

УДК 535.42

## ФОРМИРОВАНИЕ СВЕТОВЫХ ШАРОВ НА ОСНОВЕ ВСТРЕЧНОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ ОСТРОСФОКУСИРОВАННЫХ ПУЧКОВ С РАЗЛИЧНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

© 2013 С. Н. Хонина, А. В. Устинов

Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Рассмотрено формирование сферических распределений интенсивности на основе встречной интерференции острогофокусированных вихревых пучков с различной поляризацией. Формирование трёхмерных распределений осуществляется простым способом с помощью оптимизации ширины и положения одной кольцевой диафрагмы. Для узкой диафрагмы оптимальные параметры вычисляются аналитически, а для широкой диафрагмы – дополнительно численно корректируются. Показано, что в зависимости от поляризации, порядка вихревой сингулярности и дополнительного фазового набег в одном из пучков можно формировать как цельные, так и полые световые шары субволнового радиуса, состоящие из различных компонентов электрического поля.

*Острая фокусировка, встречная интерференция, трёхмерное субволновое распределение интенсивности, поляризация, вихревая фазовая функция.*

### Введение

Формирование заданных трёхмерных распределений интенсивности острогофокусированного лазерного излучения актуально в задачах оптического захвата и манипулирования, микроскопии и записи данных [1-3]. Для уменьшения поперечного размера фокального пятна используется острая фокусировка с использованием высокоапертурных объективов. Однако продольный размер фокального пятна  $\Delta z \approx l n / NA^2$  ( $l$  - длина волны,  $n$  – показатель преломления среды,  $NA$  – числовая апертура фокусирующей системы) даже в предельном случае оказывается в два раза больше поперечного  $\Delta r \approx l / (2NA)$ .

Трёхмерный анализ формируемых полей значительно упрощается, когда вклад одного из компонентов электрического поля значительно превышает остальные. Добиться такого фактически скалярного режима можно различными способами. В частности, для радиальной поляризации наложение узкой кольцевой диафрагмы [4], пропускающей в основном периферийные лучи, или дополнение линзы аксиконом [5] максимизирует вклад продольного компонента. Однако в обоих

случаях ещё больше уменьшается поперечный размер фокального пятна и увеличивается продольный размер.

Для решения этой проблемы были предложены различные способы, в большинстве своем основанные на эффекте интерференции [6-9]. Кроме того, в этом случае можно аннулировать вклад определённых компонентов в фокальной (или другой заданной) плоскости при использовании интерференции встречных пучков.

На данный момент разработано множество оптических схем, реализующих тот или иной тип интерференции встречных пучков. Среди них можно выделить несколько основных типов, использующих конфокальную линзовую систему или отражение от зеркала [8-10].

В каждом случае можно добиться избирательного сложения или вычитания соответствующих компонентов электромагнитного поля у встречных пучков в определённой плоскости за счёт фазовой модуляции [11, 12], выбора поляризации [13, 14] или специальных отражающих и преломляющих элементов [9, 15, 16].

### 1. Компонентный анализ остросфокусированного вихревого электрического поля

При острой фокусировке поле в фокальной плоскости:

$$\mathbf{E}(r, j, z) = -\frac{if}{l} \int_0^a \int_0^{2p} B(q, f) T(q) \times \mathbf{P}(q, f) \exp[ik(r \sin q \cos(f-j) + z \cos q)] \sin q dq df, \quad (1)$$

где  $(\rho, \phi, z)$  – цилиндрические координаты фокальной области;  $(\theta, \phi)$  – сфериче-

$$\mathbf{P}_d(q, f) = \begin{bmatrix} 1 + \cos^2 f (\cos q - 1) & \sin f \cos f (\cos q - 1) & \cos f \sin q \\ \sin f \cos f (\cos q - 1) & 1 + \sin^2 f (\cos q - 1) & \sin f \sin q \\ -\sin q \cos f & -\sin q \sin f & \cos q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_x(f) \\ c_y(f) \\ c_z(f) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Используя связь декартовых и цилиндрических проекций:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos f & \sin f & 0 \\ -\sin f & \cos f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}, \quad (3)$$

можно записать (2) для цилиндрических компонентов:

$$\mathbf{P}_c(q, f) = \begin{bmatrix} \cos f \cos q & -\sin f & \cos f \sin q \\ \sin f \cos q & \cos f & \sin f \sin q \\ -\sin q & 0 & \cos q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_r(f) \\ c_\phi(f) \\ c_z(f) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Представление (2) удобно для линейной поляризации, а (4) – для радиальной, азимутальной и круговой поляризации. В связи с поставленной задачей формирования в фокальной плоскости сферических распределений линейную поляризацию рассматривать не будем, т.к. при острой фокусировке она не обладает симметрией в поперечной плоскости.

Для вихревых полей:

$$B(q, f) = R(q) \exp(imf)$$

выражение (1) упрощается:

ские угловые координаты выходного зрачка фокусирующей системы;  $\alpha$  – максимальное значение азимутального угла, связанное с числовой апертурой системы;  $B(\theta, \phi)$  – функция пропускания;  $T(\theta)$  – функция аподизации зрачка (для апланатических систем  $T(\theta) = \sqrt{\cos \theta}$ );  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число;  $\lambda$  – длина волны;  $f$  – фокусное расстояние;  $\mathbf{P}(\theta, \phi)$  – матрица поляризации, которая для декартовых компонентов выглядит следующим образом:

$$\mathbf{E}_m(\rho, \phi, z) = -ikf \times \int_0^\alpha R(\theta) T(\theta) \mathbf{Q}_m(\rho, \phi, \theta) \sin \theta \exp(ikz \cos \theta) d\theta \quad (5)$$

Компоненты вектора  $\mathbf{Q}_m(\rho, \phi, \theta)$  зависят от поляризации  $\mathbf{c}(f)$  падающего пучка и представляют собой суперпозиции функций Бесселя различного порядка.

В частности, при использовании цилиндрических компонентов выражение вектора в (5) имеют следующий вид:

- для радиальной поляризации:

$$\mathbf{Q}_m^{rad,c}(\rho, \phi, \theta) = \frac{i^m e^{im\phi}}{2} \times \begin{bmatrix} i [J_{m+1}(k\rho \sin \theta) - J_{m-1}(k\rho \sin \theta)] \cos \theta \\ [J_{m+1}(k\rho \sin \theta) + J_{m-1}(k\rho \sin \theta)] \cos \theta \\ -2J_m(k\rho \sin \theta) \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (6)$$

- для азимутальной поляризации:

$$\mathbf{Q}_m^{az,c}(\rho, \phi, \theta) = -\frac{i^m e^{im\phi}}{2} \times \begin{bmatrix} J_{m+1}(k\rho \sin \theta) + J_{m-1}(k\rho \sin \theta) \\ -i [J_{m+1}(k\rho \sin \theta) - J_{m-1}(k\rho \sin \theta)] \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

- для круговой «±» поляризации:

$$Q_m^{circ\pm,c}(\rho, \varphi, \theta) = \frac{i^m e^{i(m\pm 1)\varphi}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} J_m(k\rho \sin \theta) - \frac{1}{2} [J_m(k\rho \sin \theta) - J_{m\pm 2}(k\rho \sin \theta)](1 - \cos \theta) \\ \pm i \left\{ J_m(k\rho \sin \theta) - \frac{1}{2} [J_m(k\rho \sin \theta) + J_{m\pm 2}(k\rho \sin \theta)](1 - \cos \theta) \right\} \\ m J_{m\pm 1}(k\rho \sin \theta) \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Представление (5) упрощает анализ трёхмерной структуры в фокальной области. Однако нужно иметь в виду, что для формирования в фокальной области сферического распределения (цельного шара или полый сферы) необходимо наличие на оптической оси ненулевой энергии (иначе распределение интенсивности будет незамкнуто вдоль оптической оси). Таким образом, для рассматриваемых типов поляризаций можно использовать фазовые вихревые функции не выше второго порядка  $|m| \leq 2$ .

### 2. Зеркальная интерференция встречных пучков

На данный момент разработано множество оптических схем, реализующих тот или иной тип интерференции встречных пучков. Среди них можно выделить несколько основных типов, использующих конфокальную линзовую систему или отражение от зеркала [8-10].

В работе [8] описана схема, позволяющая складывать поперечные компоненты двух полей и вычитать продольные компоненты. Если второе поле имеет фазовый сдвиг на  $\pi$ , то, наоборот, продольные компоненты будут складываться, а поперечные – вычитаться [9, 11, 12].

Интерференцию за счёт зеркального отражения (рис. 1) можно в общем виде представить в следующей записи:

$$\begin{aligned} E_{mr}^d(x, y, z) &= \\ &= E_1(x, y, z) + \exp(ib) E_2(x, y, z) = \quad (9) \\ &= \begin{pmatrix} E_{1x}(x, y, z) + e^{ib} E_{1x}(x, y, -z) \\ E_{1y}(x, y, z) + e^{ib} E_{1y}(x, y, -z) \\ E_{1z}(x, y, z) - e^{ib} E_{1z}(x, y, -z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При  $b=\pi$  знаки в выражении (9) меняются на противоположные.

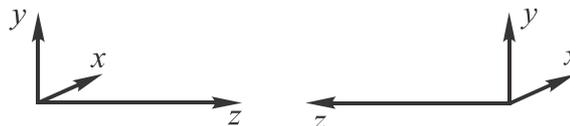


Рис. 1. Системы координат при интерференции встречных пучков за счёт зеркального отражения

Учитывая (3), выражение (9) для цилиндрических координат будет выглядеть аналогично. Для выражения (1) интерференция (9) в цилиндрических координатах принимает следующий вид (при  $b=0$ ):

$$\begin{aligned} E_{mr}^c(r, j, z) &= -\frac{2if}{I} \int_0^a \int_0^{2p} B(q, f) T(q) \times \\ &\times \begin{pmatrix} P_r(q, f) \cos(kz \cos q) \\ P_j(q, f) \cos(kz \cos q) \\ P_z(q, f) \sin(kz \cos q) \end{pmatrix} \times \quad (10) \\ &\times \exp[ikr \sin q \cos(f - j)] \sin q dq df, \end{aligned}$$

где компоненты вектора  $P_1(q, f)$  определяются в соответствии с (4).

При  $b=\pi$  в выражении (10) произойдёт взаимная замена деструктивной и конструктивной интерференции для различных компонентов электрического вектора.

Заметим, что (10) может быть приведено к виду (5), что облегчает расчёты и анализ. Далее проводится анализ интерференции (9) для выбранных типов поляризации при наличии в падающем пучке вихревой фазовой функции определённого порядка.

### 3. Интерференция осесимметричных пучков с различной поляризацией

Данный случай соответствует выражению (5) при  $m=0$  и является наиболее

привлекательным с практической точки зрения, т.к. в этом случае не требуется дополнительных оптических элементов для внесения вихревой фазы в освещающий пучок.

### 3.1. Радиальная поляризация

Для радиальной поляризации при  $m=0$  в интеграле (5) используется следующий вектор:

$$\mathbf{Q}_{m=0}^{rad,c}(\rho, \varphi, \theta) = \begin{bmatrix} iJ_1(k\rho \sin \theta) \cos \theta \\ 0 \\ -J_0(k\rho \sin \theta) \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (11)$$

При наложении узкой кольцевой диафрагмы, пропускающей через линзу только периферийные лучи, основной вклад в фокальную область вносит продольный компонент. Таким образом, в данном случае можно анализировать только распределение этого компонента:

$$E_{m=0,z}^{rad}(\rho, \varphi, z) = ikf \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} R(\theta) T(\theta) \times \exp(ikz \cos \theta) J_0(k\rho \sin \theta) \sin^2 \theta d\theta. \quad (12)$$

Далее примем, что  $T(\theta) = \sqrt{\cos \theta}$ ,  $R(\theta) = 1$ .

Чтобы получить определённое 3D распределение, нужно согласовать распределение (12) в различных направлениях.

Поперечное распределение в фокальной плоскости ( $z=0$ ) приближённо определяется следующим образом:

$$E_{m=0,z}^{rad}(\rho) = ikf \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} J_0(k\rho \sin \theta) \sqrt{\cos \theta} \sin^2 \theta d\theta \approx \quad (13)$$

$$\approx ikf (\alpha_2 - \alpha_1) \sqrt{\cos \alpha_c} \sin^2(\alpha_c) J_0(k\rho \sin \alpha_c),$$

где  $\alpha_c = (\alpha_2 + \alpha_1)/2$ .

Продольное распределение на оптической оси ( $\rho=0$ ) также можно приближённо оценить выражением:

$$E_z(z) = ikf \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \exp(ikz \cos \theta) \sqrt{\cos \theta} \sin^2 \theta d\theta \approx \quad (14)$$

$$\approx \frac{f}{z} \sqrt{\cos \alpha_c} \sin(\alpha_c) [\exp(ikz \cos \alpha_1) - \exp(ikz \cos \alpha_2)].$$

Определим нулевое значение амплитуды в поперечном и продольном направлениях:

$$\rho_{0,z} = \frac{2,4}{k \sin \alpha_c}, \quad (15)$$

$$z_0 = \frac{\pi}{k \sin \alpha_c \sin(\Delta/2)}, \quad (16)$$

где  $\Delta = \alpha_2 - \alpha_1$ .

Сравнивая выражения (15) и (16), приходим к выводу, что поперечный размер всегда меньше продольного, поэтому с использованием одного узкого кольца получить шаровидное распределение невозможно.

Чтобы сузить продольную протяжённость фокуса, можно использовать интерференцию встречных пучков. Поперечные компоненты в рассматриваемом случае имеют мало энергии. Поэтому для формирования шара нужно следить, чтобы складывались продольные компоненты. Для этого можно использовать любую из схем (9) или (10) при  $b=\pi$ . Тогда продольное распределение  $z$ -компонента изменится следующим образом:

$$E_{m=0,z}^{rad}(z) = ikf \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos(kz \cos \theta) \sqrt{\cos \theta} \sin^2 \theta d\theta \approx \quad (17)$$

$$\approx ikf \Delta \sqrt{\cos \alpha_c} \sin^2(\alpha_c) \cos(kz \cos \alpha_c)$$

и вместо (16) получим

$$z_0 = \frac{\pi}{2k \cos \alpha_c}. \quad (18)$$

Приравнивая (15) и (18), получаем условие расположения центра узкой кольцевой апертуры, обеспечивающее формирование в фокальной плоскости светового шара:

$$\tan \alpha_c = 1,53 \Rightarrow \alpha_c = 56,8^\circ. \quad (19)$$

Для фокусирующей линзы с  $R=100\lambda$  и  $f = 101\lambda$  угол (19) соответствует радиусу:

$$r_c = f \sin \alpha_c \approx 83\lambda. \quad (20)$$

На рис. 2 приведены распределения интенсивности при радиальной поляризации падающего пучка в фокальной плоскости (рис. 2, а) и вдоль оптической оси (рис. 2, б) в случае расположения узкой кольцевой диафрагмы размером  $\Delta=\lambda$  по

радиусу (20) и использовании схемы (9) при  $b=\pi$ . Как видно из рис. 2, б, вдоль оптической оси формируется целая цепочка световых шаров субволнового радиуса  $\rho_{ball} = 0,44\lambda$ .

Заметим, что в этом случае в связи с узостью кольцевой апертуры интенсивность в каждом из световых шаров очень мала. Однако выкладки, приведённые выше, можно приближённо применить и для более широких кольцевых диафрагм.

На рис. 2, в, г приведены результаты в случае расположения кольцевой диафрагмы размером  $\Delta=10\lambda$  по радиусу согласно (20).

Из рис. 2, г видно, что количество ярких световых шаров на оптической оси уменьшается. Этот факт невозможно предсказать, используя формулу (17). Поэтому используем более точное по сравнению с (17) выражение для осевой интенсивности:

$$E_{m=0,z}^{rad}(z) \approx \frac{if}{z} \sqrt{\cos \alpha_c} \sin \alpha_c [\sin(kz \cos \alpha_1) - \sin(kz \cos \alpha_2)] = \frac{2if}{z} \sqrt{\cos \alpha_c} \sin \alpha_c \cos(kz \cos \alpha_c \cos(\Delta/2)) \sin(kz \cos \alpha_c \sin(\Delta/2)). \tag{21}$$

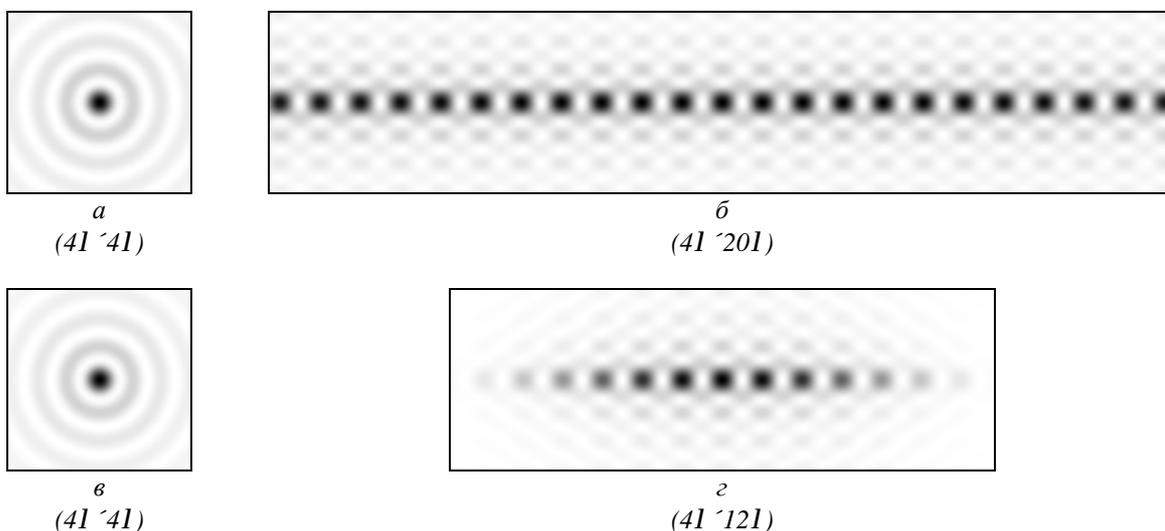


Рис. 2. Распределение интенсивности при радиальной поляризации в фокальной плоскости (а, в) и вдоль оптической оси (б, г) при увеличении размеров кольцевой диафрагмы, расположенной на оптимальном радиусе  $r_c = 83\lambda$ :  $D=1$  (а, б),  $D=10I$  (в, г)

Из выражения (21) получается нулевое значение амплитуды в продольном направлении:

$$z_0 = \frac{\pi}{2k \cos \alpha_c \cos(\Delta/2)}. \tag{22}$$

Приравнявая (15) и (22), получаем условие на два параметра – ширину и расположение центра кольцевой апертуры, обеспечивающее формирование в фокальной плоскости светового шара:

$$\tan \alpha_c = 1,53 \cos(\Delta/2). \tag{23}$$

Задавая один из параметров, можно из соотношения (23) получить другой. На

рис. 3, а показана зависимость значения  $\alpha_c$  от ширины кольцевой апертуры  $\Delta$ , а на рис. 3, б показано значение верхней границы кольцевой апертуры  $\alpha_c + \Delta/2$ .

Из рис. 3 следует, что при использовании полной апертуры ( $\Delta = 90^\circ$ ) формирование сферического распределения невозможно, т.к. в этом случае для выполнения условия (23) верхняя граница кольцевой апертуры  $\alpha_c + \Delta/2 > 90^\circ$  (рис. 3, б). Максимально возможная ширина кольцевой апертуры, определяемая из выражения (23):

$$\Delta_{\max} = 81,7^\circ; \alpha_{c,\max} = 49^\circ. \tag{24}$$

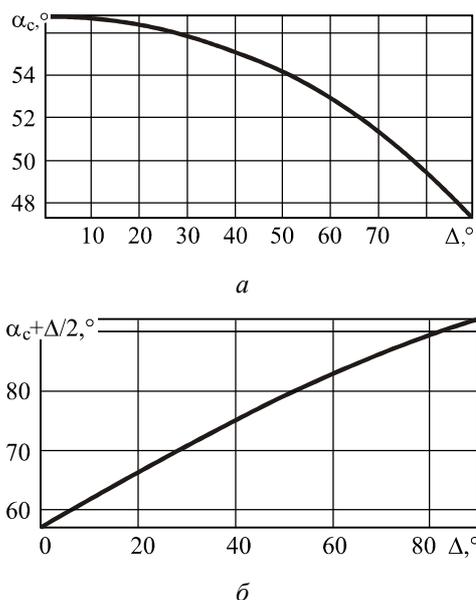


Рис. 3. Графическое решение уравнения (23): а - зависимость значения  $\alpha_c$  от ширины кольцевой апертуры  $D$ ; б - значение верхней границы кольцевой апертуры  $\alpha_c + \Delta/2$

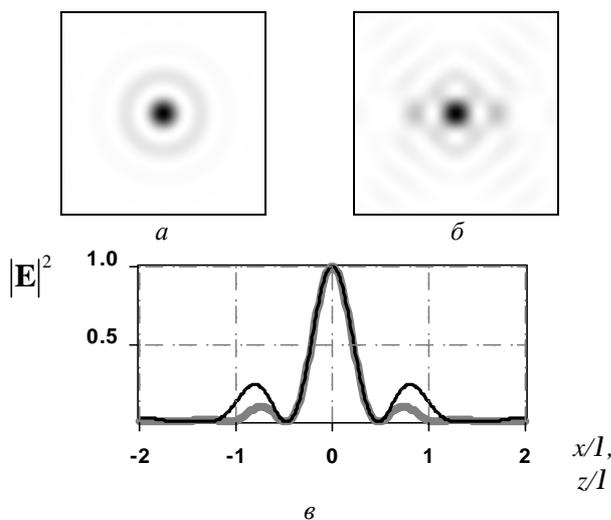


Рис. 4. Распределение интенсивности при радиальной поляризации для  $D=55l, r_c = 72,5\lambda$  (интерференция (9) при  $b=p$ ): а - поперечное распределение в фокусе  $E(x, y, 0)$  (41 ~ 41); б - продольное распределение в фокальной области  $E(x, 0, z)$  (41 ~ 41); в - сечение в фокальной плоскости по оси  $x$  (серая линия)  $FWHM(x)=0,44l$  и вдоль оптической оси (чёрная линия)  $FWHM(z)=0,44l$

Нужно отметить, что выражения (21)-(24) были получены для не слишком широких кольцевых диафрагм ( $\Delta < 20^\circ$ ). Для широких диафрагм оптимальные раз-

меры, обеспечивающие эффективное формирование сферических распределений, подбирались численно.

На рис. 4 приведены результаты формирования светового шара субволнового радиуса  $\rho_{ball} = 0,44\lambda$  с высокой эффективностью за счёт использования широкой кольцевой диафрагмы  $\Delta=55\lambda$  с центральным радиусом  $r_c = 72,5\lambda$  ( $\alpha_c = 46^\circ$ ).

С учётом того, что в численных расчётах  $\alpha_{2,\max} = 82^\circ$ , положение центра апертуры оказалось близким к предсказанному согласно (23) и приведённому в (24).

Сформированный световой шар (рис. 4) полностью состоит из продольного компонента электрического поля и окружён небольшим по энергии распределением из поперечных компонентов.

### 3.2. Азимутальная поляризация

Для азимутальной поляризации при  $m=0$  в интеграле (5) используется следующий вектор:

$$Q_{m=0}^{az,c}(\rho, \varphi, \theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ iJ_1(k\rho \sin \theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

из которого видно, что вдоль оптической оси не имеется энергии и поэтому сформировать сферическое распределение невозможно.

Однако такое распределение удобно для формирования протяжённых цилиндрических распределений [17].

### 3.3. Круговая поляризация

В этом случае энергия продольного компонента невелика по сравнению с поперечными компонентами. Чтобы получить световой шар, нужно суммировать поперечные компоненты, т.е. использовать интерференцию (9) при  $b=0$ .

В случае узкой кольцевой апертуры первый ноль в продольном распределении будет таким же, как в (18).

Для круговой «±» поляризации при  $m=0$  в интеграле (5) используется следующий вектор:

$$Q_{m=0}^{circ\pm,c}(\rho, \varphi, \theta) = \frac{e^{\pm i\varphi}}{\sqrt{2}} \left[ \begin{array}{c} J_0(k\rho \sin \theta) - \frac{1}{2} [J_0(k\rho \sin \theta) - J_{\pm 2}(k\rho \sin \theta)](1 - \cos \theta) \\ \pm i \left\{ J_0(k\rho \sin \theta) - \frac{1}{2} [J_0(k\rho \sin \theta) + J_{\pm 2}(k\rho \sin \theta)](1 - \cos \theta) \right\} \\ m J_{\pm 1}(k\rho \sin \theta) \sin \theta \end{array} \right]. \quad (26)$$

Зависимость радиального и азимутального компонентов в (26) от радиуса можно переписать следующим образом:

$$0,5 [J_0(t)(\cos \theta + 1) + J_{\pm 2}(t)(1 - \cos \theta)],$$

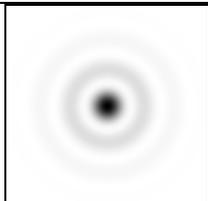
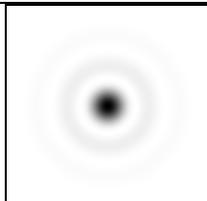
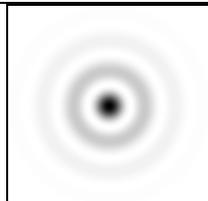
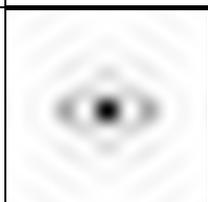
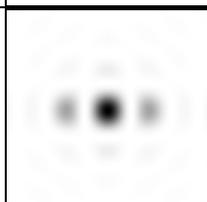
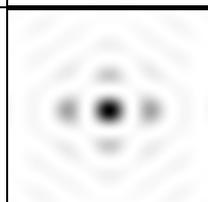
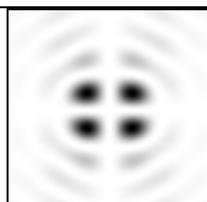
$$0,5 [J_0(t)(\cos \theta + 1) - J_{\pm 2}(t)(1 - \cos \theta)].$$

Отсюда видно, что азимутальный компонент соответствует в фокальной плоскости световому пятну меньшего размера. Поэтому будем анализировать именно его:

$$E_{m=0,\varphi}^{circ\pm}(\rho) = \pm \frac{kf}{\sqrt{2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left\{ J_0(k\rho \sin \theta) + \frac{1}{2} [J_0(k\rho \sin \theta) + J_{\pm 2}(k\rho \sin \theta)](\cos \theta - 1) \right\} \sqrt{\cos \theta} \sin \theta d\theta \approx$$

$$\approx \pm \frac{kf \Delta}{\sqrt{2}} \sqrt{\cos \alpha_c} \sin(\alpha_c) \left\{ J_0(k\rho \sin \alpha_c) + \frac{1}{2} [J_0(k\rho \sin \alpha_c) + J_{\pm 2}(k\rho \sin \alpha_c)](\cos(\alpha_c) - 1) \right\}. \quad (27)$$

Таблица 1. Распределение интенсивности при круговой «±» поляризации для кольцевой апертуры шириной Δ=40λ, с центральным радиусом r<sub>c</sub> = 80λ (интерференция (9) при b=0)

	$ \mathbf{E} ^2$	$ E_r ^2$	$ E_j ^2$	$ E_z ^2$
Поперечное распределение $\mathbf{E}(x, y, 0)$ 				
Продольное распределение $\mathbf{E}(x, 0, z)$ 				

Если пренебречь в (27) слагаемым, пропорциональным функции Бесселя второго порядка, то положение первого нуля ρ<sub>0</sub> будет как в (15).

В табл. 1 и на рис. 5 приведены результаты формирования светового шара субволнового радиуса ρ<sub>ball</sub> = 0,44λ с вы-

сокой эффективностью с использованием круговой поляризации. Оптимальные размеры кольцевой апертуры Δ=40λ, r<sub>c</sub> = 80λ были подобраны численно с целью согласования продольного и поперечного размера светового шара в общей интенсивности, а не в отдельных компонентах.

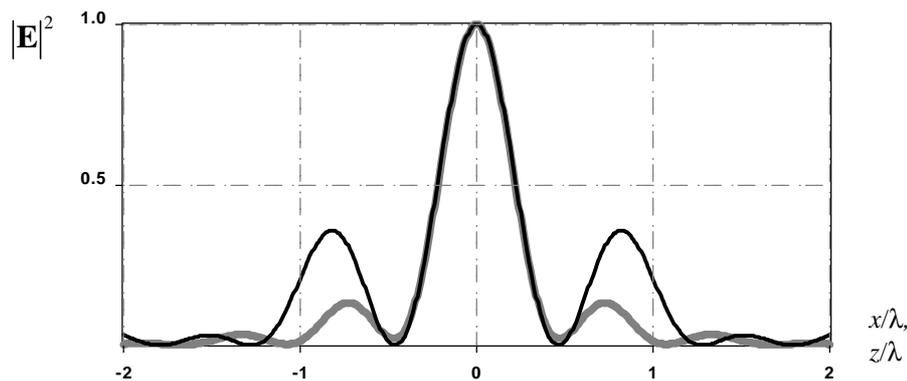


Рис. 5. Сечение общей нормированной интенсивности (интерференция (9) при  $b=0$ , круговая «±» поляризация без фазовых вихрей  $m=0$ ) в фокальной плоскости по радиусу (серая линия) и вдоль оптической оси (чёрная линия) для кольцевой апертуры шириной  $D=40\lambda$  с центральным радиусом  $r_c = 80\lambda$ :  $FWHM(x)=FWHM(z)=0,441$

Везде далее отсутствие распределения в некоторых ячейках таблиц означает отсутствие в данном компоненте световой энергии.

Как следует из полученных результатов, с помощью круговой поляризации можно сформировать световой шар того же размера, что и при использовании радиальной поляризации. При этом нужно отметить, что круговая поляризация проще в реализации, чем радиальная.

#### 4. Интерференция вихревых пучков с различной поляризацией

Рассмотрим выражение (5) при  $m=\pm 1$ , что соответствует внесению в пучок вихревой фазы. Это требует использования дополнительных оптических элементов, однако существенно расширяет возможности трёхмерного формирования.

##### 4.1. Радиальная поляризация

Для радиальной поляризации при наличии фазовой вихревой функции первого порядка  $m=\pm 1$  в интеграле (5) используется следующий вектор:

$$\mathbf{Q}_{m=\pm 1}^{rad,c}(\rho, \phi, \theta) = \frac{e^{\pm i\phi}}{2} \begin{bmatrix} [J_0(k\rho \sin \theta) - J_2(k\rho \sin \theta)] \cos \theta \\ \pm i [J_0(k\rho \sin \theta) + J_2(k\rho \sin \theta)] \cos \theta \\ -2iJ_1(k\rho \sin \theta) \sin \theta \end{bmatrix} \quad (28)$$

Как следует из (28), интенсивность радиального компонента пропорциональна  $[J_0(t) - J_2(t)]^2$ , а азимутального -  $[J_0(t) + J_2(t)]^2$ . При использовании узкой кольцевой апертуры, учитывая, что:

$$J_{n+1}(t) = 2nJ_n(t)/t - J_{n-1}(t), \quad (29)$$

радиус первого нуля для азимутального компонента определяется корнем функции Бесселя первого порядка  $J_0(t) + J_2(t) = 2J_1(t)/t$  и равен:

$$\rho_{0,\phi} = \frac{3.83}{k \sin \alpha_c}. \quad (30)$$

Учитывая, что:

$$2J'_n(t) = J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t), \quad (31)$$

радиус первого нуля для радиального компонента определяется максимумом функции Бесселя первого порядка  $J_0(t) - J_2(t) = 2J'_1(t)$  и равен:

$$\rho_{0,r} = \frac{1.84}{k \sin \alpha_c}. \quad (32)$$

Сравнение выражений (30) и (32) показывает, что размер светового пятна для радиального компонента значительно меньше, чем для азимутального.

Чтобы получить световой шар наименьшего размера, нужно использовать интерференцию (9) при  $b=0$ . Тогда для радиального компонента будет формироваться световой шар малого размера:

$$\begin{aligned}
 E_{m=\pm 1,r}^{rad}(\rho) &= \\
 &= \pm e^{\pm i\varphi} \frac{kf}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [J_0(k\rho \sin \theta) - J_2(k\rho \sin \theta)] \times \\
 &\times \cos \theta \sqrt{\cos \theta} \sin \theta d\theta \approx \\
 &\approx \pm e^{\pm i\varphi} \frac{kf \Delta}{2} (\cos \alpha_c)^{3/2} \sin \alpha_c J_1'(k\rho \sin \alpha_c).
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Согласование выражений (32) и (18) в условиях узкой кольцевой апертуры позволяет определить её центральный радиус:

$$\begin{aligned}
 \tan \alpha_c &= 1,17 \Rightarrow \alpha_c = 49,5^\circ; \\
 r_c &= 76,8\lambda.
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Для более широкой апертуры согласование выполнялось численно, но оказалось достаточно близко к значению, предсказанному согласно (34). В табл. 2 и на рис. 6 приведены результаты формирования светового шара субволнового радиуса в радиальном компоненте  $\rho_{r,ball} = 0,38\lambda$  для вихревого пучка с радиальной поляризацией. Оптимальные размеры кольцевой апертуры  $\Delta = 50\lambda$ ,  $r_c = 75\lambda$  были подобраны численно с целью согласования продольного и поперечного размера светового шара в радиальном компоненте.

Таблица 2. Распределение интенсивности при радиальной поляризации с фазовым вихрем порядка  $m=1$  для кольцевой апертуры шириной  $\Delta=50\lambda$  с центральным радиусом  $r_c = 75\lambda$  (интерференция (9) при  $b=0$ )

	$ \mathbf{E} ^2$	$ E_r ^2$	$ E_j ^2$	$ E_z ^2$
Поперечное распределение $\mathbf{E}(x, y, 0)$ 				
Продольное распределение $\mathbf{E}(x, 0, z)$ 				

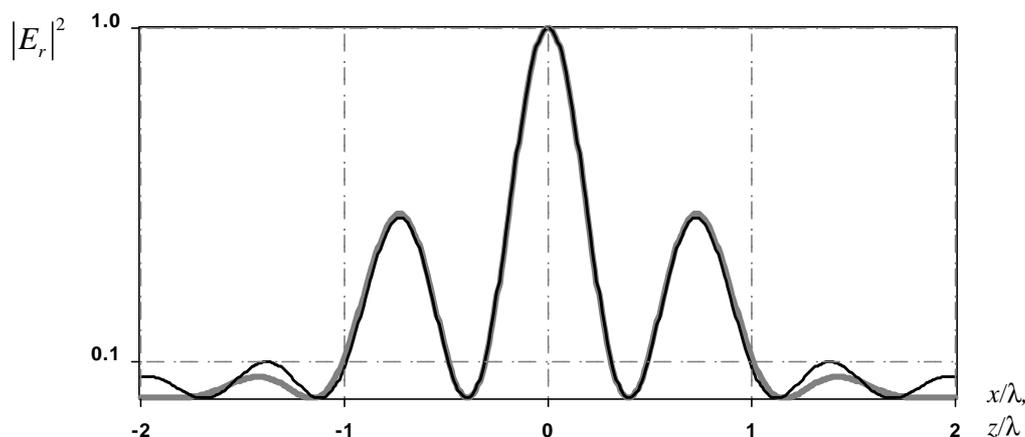
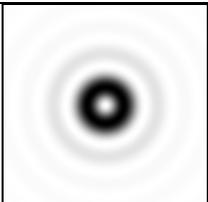
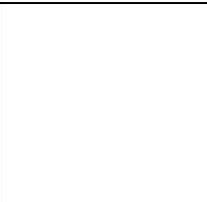
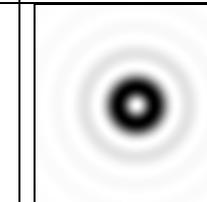
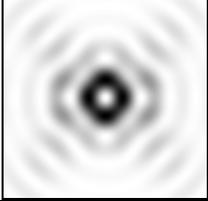
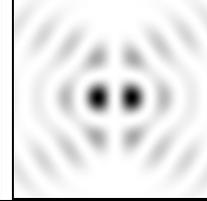
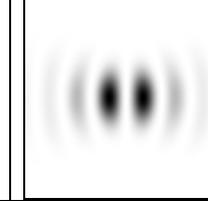
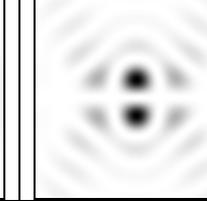


Рис. 6. Сечение нормированной интенсивности радиальной компоненты (интерференция (9) при  $b=0$ , радиальная поляризация с фазовым вихрем порядка  $m=1$ ) в фокальной плоскости по радиусу (серая линия) и вдоль оптической оси (чёрная линия) для кольцевой апертуры шириной  $D=50\lambda$  с центральным радиусом  $r_c = 75\lambda$ :  $FWHM(r)=FWHM(z)=0,38\lambda$

Таблица 3. Распределение интенсивности при радиальной поляризации с фазовым вихрем порядка  $m=1$  для кольцевой апертуры шириной  $\Delta=79\lambda$  с центральным радиусом  $r_c = 60,5\lambda$  (интерференция (9) при  $b=\pi$ )

	$ \mathbf{E} ^2$	$ E_r ^2$	$ E_j ^2$	$ E_z ^2$
Поперечное распределение $\mathbf{E}(x, y, 0)$ 				
Продольное распределение $\mathbf{E}(x, 0, z)$ 				

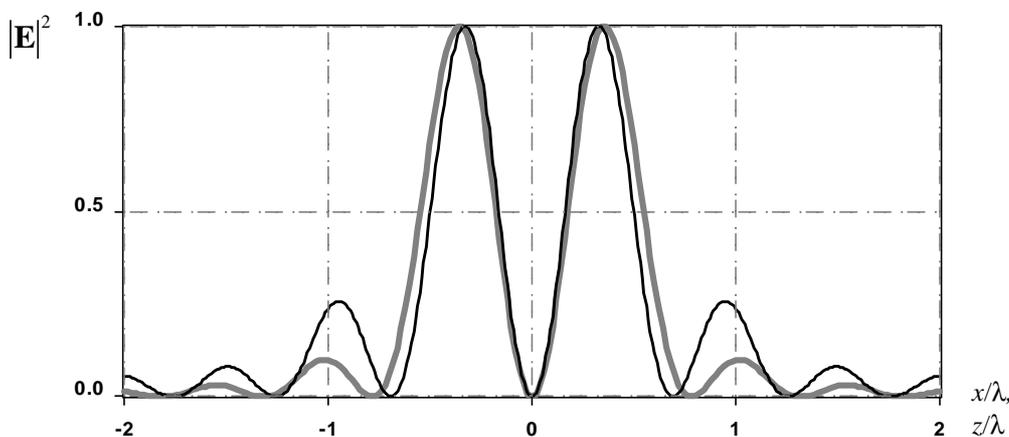


Рис. 7. Сечение нормированной общей интенсивности (интерференция (9) при  $b=\pi$ , радиальная поляризация с фазовым вихрем порядка  $m=1$ ) в фокальной плоскости по радиусу (серая линия) и вдоль оптической оси (чёрная линия) для кольцевой апертуры шириной  $D=79\lambda$  с центральным радиусом  $r_c = 60,5\lambda$ :  
 $FWHM(r)=0,351, FWHM(z)=0,321$

Полученные результаты показывают, что за счёт использования вихревой фазы можно формировать световой шар меньшего размера в отдельных компонентах. Однако вклад других компонентов, особенно продольного, существенно изменяет картину в общей интенсивности.

Поэтому при радиальной поляризации лучше ориентироваться на продольный компонент и использовать интерференцию (9) при  $b=\pi$ . В этом случае будет формироваться полая световая сфера. Вклад азимутального компонента невелик. Поэтому нужно согласовать только радиус максимального значения продоль-

ного компонента в фокальной плоскости, который определяется функцией Бесселя первого порядка:

$$\rho_{\max,z} = \frac{1,84}{k \sin \alpha_c}, \tag{35}$$

с максимумом радиального компонента в продольном направлении, который вычисляется согласно (18).

Заметим, что согласование по радиусу приведёт к неравномерному распределению интенсивности сферы. Поэтому для получения более равномерного распре-

ления можно пожертвовать полной симметрией и сделать сферу немного сплюснутой вдоль оптической оси (табл. 3 и рис. 7). Такая световая сфера аналогична рассмотренной в [12]. Но она получена более простым способом, т.к. не нужно подавать на вход функции Гаусса-Лагерра высокого порядка или использовать две пропускающих кольцевых полосы.

Как видно из табл. 3, световая полая сфера формируется в фокальной плоскости из продольного компонента, а «запирается» вдоль оптической оси за счёт поперечных компонентов. Средний радиус сферы  $\rho_{sph} = 0,34\lambda$ . Размер теневой области в различных направлениях (по внутреннему размеру полуспада интенсивности окружающего светового барьера):  $FWHM(r)=0,35\lambda$ ,  $FWHM(z)=0,32\lambda$ .

**4.2. Азимутальная поляризация**

Для азимутальной поляризации:

$$Q_{m=\pm 1}^{az,c}(\rho, \varphi, \theta) = \frac{e^{\pm i\varphi}}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{m}i [J_0(k\rho \sin \theta) + J_2(k\rho \sin \theta)] \\ [J_0(k\rho \sin \theta) - J_2(k\rho \sin \theta)] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Отсутствие продольного компонента облегчает формирование определённых трёхмерных распределений. Чтобы получить цельный световой шар, нужно суммировать поперечные компоненты, т.е. использовать интерференцию (9) при  $b=0$ . Анализ в этом случае аналогичен приведённому в 4.1.

Оптимизация размеров и положения кольцевой диафрагмы выполнялась с целью согласования продольного и поперечного радиусов для общей интенсивности. Для кольцевой апертуры шириной  $\Delta=40\lambda$  с центральным радиусом  $r_c = 80\lambda$  при использовании интерференции (9) при  $b=0$  формируется примерно такой же световой шар, как был получен ранее для радиальной и круговой поляризации в отсутствие фазовых вихрей. Шар формируется за счёт поперечных компонентов (табл. 4). При этом для азимутального компонента получается световой шар малого размера:  $\rho_{\phi,ball} = 0,38\lambda$ .

Таблица 4. Распределение интенсивности при азимутальной поляризации с фазовым вихрем порядка  $m=1$  для кольцевой апертуры шириной  $\Delta=40\lambda$  с центральным радиусом  $r_c = 80\lambda$  (интерференция (9) при  $b=0$ )

	$ \mathbf{E} ^2$	$ E_r ^2$	$ E_j ^2$	$ E_z ^2$
Поперечное распределение $\mathbf{E}(x, y, 0)$ 				
Продольное распределение $\mathbf{E}(x, 0, z)$ 				

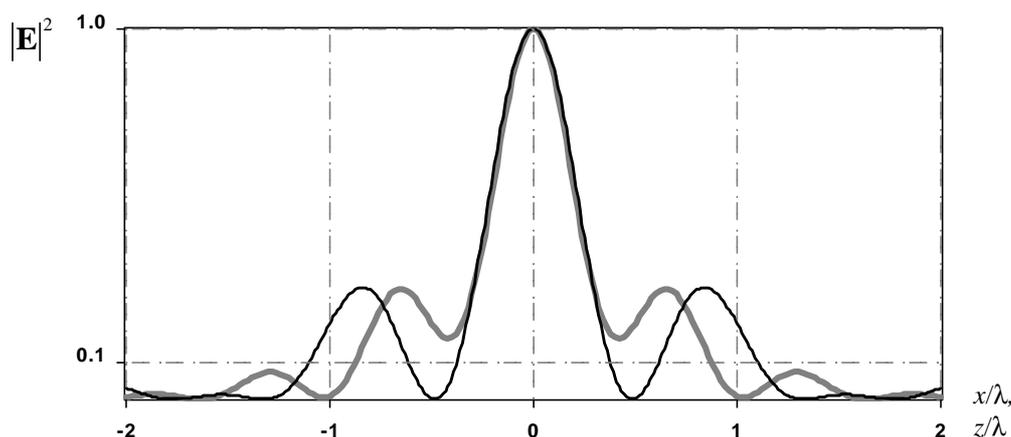


Рис. 8. Сечение нормированной общей интенсивности (интерференция (9) при  $b=0$ , азимутальная поляризация с фазовым вихрем порядка  $m=1$ ) в фокальной плоскости по радиусу (серая линия) и вдоль оптической оси (чёрная линия) для кольцевой апертуры шириной  $D=40\lambda$  с центральным радиусом  $r_c = 80\lambda$ :  $FWHM(r)=FWHM(z)=0,441$

Как видно из рис. 8, в поперечной плоскости распределение общей интенсивности не спадает до нуля. Поэтому такой способ формирования светового шара менее удачен, чем при использовании круговой поляризации при  $m=0$ . Заметим, что в азимутальном компоненте достигается распределение такое же, как и для радиального компонента в 4.1.

#### 4.3. Круговая поляризация

Для круговой «-» поляризации и вихря противоположного знака:

$$\mathbf{Q}_{m=1}^{circ-c}(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} iJ_1(k\rho \sin \theta) \cos \theta \\ J_1(k\rho \sin \theta) \\ -J_0(k\rho \sin \theta) \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (37)$$

При интерференции (9) с  $b=\pi$  можно попытаться сформировать монолитный шар, а с  $b=0$  – полую сферу.

Для первого случая результаты приведены в табл. 5 и на рис. 9, а для второго – в табл. 6 и на рис. 10. Размеры и положение кольцевой диафрагмы в каждом случае подбирались с целью согласования не только размеров, но и значений интен-

сивности 3D распределения в фокальной области.

Как следует из табл. 5 и рис. 9, световой шар в рассматриваемом случае получается несколько хуже, чем при радиальной поляризации с  $m=0$  из-за мощного периферийного вклада поперечных компонентов. Однако нужно отметить, что на данный момент практическая реализация радиальной поляризации сложнее, чем внесение в пучок вихревой фазовой сингулярности.

Как видно из табл. 6, световая сфера формируется в фокальной плоскости из поперечных компонентов, а «запирается» вдоль оптической оси за счёт продольного компонента. Такая сфера несколько хуже полученной при использовании радиальной поляризации, т.к. её «оболочка» имеет неравномерную интенсивность. Также средний радиус такой сферы несколько больше:  $\rho_{sph} = 0,38\lambda$ . Тем не менее, учитывая сложность реализации радиальной поляризации, данный результат имеет практическую ценность.

Таблица 5. Распределение интенсивности при круговой «←→» поляризации с фазовым вихрем порядка  $m=1$  для кольцевой апертуры шириной  $\Delta=60\lambda$  с центральным радиусом  $r_c = 70\lambda$  (интерференция (9) при  $b=\pi$ )

	$ \mathbf{E} ^2$	$ E_r ^2$	$ E_j ^2$	$ E_z ^2$
Поперечное распределение $\mathbf{E}(x, y, 0)$ 				
Продольное распределение $\mathbf{E}(x, 0, z)$ 				

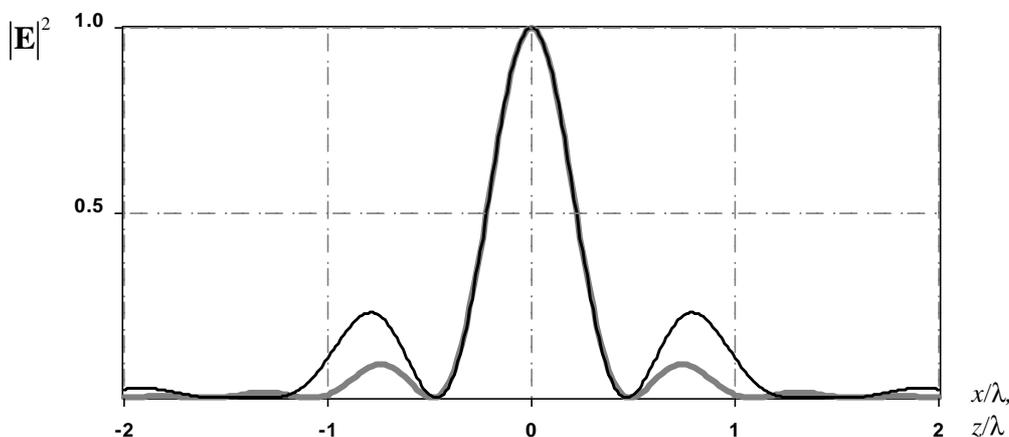


Рис. 9. Сечение нормированной общей интенсивности (интерференция (9) при  $b=\pi$ , круговая «←→» поляризация с фазовым вихрем порядка  $m=1$ ) в фокальной плоскости по радиусу (серая линия) и вдоль оптической оси (чёрная линия) для кольцевой апертуры шириной  $D=60\lambda$  с центральным радиусом  $r_c = 70\lambda$  :  $FWHM(r)=FWHM(z)=0,44\lambda$

Таблица 6. Распределение интенсивности при круговой «←→» поляризации с фазовым вихрем порядка  $m=1$  для кольцевой апертуры шириной  $\Delta=40\lambda$  с центральным радиусом  $r_c = 80\lambda$  (интерференция (9) при  $b=0$ )

	$ \mathbf{E} ^2$	$ E_r ^2$	$ E_j ^2$	$ E_z ^2$
Поперечное распределение $\mathbf{E}(x, y, 0)$ 				
Продольное распределение $\mathbf{E}(x, 0, z)$ 				

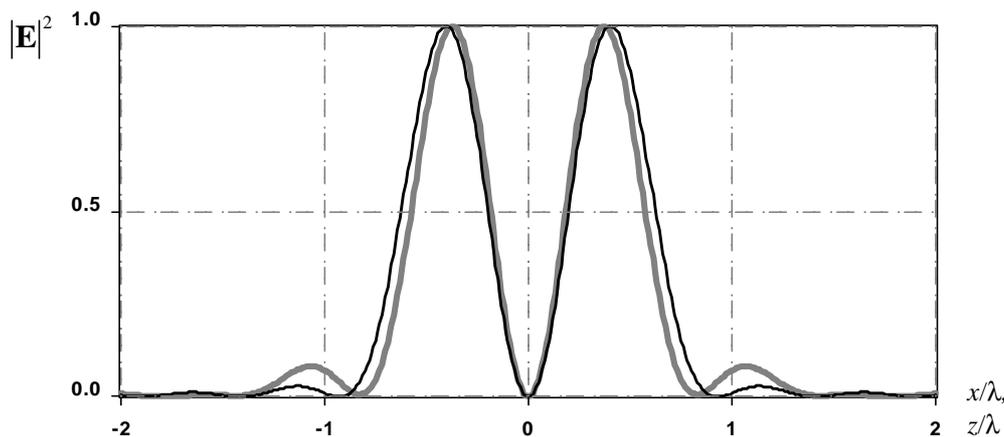


Рис. 10. Сечение нормированной общей интенсивности (интерференция (9) при  $b=0$ , круговая «-» поляризация с фазовым вихрем порядка  $t=1$ ) в фокальной плоскости по радиусу (серая линия) и вдоль оптической оси (чёрная линия) для кольцевой апертуры шириной  $D=40\lambda$  с центральным радиусом  $r_c = 80\lambda$  :

$$FWHM(r)=0,37\lambda, FWHM(z)=0,40\lambda$$

### Заключение

В работе аналитически и численно показано, что с помощью параметров одной кольцевой диафрагмы можно формировать сферические распределения интенсивности на основе встречной интерференции острогофокусированных вихревых пучков с различной поляризацией.

Отсутствие вихревой составляющей в пучках является привлекательным с практической точки зрения, т.к. внесение в пучок вихревой фазы требует использования дополнительных оптических элементов. Однако наличие вихревых составляющих расширяет возможности формирования трёхмерных распределений.

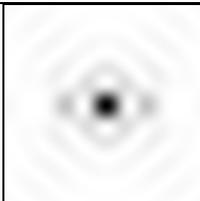
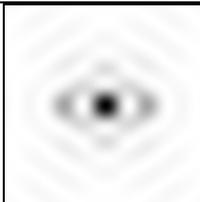
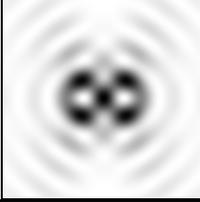
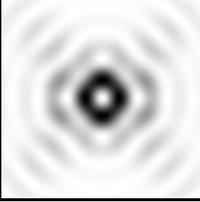
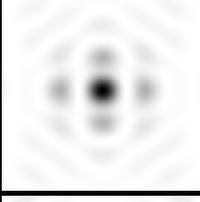
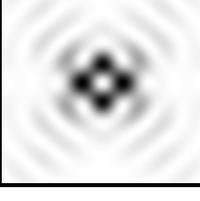
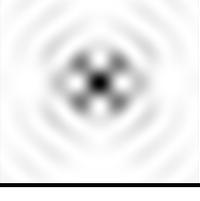
В табл. 7 приведены сводные характеристики 3D распределений интенсивности, полученные на основе встречной интерференции острогофокусированных вихревых пучков с различной поляризацией при оптимальном выборе параметров кольцевой диафрагмы. Пустые ячейки

свидетельствуют либо о невозможности сформировать сферическое (т.е. замкнутое во всех направлениях) распределение, либо о неэффективности использования данного типа интерференции.

Пучки с радиальной поляризацией удобно анализировать и применять из-за мощного продольного компонента в фокальной области. Из анализа табл. 7 следует, что использование радиальной поляризации позволяет формировать наиболее качественные распределения благодаря оптимальному соотношению между продольным и поперечными компонентами в фокальной области.

Однако на данный момент практическая реализация радиальной поляризации достаточно сложна. Поэтому возможность использования круговой поляризации для формирования аналогичных распределений имеет практическую ценность.

Таблица 7. Сводные характеристики 3D распределений интенсивности

Тип поляризации	Тип интерференции в (9)	
	$b=0$	$b=p$
Радиальная, $m=0$	-	 $\rho_{ball} = 0,44\lambda$ , продольный компонент
Азимутальная, $m=0$	-	-
Круговая «±», $m=0$	 $\rho_{ball} = 0,44\lambda$ , поперечные компоненты	-
Радиальная, $m=\pm 1$	 $\rho_{r,ball} = 0,38\lambda$ , радиальный компонент	 $\rho_{sph} = 0,34\lambda$
Азимутальная, $m=\pm 1$	 $\rho_{\phi,ball} = 0,38\lambda$ , азимутальный компонент	-
Круговая «-», $m=1$	 $\rho_{sph} = 0,38\lambda$	 $\rho_{ball} = 0,44\lambda$ продольный компонент

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 13-07-00266, а также гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-4128.2012.9.

#### Библиографический список

1. Dienerowitz, M. Optical manipulation of nanoparticles: a review [Text] / M. Dienerowitz M. Mazilu, and K. Dholakia // J. Nanophotonics. – 2008. – V.2 – P. 021875.
2. Martínez-Corral, M. The resolution challenge in 3D optical microscopy [Text] /

M. Martínez-Corral and G. Saavedra // Prog. Opt. – 2009. – V.53. - P. 1–67.

3. Walker, E. Toward terabyte two-photon 3D disk [Text] / E. Walker, A. Dvornikov, K. Coblenz, S. Esener, and P. Rentzepis // Opt. Express. – 2007. – V.15. - P. 12264–12276.

4. Dorn, R. Sharper focus for a radially polarized light beam [Text] / R. Dorn, S. Quabis, and G. Leuchs // Phys. Rev. Lett. – 2003. – V.91. – P. 233901.

5. Хонина, С.Н. Управление вкладом компонент векторного электрического поля в фокусе высокоапертурной линзы с помощью бинарных фазовых структур

[Текст] / Хони́на С.Н., Воло́товский С.Г. // Компьютерная оптика. – 2010. – Т. 34, №1. – С. 58-68.

6. Hell, S. Fundamental improvement of resolution with a 4Pi-confocal fluorescence microscope using two-photon excitation [Text] / S. Hell and E. H.K. Stelzer // Opt. Commun. – 1992. – V. 93. – P. 277-282.

7. Nagorni, M. Coherent use of opposing lenses for axial resolution increase in fluorescence microscopy. I. Comparative study of concepts [Text] / M. Nagorni and S. W. Hell // J. Opt. Soc. Am. A. – 2001. – V.18, No.1. – P. 36-48.

8. Bewersdorf, Comparison of I5M and 4Pi-microscopy [Text] / J. J. Bewersdorf, R. Schmidt, S.W. Hell // J. Microscopy. – 2006. – V.222. – P. 105–117.

9. Mudry, E. Isotropic diffraction-limited focusing using a single objective lens [Text] / E. Mudry, E. Le Moal, P. Ferrand, P. C. Chaumet, and A. Sentenac // Physical Review Letters. – 2010. – V.105, No.20. – P. 203903.

10. Sandeau, N. Arrangement of a 4Pi microscope for reducing the confocal detection volume with two-photon excitation [Text] / N. Sandeau, H. Giovannini // Opt. Commun. – 2006. – V. 264. – P. 123–129.

11. Bokor, N. Toward a spherical spot distribution with 4p focusing of radially po-

larized light [Text] / N. Bokor, N. Davidson // Optics Letters. – 2004. – V. 29, No. 17. – P. 1968-1970.

12. Chen, Z. 4pi focusing of spatially modulated radially polarized vortex beams [Text] / Z. Chen, D. Zhao // Optics Letters. – 2012. – V. 37, No. 8. – P. 1286-1288.

13. Bokor, N. A three dimensional dark focal spot uniformly surrounded by light [Text] / N. Bokor, N. Davidson // Opt. Commun. – 2007. – V. 279, P. 229–234.

14. Sheppard, C.J.R. Polarization effects in 4Pi microscopy [Text] / C.J.R. Sheppard, W. Gong, K. Si // Micron. – 2011. – V.42. P. 353–359.

15. Bokor, N. 4pi focusing with single paraboloid mirror [Text] / N. Bokor, N. Davidson, Opt. Commun. – 2008. – V. 281, P. 5499–5503.

16. Hao, X. Continuous manipulation of doughnut focal spot in a large scale [Text] / X. Hao, C. Kuang, Y. Li, and X. Liu // Optics Express. – 2012. – V. 20, No. 12. – P. 12692-12698.

17. Хони́на, С.Н. Формирование тонкой световой трубки при острой фокусировке азимутально-поляризованного излучения [Текст] / С.Н. Хони́на, А.В. Устинов // Изв. Самар. науч. центра РАН. – 2012. – Т. 14, № 6. – С. 279-284.

## FORMATION OF LIGHT BALLS ON THE BASIS OF INTERFERENCE OF ONCOMING FINE-FOCUSED BEAMS WITH DIFFERENT POLARIZATIONS

© 2013 S. N. Khonina, A. V. Ustinov

Samara State Aerospace University  
named after academician S. P. Korolyov (National Research University)

The paper deals with the formation of spherical intensity distributions on the basis of the interference of oncoming fine-focused vortex beams with different polarization. The formation of three-dimensional distributions is accomplished in a simple way by optimizing the width and position of a single annular diaphragm. The optimum parameters are analytically estimated for a narrow ring aperture, while those for a broad diaphragm are further numerically corrected. It is shown that, depending on the polarization, the order of the vortex singularity and an additional phase advance in one of the beams both solid and hollow light balls of a subwavelength radius consisting of different components of the electric field can be formed.

*Sharp focusing, interference of oncoming beams, three-dimensional subwavelength intensity distribution, polarization, vortex phase function.*

### **Информация об авторах**

**Хонина Светлана Николаевна**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры технической кибернетики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: [khonina@smr.ru](mailto:khonina@smr.ru). Область научных интересов: сингулярная оптика, дифракционная оптика, оптический анализ изображений.

**Устинов Андрей Владимирович**, аспирант кафедры технической кибернетики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва. E-mail: [andr@smr.ru](mailto:andr@smr.ru). Область научных интересов: дифракционная оптика, разработка программ оптического моделирования, обработка изображений.

**Khonina Svetlana Nikolaevna**, doctor of physics and mathematics, professor of the department of technical cybernetics, Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: [khonina@smr.ru](mailto:khonina@smr.ru). Area of research: singular optics, diffractive optics, optical image processing.

**Ustinov Andrey Vladimirovich**, postgraduate student of the department of technical cybernetics, Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: [andr@smr.ru](mailto:andr@smr.ru). Area of research: diffractive optics, software design for optical modeling; image processing.