

ПРИБЛИЖЁННЫЕ МОДЕЛИ АВИАТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ЧАСТИЧНОЙ ВЗАИМОПОМОЩЬЮ МЕЖДУ ОБСЛУЖИВАЮЩИМИ КАНАЛАМИ

© 2022

В. А. Романенко кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры организации и управления перевозками на транспорте; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; vla_rom@mail.ru

Предложены приближённые аналитические модели двух типов многоканальных систем массового обслуживания с частичной взаимопомощью между обслуживающими каналами и ожиданием в очереди ограниченной и неограниченной длины. Входящий поток заявок представляет собой суперпозицию нескольких простейших потоков. Предполагается, что установлены нормативные численности каналов для обслуживания заявки, различающиеся в зависимости от потока поступления заявки. В системах первого типа выделение нормативного числа каналов не является обязательным: заявка принимается на обслуживание при наличии в системе свободных каналов и меньшей, чем нормативная, численности. Время обслуживания распределено показательно со средним, обратно пропорциональным числу выделенных каналов. В системах второго типа обслуживание заявки всегда выполняется каналами нормативной численности. Время обслуживания может быть распределено произвольно (не только показательно), со средним, не зависящим от числа выделенных каналов. Представлены итоги сравнительного анализа результатов решения ряда задач проектирования обслуживающих систем в широком диапазоне исходных данных с использованием имитационного моделирования и расчётов на базе приближённых аналитических моделей, позволившие оценить область применимости последних и сделать вывод об их удовлетворительной точности. Приведены примеры использования моделей технологических процессов аэропортового наземного обслуживания как систем массового обслуживания рассмотренных типов.

Система массового обслуживания; частичная взаимопомощь между обслуживающими каналами; простейший поток заявок; суперпозиция потоков; приближённая модель системы; аэропорт; наземное обслуживание

Цитирование: Романенко В.А. Приближённые модели авиатранспортных систем массового обслуживания с частичной взаимопомощью между обслуживающими каналами // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2022. Т. 21, № 4. С. 118-130. DOI: 10.18287/2541-7533-2022-21-4-118-130

Введение

Объектами исследования являются производственные процессы и системы воздушного транспорта, в первую очередь аэропортовые процессы и системы, которые могут рассматриваться как системы массового обслуживания (СМО) с частичной взаимопомощью между каналами. В таких СМО заявка может обслуживаться одновременно несколькими каналами. При описании СМО используется символика Д. Кендалла [1], включающая четыре позиции. Первая позиция служит для обозначения потока заявок. Например, буква M здесь означает, что входящий поток пуассоновский. Вторая позиция содержит характеристику распределения времени обслуживания заявки. Здесь буква M означает показательное, а буква G – произвольное (не обязательно показательное) распределение времени обслуживания. В третьей и четвёртой позициях указываются, соответственно, число обслуживающих каналов СМО и максимальное число мест в очереди.

Обзор итогов раннего этапа (50-е – 70-е годы XX столетия) развития, основанного на применении моделей СМО методологии решения задач анализа и оптимизации авиатранспортных процессов и систем приводится в работе [2]. В качестве СМО рассматриваются аэровокзальные процессы регистрации и досмотра пассажиров ($M/G/n/m$, $M/M/\infty$, $M/M/1$ и $M/G/1$), производственные комплексы аэропортов ($M/M/n/\infty$), процессы управления воздушным движением в районе аэродрома и комплектования авиагрузов по рейсам ($M/M/n/\infty$ и $M/M/1/\infty$ с приоритетами), процессы оперативного и периодического обслуживания и ремонта авиационной и аэродромной наземной техники ($M/M/n/\infty$, $M/G/n/\infty$). Более поздние этапы характеризуются разнообразием исследуемых авиатранспортных процессов и систем и комбинированием элементарной и общей ТМО [3] с современными методами математического программирования и теории случайных процессов. Например, задача проектирования системы предполётного досмотра в аэропорту как СМО $M/M/n$ решена с помощью метода роя частиц [4] и с использованием теории цепей Маркова [5]. В работах [6; 7] на базе методов приближённого динамического программирования получены алгоритмы управления распределением между прилетающими и вылетающими воздушными судами (ВС) ресурсов перегруженного аэропорта, который рассматривается как СМО $M(t)/G(t)/1$ с ожиданием, приоритетами и нестационарными потоками заявок и обслуживания. Целью ставится минимизация величины, связанной с ожиданием ВС взлёта и посадки. Сложные нестационарные модели СМО ($M(t)/M/n(t)$, $M(t)/G/n(t)$) использованы для анализа очередей в процессе регистрации пассажиров [8]. Работы [9, 10] посвящены оптимизации процесса аэропортового обслуживания пассажиров как многофазовой СМО либо сети массового обслуживания, в которых каждая фаза или узел – СМО $M/M/n$. В роли показателя качества обслуживания в соответствии с требованиями ИАТА [11] выступает время ожидания пассажира в очередях на различных этапах обслуживания. Несмотря на очевидное соответствие расчётной схемы СМО с частичной взаимопомощью каналов целому ряду названных выше технологических процессов, ни в одной из известных работ разработке моделей СМО указанного класса не уделяется внимания. Некоторое исключение составляет работа [12], рассматривающая производственные процессы узлового аэропорта как СМО с нестационарными потоками и частичной взаимопомощью каналов. Однако исследуется лишь частный случай: допускается взаимопомощь между не более чем двумя каналами, а решение не доводится до относительно простых аналитических зависимостей. В настоящей работе предлагается незначительная модификация известных аналитических моделей ТМО, дающая возможность использования их для решения задач анализа и синтеза авиатранспортных систем как СМО с частичной взаимопомощью между каналами.

Постановка задачи

Рассматриваются два типа n -канальных полноступных СМО с ожиданием, в которые поступают несколько (Q) независимых простейших потоков заявок, имеющих заданные интенсивности λ_q ($q = 1, 2, \dots, Q$). Если в момент поступления заявки все каналы заняты, то заявка вынуждена ожидать в очереди с дисциплиной «первым пришёл – первым обслужился». Максимальное число мест ожидания может быть как неограниченным, так и ограниченным величиной m . Время ожидания не ограничено. Обслуживание заявки может выполняться одновременно несколькими каналами. Установлено нормативное число $l_q \geq 1$ каналов для обслуживания заявки из потока q ($q = 1, 2, \dots, Q$).

Особенность СМО первого типа заключается в том, что выделение всех l_q каналов для обслуживания заявки из q -го потока не является обязательным. Заявка прини-

мается на обслуживание при наличии в СМО любого числа L' свободных от обслуживания каналов. Если нормативное число l_q каналов превышает число L' каналов, являющихся свободными в момент принятия на обслуживание заявки из q -го потока, то для обслуживания этой заявки выделяются все свободные каналы. Таким образом, в СМО рассматриваемого типа фактически выделенное для обслуживания заявки число каналов L зависит от загрузки СМО и принимает значения:

$$L = \begin{cases} l_q, & \text{если } l_q \leq L', \\ L', & \text{если } 1 \leq L' \leq l_q. \end{cases}$$

Интенсивность обслуживания заявки одним каналом μ не зависит от того, из какого потока поступает заявка. Время обслуживания заявки из любого потока одним каналом – показательно распределённая случайная величина со средним $\bar{t}_{оо}^{(1)} = \mu^{-1}$. Интенсивность обслуживания заявки всеми выделенными каналами составляет $L\mu$.

В СМО второго типа нормативное число l_q каналов для обслуживания заявки из потока q ($q = 1, 2, \dots, Q$) фиксировано. Обслуживание ожидающей в очереди заявки из потока q не начинается, пока не освободится не менее l_q каналов. Распределение времени обслуживания заявки $t_{оо}$ одинаково для всех потоков и не обязательно подчинено показательному закону. Заданы среднее значение $\bar{t}_{оо} = \bar{t}_{оо}^{(1)} = M[t_{оо}]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D[t_{оо}]}$ времени обслуживания. Интенсивность обслуживания заявки всеми l_q каналами составляет $\mu = \bar{t}_{оо}^{-1}$.

Следуя символике системы Д. Кендалла, обозначим через \bar{M}_Q простейший входящий поток заявок, образованный суперпозицией Q простейших потоков. Показательное распределение времени обслуживания с параметром, зависящим от числа каналов, одновременно участвующих в обслуживании заявки, обозначим $M(L)$. В отличие от «классической» системы Д. Кендалла, предполагающей помещение на третью позицию только общего числа обслуживающих каналов в СМО, будем приводить здесь также обозначения нормативного и фактически выделяемого для обслуживания заявки числа каналов. Ограничим круг исследуемых СМО системами из следующего списка:

1) с различающимися нормативной и фактической численностями выделяемых для обслуживания заявки каналов:

а) с ограничением на длину очереди – $\bar{M}_Q/M(L)/n, \bar{l}_Q, L/m$;

б) с неограниченным ожиданием – $\bar{M}_Q/M(L)/n, \bar{l}_Q, L/\infty$;

2) с нормативной численностью выделяемых для обслуживания заявки каналов:

а) с ограничением на длину очереди – $\bar{M}_Q/M/n, \bar{l}_Q, \bar{l}_Q/m$;

б) с неограниченным ожиданием:

– с показательно распределённым $t_{оо} - \bar{M}_Q/M/n, \bar{l}_Q, \bar{l}_Q/\infty$;

– с произвольно распределённым $t_{оо} - \bar{M}_Q/G/n, \bar{l}_Q, \bar{l}_Q/\infty$.

Выбор перечисленных СМО объясняется как их значимостью в качестве расчётных схем при решении задач анализа и оптимизации авиатранспортных процессов и систем, так и наличием готовых простых моделей массового обслуживания, которые могут быть легко адаптированы для описания этих СМО.

Для решения значительной части задач исследования и оптимизации рассматриваемых систем необходимо располагать расчётными выражениями для основных характеристик установившегося режима СМО, объединённых в вектор:

$$\vec{x} = (\bar{k}, \bar{r}, \bar{z}_{об}, \bar{z}, \bar{\tau}, \bar{t}, p_{отк}),$$

где \bar{k} – среднее число занятых обслуживанием каналов; \bar{r} – среднее число заявок, ожидающих обслуживания в очереди; $\bar{z}_{об}$ – среднее число заявок, находящихся на обслуживании; $\bar{z} = \bar{r} + z_{об}$ – среднее число заявок в СМО; $\bar{\tau}$ – среднее время нахождения заявки в очереди; \bar{t} – среднее время нахождения заявки в СМО; $p_{отк}$ – вероятность отказа в принятии заявки в СМО.

Поставим целью получение приближённых аналитических моделей, позволяющих решать задачи формирования оптимальных по заданному критерию СМО перечисленных выше типов с учётом ограничений на значения их основных характеристик.

Приближённые модели СМО

Воспользуемся двумя имеющимися моделями, первая из которых [13] представляет собой модель n -канальной СМО с частичной взаимопомощью между каналами и простейшим входящим потоком заявок интенсивностью λ . Нормативное число каналов для обслуживания заявки составляет l . Вновь поступившая заявка, заставшая в СМО i заявок ($i = 0, 1, 2, \dots$), принимается к обслуживанию и обслуживается одновременно l каналами с общей производительностью $l\mu$, если выполняется условие $(i+1)l \leq n$. Если вновь поступившая заявка застаёт в СМО j заявок и при этом $(j+1)l > n$ и $j < n$, то заявка принимается к обслуживанию, но фактически она может обслуживаться не l , а меньшим числом каналов. При этом считается, что в обслуживании участвуют все n каналов, относительно равномерно распределившись между всеми поступившими заявками. Если в момент поступления заявки все каналы заняты, а длина очереди r меньше m , то заявка присоединяется к очереди. Если же в момент попытки входа заявки длина очереди максимальна ($r = m$), то заявка получает отказ в обслуживании и теряется. В принятой системе обозначений СМО может быть условно обозначена как $M/M(L)/n, l, L/m$.

Для упрощения записи введём обозначения:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \alpha_l = \frac{\alpha}{l}, \quad \alpha_n = \frac{\alpha}{n}, \quad h = \left[\frac{n}{l} \right], \quad (1)$$

где $\left[\frac{n}{l} \right]$ – целая часть числа.

Искомые показатели СМО, находящейся в установившемся режиме, определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \sum_{i=0}^h i l p_i + n \sum_{j=h+1}^n p_j + n \sum_{r=1}^m p_{n+r}, & \bar{r} &= \sum_{r=1}^m r p_{n+r}, \\ \bar{z}_{об} &= \sum_{i=0}^h i p_i + \sum_{j=h+1}^n j p_j + n \sum_{r=1}^m p_{n+r}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{r}}{\lambda(1-p_{\text{отк}})}, \quad \bar{t} = \frac{\bar{z}}{\lambda(1-p_{\text{отк}})},$$

где p_i – вероятность состояния СМО, при котором в ней находятся i заявок ($i = 0, 1, 2, \dots, h$), каждая из которых одновременно обслуживается l каналами; p_j – вероятность состояния СМО, при котором в ней находятся j заявок ($j = h+1, h+2, \dots, n$), в обслуживании которых участвуют все n каналов; p_{n+r} – вероятность состояния, когда в ней находятся $n+r$ заявок, из которых n обслуживаются, а r ожидают в очереди ($r = 0, 1, 2, \dots, m$). Временные характеристики $\bar{\tau}$ и \bar{t} имеют отношение только к обслуженным заявкам. Вероятности состояний и отказа определяются как:

$$\begin{aligned} p_i &= p_0 \frac{\alpha_l^i}{i!}, & i &= 1, 2, \dots, h; \\ p_j &= p_0 \frac{\alpha_l^j}{h!} h^{h-j}, & j &= h+1, h+2, \dots, n; \\ p_{n+r} &= p_0 \frac{\alpha_l^n}{h!} \alpha_n^r h^{h-n}, & r &= 0, 1, 2, \dots, m; \\ p_0 &= \left(\sum_{i=0}^h \frac{\alpha_l^i}{i!} + \frac{1}{h!} \sum_{j=h+1}^n \alpha_l^j h^{h-j} + \frac{\alpha_l^n h^{h-n}}{h!} \sum_{r=1}^m \alpha_n^r \right)^{-1}, \\ p_{\text{отк}} &= p_{n+m}. \end{aligned} \tag{3}$$

В случае СМО с неограниченной длиной очереди ($m = \infty, p_{\text{отк}} = 0$) $M/M(L)/n, l, L/\infty$ формулы для $\bar{k}, \bar{r}, \bar{z}_{\text{об}}, \bar{\tau}, \bar{t}, p_0$ преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \sum_{i=0}^h i p_i + n \sum_{j=h+1}^n p_j + n p_0 \frac{\alpha_l^n h^{h-n}}{h!} \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}, \\ \bar{r} &= p_0 \frac{\alpha_l^n h^{h-n}}{h!} \frac{\alpha_n}{(1-\alpha_n)^2}, \\ \bar{z}_{\text{об}} &= \sum_{i=0}^h i p_i + \sum_{j=h+1}^n j p_j + n p_0 \frac{\alpha_l^n h^{h-n}}{h!} \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}, \\ \bar{\tau} &= \bar{r}/\lambda, \quad \bar{t} = \bar{z}/\lambda, \\ p_0 &= \left(\sum_{i=0}^h \frac{\alpha_l^i}{i!} + \frac{1}{h!} \sum_{j=h+1}^n \alpha_l^j h^{h-j} + \frac{\alpha_l^n h^{h-n}}{h!} \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n} \right)^{-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Искомую характеристику $x \in \bar{x}$ более сложной СМО $\bar{M}_Q/M(L)/n, \bar{l}_Q, L/m$ определим, воспользовавшись следующим приближённым подходом. Используя формулы (1) – (3), предварительно Q раз произведём подсчёты аналогичной характеристики СМО $M/M(L)/n, l, L/m$ для каждого значения l_q ($q = 1, 2, \dots, Q$). Полученную в результате q -го подсчёта величину обозначим x_q . Искомое значение $x \in \bar{x}$ приближённо определим как средневзвешенное значений $x_1, x_2, \dots, x_q, \dots, x_Q$ по формуле

$$x = \frac{1}{\lambda} \sum_{q=1}^Q \lambda_q x_q. \quad (5)$$

Аналогично поступим в отношении СМО $\vec{M}_Q/M(L)/n, \vec{l}_Q, L/\infty$. В этом случае значения x_q ($q = 1, 2, \dots, Q$) определим по формулам (1), (3), (4) модели СМО $M/M(L)/n, l, L/\infty$.

Вторая широко известная модель описывает «стандартную» n -канальную СМО без взаимопомощи между каналами с ожиданием в очереди неограниченной или ограниченной величиной m длины [3]. Используем для этих СМО стандартные обозначения – $M/M/n/\infty$ и $M/M/n/m$ соответственно. Расчётные формулы для характеристик \bar{k} , \bar{r} , $\bar{z}_{ог}$, p_0 в случае $\alpha_n < 1$ приводятся ниже:

$$\begin{aligned} \bar{k} = \bar{z}_{ог} &= \alpha \left(1 - p_0 \frac{\alpha^{n+m}}{n! n^m} \right), \\ \bar{r} &= p_0 \frac{\alpha^n}{n!} \alpha_n \frac{1 - \alpha_n^m (m(1 - \alpha_n) + 1)}{(1 - \alpha_n)^2}, \\ p_0 &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{k=n}^{n+m} \alpha_n^{k-n} \right)^{-1}, \\ p_{отк} = p_{n+m} &= \frac{\alpha^{n+m}}{n! n^m} p_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для системы $M/M/n, 1, 1/\infty$ с неограниченной очередью ($m = \infty$, $p_{отк} = 0$, $\alpha_n < 1$) формулы приводятся к более компактному виду:

$$\bar{k} = \bar{z}_{ог} = \alpha, \quad \bar{r} = p_0 \frac{\alpha^{n+1}}{n! n (1 - \alpha_n)^2}, \quad p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{n}{n - \alpha} \right)^{-1}. \quad (7)$$

Временные характеристики \bar{r} , \bar{t} определяются по соответствующим формулам из наборов (2) или (4). При найденном \bar{r} величина \bar{t} может быть также определена как

$$\bar{t} = \bar{t}_{ог} + \bar{r}. \quad (8)$$

Для СМО $M/G/n/\infty$ с неограниченной очередью в случае не экспоненциального распределения времени обслуживания с параметрами $\bar{t}_{ог}$ и σ в работе [1] предложена следующая приближённая формула определения среднего времени ожидания:

$$\bar{r} \approx \frac{\bar{r}'}{2} \left(1 + (\bar{t}_{ог}/\sigma)^2 \right), \quad (9)$$

где \bar{r}' – среднее время ожидания для случая экспоненциально распределённого времени обслуживания со средним $\bar{t}_{ог}$.

Для перехода от моделей «стандартных» СМО без взаимопомощи к приближённым моделям СМО с взаимопомощью каналов нормативной численности будем в порядке упрощения рассматривать как единый канал группу каналов нормативной чис-

ленностью l_q . Учитывая различия в численности l_q для заявок из разных потоков, определим среднее число каналов в составе группы как

$$\bar{l} = \frac{1}{\lambda} \sum_{q=1}^Q \lambda_q l_q. \quad (10)$$

В этом случае исходная n -канальная СМО с взаимопомощью каналов может быть заменена эквивалентной «стандартной» СМО без взаимопомощи с меньшим числом каналов, равным:

$$n^{\text{э}} = \frac{n}{\bar{l}}. \quad (11)$$

Характеристики исходной n -канальной СМО с взаимопомощью будем приближённо определять через характеристики (обозначены индексом «э») эквивалентной $n^{\text{э}}$ -канальной СМО следующим образом:

$$\bar{k} \approx \bar{l} \bar{k}^{\text{э}}, \quad \bar{z}_{\text{ог}} = \bar{z}_{\text{ог}}^{\text{э}}, \quad \bar{r} \approx \bar{r}^{\text{э}}, \quad p_{\text{отк}} \approx p_{\text{отк}}^{\text{э}}, \quad \bar{\tau} \approx \bar{\tau}^{\text{э}}, \quad \bar{t} \approx \bar{t}^{\text{э}}. \quad (12)$$

В случае, если число $n^{\text{э}}$ не является целым, применяется приближённый прием, состоящий в определении искомых характеристик эквивалентной СМО для величин $[n^{\text{э}}]$ и $[n^{\text{э}}]+1$ и последующей линейной интерполяции.

Выражения (1)–(5) могут быть использованы для приближённого определения характеристик СМО с различающимися нормативной и фактической численностями выделяемых для обслуживания заявки каналов, выражения (1), (6)–(12) – для определения характеристик СМО с выделяемыми каналами нормативной численности.

Оценка точности приближённых моделей систем массового обслуживания

Для оценки точности предложенных моделей проведем сравнительный анализ результатов решения задач формирования оптимальных СМО, полученных на основе двух наборов моделей – приближённых аналитических и имитационных. Определимся с постановками тестовых задач, которые должны учитывать специфику СМО рассматриваемых типов, быть близкими к постановкам «реальных» задач оптимизации авиатранспортных систем, но не излишне сложными. Одной из самых практически важных задач проектирования систем с неограниченной очередью является определение минимального числа n_{min} обслуживающих каналов, достаточного для выполнения заданных ограничений на показатели качества обслуживания заявок, из которых наиболее значимыми для авиатранспортной отрасли следует считать среднее время ожидания обслуживания и среднее время пребывания заявки в СМО.

В тех СМО с неограниченной очередью, в которых число выделяемых для обслуживания заявки каналов фиксировано, а среднее время обслуживания не зависит от числа выделенных каналов, в роли показателя качества обслуживания целесообразно принять среднее время ожидания.

В СМО с неограниченной очередью, где время обслуживания заявки зависит от числа фактически выделяемых каналов, а это число – от загрузки системы, представляется целесообразным ограничить среднее время \bar{t} пребывания заявки в СМО, поскольку недостаточная общая численность каналов n может стать причиной неприемлемого параллельного роста как времени ожидания, так и времени обслуживания. При этом

следует учитывать, что \bar{t} имеет естественное ограничение снизу, оно не может принять значение меньше некоторой величины \bar{t}_{\min} , соответствующей состоянию малой загрузки СМО, при котором очередь отсутствует, а число участвующих в обслуживании каждой заявки каналов равно нормативному.

Для СМО с ограниченной длиной очереди поставим задачу определения минимального числа мест в очереди m_{\min} , достаточного для обеспечения заданной вероятности $1 - p'_{\text{отк}}$ приёма заявки в СМО при заданном числе каналов n .

Примем заданными вектор $\vec{l}_Q = (l_q, q = 1, 2, \dots, Q)$ нормативной численности обслуживающих каналов, интенсивность λ суперпозиции входящих в СМО потоков заявок и вектор $\vec{\delta}_Q = (\delta_q, q = 1, 2, \dots, Q)$ долей потоков в интенсивности их суперпозиции. Будем определять интенсивности λ_q ($q = 1, 2, \dots, Q$) потоков с использованием λ и $\vec{\delta}_Q$ в виде:

$$\lambda_q = \delta_q \lambda, \quad q = 1, 2, \dots, Q.$$

Перечислим конкретные формулировки оптимизационных задач для рассмотренных СМО и результаты их решения с помощью упрощённых аналитических моделей теории массового обслуживания и стохастических дискретно-событийных моделей, реализованных в системе имитационного моделирования AnyLogic.

1. СМО $\vec{M}_Q/M(L)/n, \vec{l}_Q, L/\infty$: найти n_{\min} при заданных $\vec{l}_Q, \lambda, \vec{\delta}_Q, \mu$ и ограничении

$$\bar{t} \leq \delta \cdot \bar{t}_{\min},$$

где δ – коэффициент, задающий допустимое превышение \bar{t} над \bar{t}_{\min} . Некоторые результаты решения этой задачи для ряда значений λ и μ представлены в табл. 1. Если значения n_{\min} , полученные с использованием аналитической и имитационной моделей, различаются, то результат записывается в виде двух чисел, разделённых знаком «/», где первое число представляет собой результат имитационного моделирования, а второе – разность между результатами аналитических расчётов и имитационного моделирования. При заданных исходных данных ($Q = 3, \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1/3, \delta = 1,5$) различия между двумя моделями не превышают одной единицы, причём в большинстве случаев результаты обеих моделей совпадают.

2. СМО $\vec{M}_Q/M(L)/n, \vec{l}_Q, L/m$: определить m_{\min} при заданных $\vec{l}_Q, \lambda, \vec{\delta}_Q, \mu, n$ и ограничении

$$p_{\text{отк}} \leq p'_{\text{отк}}, \quad (13)$$

где $p'_{\text{отк}}$ – заданная допустимая вероятность отказа в приёме заявки в СМО. Часть полученных результатов для ряда значений λ, μ и $p'_{\text{отк}} = 0,01$ представлена в табл. 1. Значения n приняты равными соответствующим n_{\min} , определённым по аналитической модели из предыдущего примера. Остальные исходные данные аналогичны предыдущему примеру. При заданных исходных данных аналитическая модель в большинстве случаев несколько занижает необходимую вместимость накопителя, однако различия между результатами моделей редко превышают одну единицу. Обращает на себя внимание немонотонность зависимости m_{\min} как от λ , так и от μ , которая объясняется влиянием на m_{\min} не только λ и μ , но и n_{\min} .

Таблица 1. Результаты сравнения моделей

$\mu \backslash \lambda$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n_{\min}, \bar{M}_Q/M(L)/n, \bar{l}_Q, L/\infty$										
0,5	4	6	9	11	13/-1	15	17	19	21	23
1,0	3	4	6	6	8	9	10/-1	11	12	13/-1
1,5	3	3	4	5	6	6	7	8	9	9
$m_{\min}, \bar{M}_Q/M(L)/n, \bar{l}_Q, L/m$										
0,5	4/-1	6/-1	5/-1	6/-1	7/-1	8/-2	8	9/-1	9/-1	10
1,0	3/-1	4/-1	3/-1	6/-1	5/-1	5/-1	6/+1	6	7/-2	7/2
1,5	2/-1	4/-1	4/-1	4	4/-1	6/-1	6/-1	5	5/-1	7/-1
$m_{\min}, \bar{M}_Q/M/n, \bar{l}_Q, \bar{l}_Q/m$										
0,5	4	5/-1	7/-2	7	8	9	10	11	11/-2	12/-2
1,0	3/-1	5/-1	5	7/-1	8/-1	9/-1	10/-1	10	12/-1	12
1,5	3	5/-2	5/-1	7	7/-1	8/-2	10	9	11/-2	10/-2

3. СМО $\bar{M}_Q/M/n, \bar{l}_Q, \bar{l}_Q/\infty$: найти n_{\min} при заданных $\bar{l}_Q, \lambda, \bar{\delta}_Q, \mu$ и ограничении

$$\bar{\tau} \leq \bar{\tau}'$$

где $\bar{\tau}'$ – заданное допустимое среднее время ожидания обслуживания заявки.

4. СМО $\bar{M}_Q/G/n, \bar{l}_Q, \bar{l}_Q/\infty$: задача аналогична предыдущей при дополненных величиной $\sigma = \sqrt{D[t_{об}]}$ исходных данных.

Результаты решения задач 3 и 4 в виде изолиний зависимости $n_{\min}(\lambda, \mu)$ при принятых ранее исходных данных и $\bar{\tau}' = 0,25$ представлены на рис. 1, а и б соответственно. Сплошными линиями обозначены результаты, полученные на базе имитационного моделирования, штриховыми линиями – результаты расчётов с использованием приближённой аналитической модели. Для $\bar{M}_Q/G/n, \bar{l}_Q, \bar{l}_Q/\infty$ рассмотрен предельный случай, при котором время обслуживания фиксировано: $\sigma = 0$.

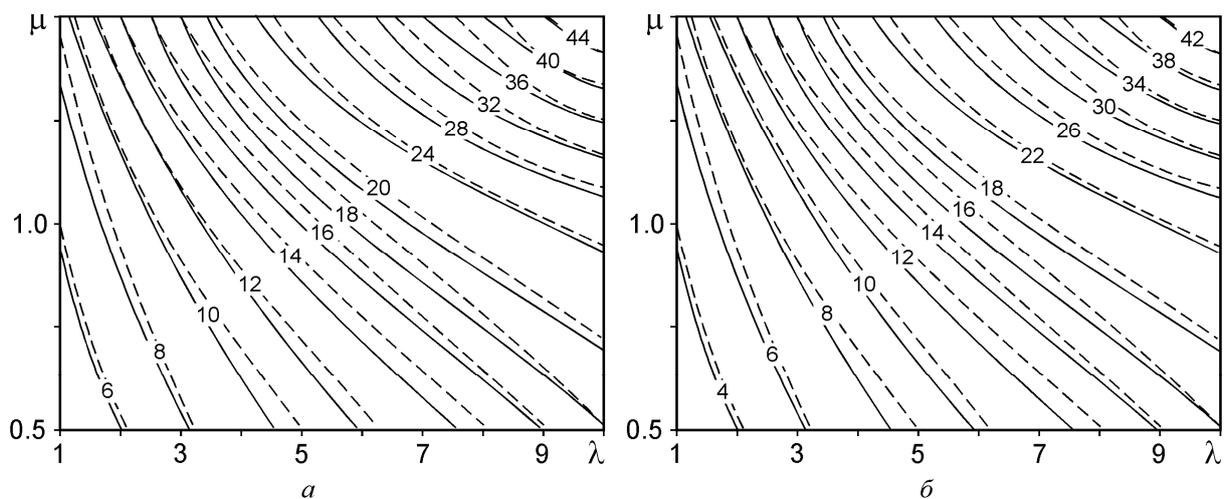


Рис. 1. Зависимость $n_{\min}(\lambda, \mu)$ для СМО $\bar{M}_Q/M/n, \bar{l}_Q, \bar{l}_Q/\infty$ (а) и $\bar{M}_Q/G/n, \bar{l}_Q, \bar{l}_Q/\infty$ (б):

————— – имитационная модель; - - - - - – аналитическая модель

5. СМО $\bar{M}_Q/M/n, \bar{l}_Q, \bar{l}_Q/m$: найти m_{\min} при заданных $\bar{l}_Q, \lambda, \bar{\delta}_Q, \mu, n$ и ограничении (13). Некоторые результаты для величин $n = n_{\min}$, определённых выше с использованием аналитической модели СМО $\bar{M}_Q/M/n, \bar{l}_Q, \bar{l}_Q/\infty$ и $p'_{\text{отк}} = 0,01$ приведены в табл. 1. Остальные исходные данные аналогичны другим примерам. Приближённая модель примерно в половине случаев занижает требуемую вместимость накопителя на 1-2 единицы. В целом же проведенный анализ показывает, что в промежутке значений $0,5 \leq \frac{\lambda}{\mu} \leq 30$ предложенные аналитические модели могут быть использованы для получения предварительных оценок характеристик СМО с частичной взаимопомощью.

Модельные примеры

Ниже рассмотрены примеры использования моделей технологических процессов наземного обслуживания воздушных перевозок как СМО с ожиданием и частичной взаимопомощью между каналами. В роли первого примера выступает одна из важнейших технологических операций предполётного обслуживания пассажиров в аэровокзале аэропорта – регистрация билетов и оформление багажа к перевозке по порейсовой схеме. Предположим, что для обслуживания пассажиров одного рейса требуется выделять от одного до трех пунктов: $\bar{l}_Q = (1, 2, 3)$. Интенсивность простейшего потока рейсов на регистрацию составляет $\lambda = 15$ 1/ч. Доли потоков рейсов, для которых требуется выделять 1, 2 и 3 пункта, составляют в общей интенсивности $\delta_1 = 0,3, \delta_2 = 0,5, \delta_3 = 0,2$ соответственно. Если при наступлении планового момента открытия регистрации на рейс установленные нормативом в количестве l_q свободные пункты отсутствуют, то регистрация задерживается до освобождения всех l_q пунктов. Среднее время опоздания с началом регистрации рейса не должно превышать 5 минут. Если принять время регистрации всех вылетающих пассажиров одного рейса распределённым показателем со средним $\bar{t}_{ог} = 1,5$ ч, а очередь неограниченной, то необходимое число пунктов обслуживания составит, согласно аналитической модели – 53 единицы, согласно имитационной модели – 54 единицы. Если в соответствии с [14] считать, что время обслуживания подчинено смещённому гамма-распределению со средним $\bar{t}_{ог} = 1,5$ ч смещением, равным 1,3 ч, и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,09$ ч, то потребное число пунктов для каждой из моделей сократится на 3 единицы.

Предположим теперь, что в аэровокзале должна быть предусмотрена зона для размещения пассажиров тех рейсов, открытие регистрации на которые задерживается по причине недостатка пунктов обслуживания. Фактическое число пассажиров, ожидающих начала регистрации в указанной зоне, с заданной надёжностью p' не должно превышать её вместимости. Ситуации, при которых фактическое число пассажиров, ожидающих начала регистрации, превышает вместимость рассматриваемой зоны, могут служить причиной отмены, объединения и переноса рейсов. Таким образом, будем рассматривать $p'_{\text{отк}} = 1 - p'$ в качестве допустимой вероятности отказа в обслуживании рейса. При заданной вероятности отказа $p'_{\text{отк}} = 0,005$, показательно распределённом времени обслуживания и соответствующих ему численностях пунктов регистрации, указанных выше, использование обеих моделей обеспечивает одинаковый результат: вместимость накопителя должна быть достаточной для одновременного размещения пассажиров не менее 7 рейсов.

Примером СМО с различающимися нормативной и фактической численностями выделяемых каналов может служить операция заправки ВС авиатопливом посредством системы централизованной заправки (ЦЗС). Пусть интенсивность потока заявок на заправку также составляет $\lambda = 15$ 1/ч. В среднем каждое пятое ВС относится к типу, для заправки которого предполагается использовать параллельно два подвижных заправочных агрегата (ЗА), но в случае отсутствия двух свободных агрегатов заправка может выполняться и одним ЗА. Остальные ВС обслуживаются одним ЗА. Время заправки одним ЗА распределено показательно со средним $\bar{t}_{06}^{(1)} = 0,5$ ч. Пусть время простоя ВС на заправке не должно превышать 0,67 ч. Число стоянок ВС, подсоединённых к ЦЗС, достаточно велико для того, чтобы можно было не учитывать ограничения по численности ВС, ожидающих заправки. При представленных исходных данных как аналитическая, так и имитационная модели дают одинаковый результат: необходимо 7 заправочных агрегатов.

Заключение

Проведённый сравнительный анализ вполне ожидаемо демонстрирует определённые различия между результатами имитационного моделирования и результатами расчётов с использованием предложенных приближённых моделей СМО. Однако учитывая, что эти различия незначительны, а альтернативой приближённой модели является либо построение имитационной модели, либо разработка громоздкой и далеко не всегда полностью аналитической «точной» модели СМО, представляется целесообразным использование предложенных моделей для оценочных расчётов при решении задач анализа и синтеза обслуживающих систем авиатранспортной отрасли.

Библиографический список

1. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
2. Андронов А.М., Хижняк А.Н. Математические методы планирования и управления производственной деятельностью предприятий гражданской авиации. М.: Транспорт, 1977. 215 с.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
4. Naji M., Braytee A., Al-Ani A., Anaissi A., Goyal M., Kennedy P.J. Design of airport security screening using queueing theory augmented with particle swarm optimisation // *Service Oriented Computing and Applications*. 2020. V. 14, Iss. 2. P. 119-133. DOI: 10.1007/s11761-020-00291-0
5. Wang M.J. Application of the queueing theory in characterizing and optimizing the passenger flow at the airport security // *Journal of Applied Mathematics and Physics*. 2017. V. 5, Iss. 9. P. 1620-1628. DOI: 10.4236/jamp.2017.59134
6. Shone R., Glazebrook K., Zografos K.G. Resource allocation in congested queueing systems with time-varying demand: An application to airport operations // *European Journal of Operational Research*. 2019. V. 276, Iss. 2, P. 566-581. DOI: 10.1016/j.ejor.2019.01.024
7. Itoh E., Mitici M. Queue-based modeling of the aircraft arrival process at a single airport // *Aerospace*. 2019. V.6, Iss.10. DOI: 10.3390/aerospace6100103
8. Stolletz R. Analysis of passenger queues at airport terminals // *Research in Transportation Business and Management*. 2011. V. 1, Iss. 1. P. 144-149. DOI: 10.1016/j.rtbm.2011.06.012

9. Jawab F., Khachani M., Akoudad K., Moufad I., Fricchi Y., Laaraj N., Zehmed K. Queuing model for improving airport passengers treatment process // Proceedings of the ICIEOM: International Conference on Industrial Engineering and Operations Management (July, 26-27, 2018, Paris, France). P. 2095-2107.
10. Satanaryana V.V., Shaik Dawood A.K., Karthikeyan R., Khan N. Application of queuing theory models for optimized service to airline passengers // International Journal of Current Research. 2015. V. 7, Iss. 09. P. 20544-20547.
11. Airport Development Reference Manual. 10th edition. International Air Transport Association. Montreal, 2014.
12. Романенко В.А. Оптимизация управления технологическими процессами узлового аэропорта как системы массового обслуживания с нестационарными потоками и частичной взаимопомощью каналов // Управление большими системами. 2012. № 36. С. 209-247.
13. Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1969. 324 с.
14. Романенко В.А. Математические модели функционирования узловых аэропортов в условиях современного авиатранспортного рынка. Самара: ООО «Издательство Ас Гард», 2010. 244 с.

APPROXIMATE MODELS OF AIR TRANSPORT QUEUEING SYSTEMS WITH PARTIAL MUTUAL ASSISTANCE BETWEEN SERVICE CHANNELS

© 2022

V. A. Romanenko

Candidate of Science (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Transportation Management and Control; Samara National Research University, Samara, Russian Federation; vla_rom@mail.ru

Approximate analytical models are proposed for two types of multi-channel queuing systems with partial mutual assistance between channels and waiting in limited-size and unbounded queues. The incoming flow of requests is a superposition of several simplest flows. It is assumed that normative numbers of channels for servicing a customer that differ depending on the flow of incoming customer requests are established. In the systems of the first type the normative number of channels is not necessary: a customer is accepted for servicing if there are free channels in the system and the number of channels is smaller than the normative one. Service time is distributed exponentially with the average inversely proportional to the number of allocated channels. In systems of the second type the service of a customer is always performed by the channels of the normative number. Service time can be distributed arbitrarily (not only exponentially) with the average irrespective of the number of allocated channels. The paper presents the results of comparative analysis of the results of dealing with some tasks of designing service systems in a wide range of input data using simulation modelling and calculations based on approximate analytical models that allowed evaluating the application area of the latter and making a conclusion about their satisfactory accuracy. Examples of the use of models of technological processes of airport ground handling as queuing systems of the considered types are given.

Queueing systems; partial mutual assistance between channels; simplest customer flow; superposition of flows; approximate model; airport; ground handling

Citation: Romanenko V.A. Approximate models of air transport queueing systems with partial mutual assistance between service channels. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2022. V. 21, no. 4. P. 118-130. DOI: 10.18287/2541-7533-2022-21-4-118-130

References

1. Bocharov P.P., Pechinkin A.V. *Teoriya massovogo obsluzhivaniya* [Queuing Theory]. Moscow: RUDN University Publ., 1995. 529 p.
2. Andronov A.M., Khizhnyak A.N. *Matematicheskie metody planirovaniya i upravleniya proizvodstvennoy deyatelnost'yu predpriyatiy grazhdanskoy aviatsii* [Mathematical methods for planning and managing the production activities of civil aviation enterprises]. Moscow: Transport Publ., 1977. 215 p.
3. Kleinrock L. *Queueing systems. V. I. Theory*. New York: Wiley-Interscience Publ., 1974. 448 p.
4. Naji M., Braytee A., Al-Ani A., Anaissi A., Goyal M., Kennedy P.J. Design of airport security screening using queueing theory augmented with particle swarm optimisation. *Service Oriented Computing and Applications*. 2020. V. 14, Iss. 2. P. 119-133. DOI: 10.1007/s11761-020-00291-0
5. Wang M.J. Application of the queueing theory in characterizing and optimizing the passenger flow at the airport security. *Journal of Applied Mathematics and Physics*. 2017. V. 5, Iss. 9. P. 1620-1628. DOI: 10.4236/jamp.2017.59134
6. Shone R., Glazebrook K., Zografos K.G. Resource allocation in congested queueing systems with time-varying demand: An application to airport operations. *European Journal of Operational Research*. 2019. V. 276, Iss. 2. P. 566-581. DOI: 10.1016/j.ejor.2019.01.024
7. Itoh E., Mitici M. Queue-based modeling of the aircraft arrival process at a single airport. *Aerospace*. 2019. V.6, Iss.10. DOI: 10.3390/aerospace6100103
8. Stolletz R. Analysis of passenger queues at airport terminals. *Research in Transportation Business and Management*. 2011. V. 1, Iss. 1. P. 144-149. DOI: 10.1016/j.rtbm.2011.06.012
9. Jawab F., Khachani M., Akoudad K., Moufad I., Fricchi Y., Laaraj N., Zehmed K. Queuing model for improving airport passengers treatment process. *Proceedings of the ICIEOM: International Conference on Industrial Engineering and Operations Management (July, 26-27, 2018, Paris, France)*. P. 2095-2107
10. Satanaryana V.V., Shaik Dawood A.K., Karthikeyan R., Khan N. Application of queueing theory models for optimized service to airline passengers. *International Journal of Current Research*. 2015. V. 7, Iss. 09. P. 20544-20547
11. *Airport Development Reference Manual*. 10th edition. International Air Transport Association. Montrea, 2014.
12. Romanenko V.A. Optimizing technological process control of hub airport as queueing system with non-stationary flows and partial mutual assistance between channels. *Large-Scale Systems Control*. 2012. No. 36. P. 209-247. (In Russ.)
13. Ovcharov L.A. *Prikladnye zadachi teorii massovogo obsluzhivaniya* [Applications of queueing theory]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1969. 324 p.
14. Romanenko V.A. *Matematicheskie modeli funktsionirovaniya uzlovykh aeroportov v usloviyakh sovremennogo aviatransportnogo rynka* [Mathematical models of hub airport operation in the modern air transport market]. Samara: As Gard Publ., 2010. 244 p.