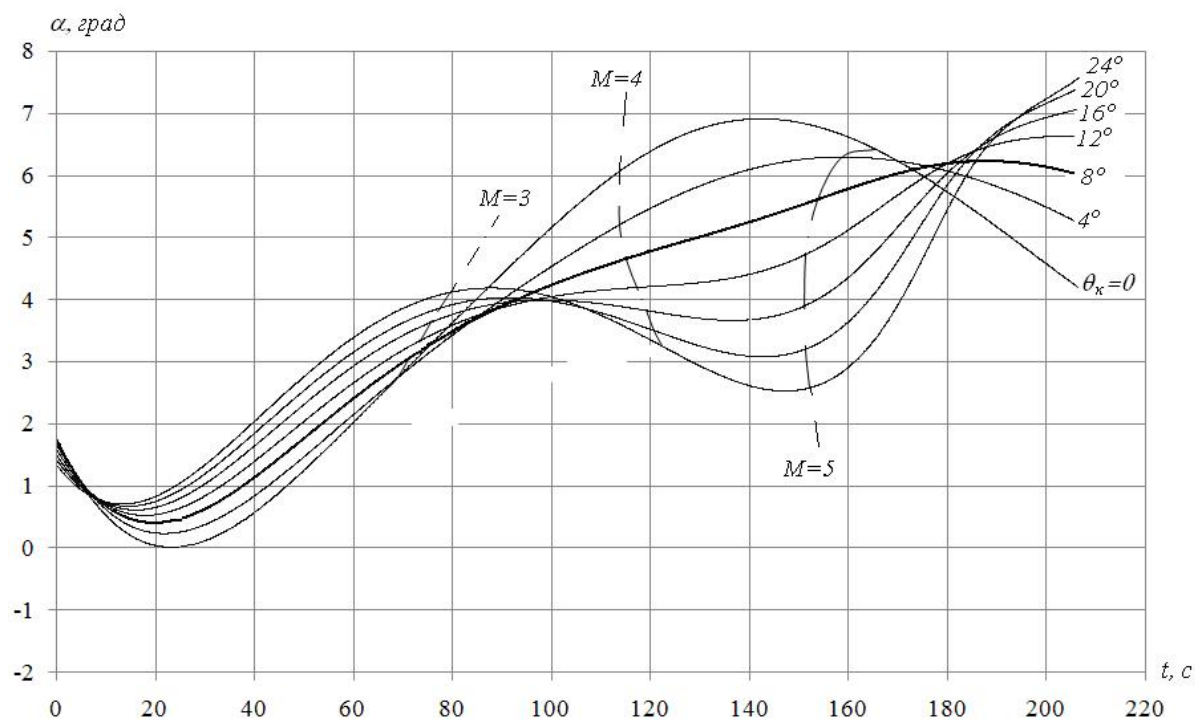


Рис. 3. Оптимальные программы управления углом атаки ГЛА

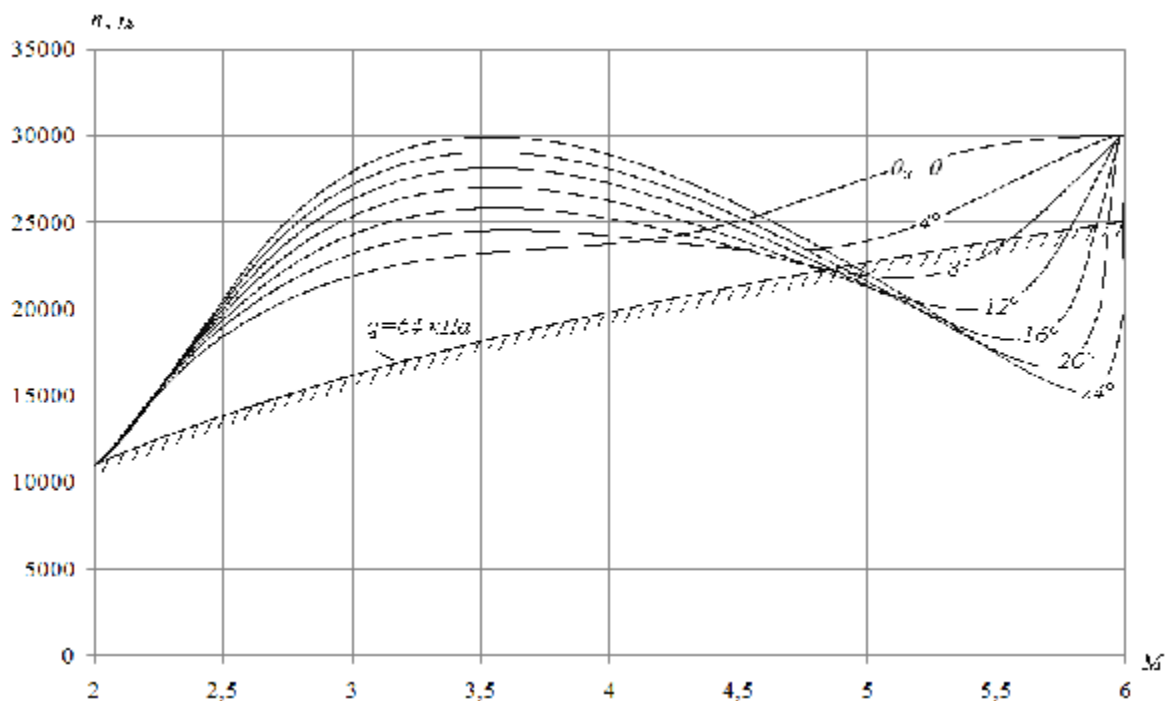


Рис. 4. Оптимальные траектории ГЛА

## 5. Анализ полученных результатов

Анализ кривых, приведённых на рис. 3, позволяет выделить следующие характерные особенности оптимального управления углом атаки ГЛА:

1) первые несколько секунд (от 10 до 25 для различных значений конечного угла наклона траектории) угол атаки снижается;

2) при конечном угле наклона траектории в  $8^0$  программа управления углом атаки, начиная с 20-й секунды, имеет характер монотонно-возрастающей функции от значения, близкого к нулевому, до значения в  $6^0$  (на рис. 3 указанная программа, которую далее будем называть опорной, выделена полужирной линией);

3) при конечных углах наклона траектории менее  $8^0$  происходят колебания угла атаки относительно опорной программы с максимальным значением при  $M \approx 4,5...4,7$ ;

4) при конечных углах наклона траектории более  $8^0$  происходят колебания угла атаки относительно опорной программы с максимальным значением при  $M \approx 3,5$  и минимальным значением при  $M \approx 4,8...5$  (т.е. в противофазе с колебаниями для конечных углов наклона траектории, меньших  $8^0$ ).

При скоростях движения  $M < 2,5$ , пока объект управления находится на высотах тропопаузы ( $11000 \leq h \leq 20000$  м согласно рис. 4), угол атаки (рис. 3) принимает малые значения (менее  $2^0$ ). При этом в самом начале тропопаузы (до высот примерно 12000-14000 м согласно рис. 4) угол атаки уменьшается от значения, близкого к  $2^0$ , до значения, близкого к нулевому (рис. 3), что обеспечивает снижение как силы лобового сопротивления, так и подъёмной силы. В общем случае снизить лобовое сопротивление возможно как уменьшением, так и увеличением угла атаки. Во втором случае происходит рост подъёмной силы, а значит, и набор высоты, в результате которого уменьшается плотность атмосферы, а значит, и лобовое

сопротивление. Так как при этом происходит увеличение угла наклона траектории, то вариант с увеличением угла атаки в большей степени выгоден при малых значениях  $q$  (менее  $5^0$ ). В рассматриваемом случае  $q_n = 11^0$ , и поэтому реализуется вариант с уменьшением угла атаки.

В менее плотных слоях атмосферы ( $15000 < h \leq 30000$  м) влияние лобового сопротивления ослабевает, а потенциальная энергия ГЛА выше, и поэтому разгон может осуществляться без снижения угла атаки. В результате обеспечивается рост угла атаки, т.е. увеличение подъёмной силы.

Наличие колебаний угла атаки относительно опорной программы объясняется особенностями объекта управления, которые математически выражаются в значениях конечного угла наклона траектории.

Для ГМС значение конечного угла наклона траектории равно нулю. Поэтому угол атаки в конце участка разгона – набора высоты уменьшается (кривая для  $q_k = 0$  на рис.3).

Для ГСР значения  $\theta_k$  близки к предельному ( $q_{\max} = 35^0$  [3]), так как в дальнейшем разгон-набор высоты полезной нагрузки требуется осуществлять с использованием ракетной ступени. Поэтому для увеличения конечного угла наклона траектории необходимо использовать все возможности аэродинамической схемы ГСР. В результате угол атаки в конце участка возрастает (кривые для  $q_k = 16^0, 20^0$  и  $24^0$  на рис. 3). Кроме того, меняется характер интенсивности возрастания угла атаки – максимальная интенсивность роста достигается теперь в гиперзвуковом диапазоне скоростей, а не в сверхзвуковом, как в случае малых углов ( $q_k < 8^0$ , рис. 3), что приводит к явлению рикошета. В результате оптимальный разгон-набор высоты ГСР реализуется по траектории, носящей колебательный характер изменения высоты и скорости относительно линии  $q_{\max}$  (рис. 4, кривые для

$q_k \geq 8^0$ ), что полностью объясняется особенностями оптимального управления, выявленными выше.

Сначала с незначительным разгоном (до  $M \approx 3$ ) происходит набор высоты ГСР, более интенсивный по сравнению с линией  $q_{\max}$  (до высот  $h \approx 25000...30000$  м), за счёт чего обеспечивается более интенсивное снижение силы лобового сопротивления. Затем происходит разгон до гиперзвуковой скорости ( $M \approx 5...5,5$ ) с незначительным уменьшением высоты, так как влияние лобового сопротивления на данном этапе ослабевает, а потенциальная энергия ГСР увеличена (разгон обеспечивается с использованием не только реактивных, но и потенциальных сил). На завершающем этапе влияние лобового сопротивления вновь усиливается. Дополнительно усиливается влияние на разгон ГСР силы тяжести, так как требуется максимизировать конечный угол наклона траектории. Поэтому за счёт максимизации интенсивности роста угла атаки (подъёмной силы) происходит стремительный набор высоты практически без разгона (рикошет), что приводит к снижению лобового сопротивления, компенсирующему возрастающее влияние силы тяжести.

### Заключение

Проведённое исследование оптимальных программ управления углом атаки и соответствующих оптимальных траекторий разгона-набора высоты ГЛА позволяет сделать следующие выводы:

1) оптимальное управление углом атаки ГЛА при его движении в плотных слоях атмосферы должно обеспечивать, в первую очередь, снижение влияния силы лобового сопротивления;

2) оптимальные траектории движения ГСР имеют рикошетирующий характер;

3) в гиперзвуковом диапазоне скоростей может нарушаться ограничение на

скоростной напор (рис. 4), и поэтому требуется решение задачи оптимального управления углом атаки ГЛА с ограничениями на фазовый вектор.

### Библиографический список

1. Остославский, И.В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов [Текст] / И.В. Остославский, И.В. Стражева. – М.: Машиностроение, 1969.

2. Бузулук, В.И. Оптимизация траекторий движения аэрокосмических летательных аппаратов [Текст] / В.И. Бузулук – М., 2008.

3. Нечаев, Ю.Н. Силовые установки гиперзвуковых и воздушно-космических летательных аппаратов. [Текст] / Ю.Н. Нечаев – М.: Изд. Академии космонавтики им. К.Э. Циолковского, 1996.

4. Нечаев, Ю.Н. Моделирование условий работы пароводородного РТД в составе силовой установки гиперзвукового летательного аппарата [Текст] / Ю.Н. Нечаев, А.С. Полев, А.В. Никулин // Вестник академии космонавтики: направление фундаментальных и прикладных проблем космонавтики. Материалы научных докладов на заседаниях направления в 1996–1997 гг. – М.: Издание Академии космонавтики им. К.Э. Циолковского, 1998. – С. 159–191.

5. Бебяков, А.А. Задача оптимального управления движением гиперзвукового летательного аппарата на этапе разгона-набора высоты [Текст] / А.А. Бебяков // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. – 2007. - №1. – С. 15-21.

6. Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко – М.: Наука, 1983.

7. Летов, А.М. Динамика полёта и управление [Текст] / А.М. Летов. – М.: Наука, 1969.

## OPTIMAL CONTROL OF THE ANGLE OF ATTACK OF A HYPERSONIC FLIGHT VEHICLE

© 2013 A. A. Bebyakov

Ulyanovsk Instrument Engineering Design Bureau, Ulyanovsk city

The paper presents the solution of the task of optimal control of the angle of attack of a hypersonic flight vehicle (HFV) with minimum fuel consumption. Optimal control programs and flight paths of HFV are determined using the method called «Pontryagin's maximum principle». Optimal control of the angle of attack is expected to provide minimization of the HFV drag force in the supersonic speed range and the recoil from the dense atmosphere in the hypersonic speed range for the terminal flight path angle of over ten degrees.

*Hypersonic flight vehicle, propulsion jet engine, minimum fuel consumption, Pontryagin's maximum principle, initial estimate of conjugate variables, boundary problem, optimal control program, recoil.*

### Информация об авторе

**Бебяков Александр Александрович**, ведущий инженер-исследователь, ОАО «Ульяновское конструкторское бюро приборостроения». E-mail: [nio16@ukbp.ru](mailto:nio16@ukbp.ru). Область научных интересов: теория оптимального управления, динамика полёта, инерциальные системы навигации авиационного и наземного применения.

**Bebyakov Alexander Alexandrovich**, system engineer, «Ulyanovsk Instrument Engineering Design Bureau» plc. E-mail: [nio16@ukbp.ru](mailto:nio16@ukbp.ru). Area of research: optimal control theory, flight dynamics, inertial air and ground navigation systems.