

## ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ УСТОЙЧИВОГО РОСТА ТРЕЩИН МАЛОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ В ОСНОВНЫХ ДЕТАЛЯХ АВИАЦИОННОГО ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ

© 2022

- А. А. Рябов** доктор физико-математических наук, директор;  
ООО «Саровский инженерный центр», г. Саров;  
[alex.rjabov@saec.ru](mailto:alex.rjabov@saec.ru)
- К. Ю. Мохов** начальник отдела «П»,  
ООО «Саровский инженерный центр», г. Саров;  
[kmokhov@saec.ru](mailto:kmokhov@saec.ru)
- О. В. Воронков** кандидат технических наук, старший научный сотрудник;  
ООО «Саровский инженерный центр», г. Саров;  
[ovoronkov@saec.ru](mailto:ovoronkov@saec.ru)
- А. Ю. Кудрявцев** кандидат физико-математических наук, начальник отдела «ТМП»,  
ООО «Саровский инженерный центр», г. Саров;  
[kudryavtsev@saec.ru](mailto:kudryavtsev@saec.ru)
- А. А. Мусеев** начальник КБ расчётов;  
АО «ОДК-Климов», г. Санкт-Петербург;  
[museev\\_aa@klimov.ru](mailto:museev_aa@klimov.ru)

Приводятся теоретические основы отраслевой методики конечно-элементного моделирования процесса устойчивого роста трещин малоциклового усталости в основных деталях авиационного газотурбинного двигателя на примере диска осевого компрессора. Описываются параметры типовых применяемых конечно-элементных моделей, а также некоторые эффективные приёмы компьютерного моделирования, составляющие новизну данной работы, позволяющие повысить точность численных расчётов при снижении трудоёмкости, в частности: нижняя релаксация прироста трещины и автоматизация процесса построения нового фронта на каждом цикле выполнения методики. Приводятся некоторые результаты расчётов, демонстрирующие практическую реализацию положений методики и преимущества от использования предлагаемых нововведений при конечно-элементном моделировании, а именно: нижняя релаксация обеспечивает сохранение стабильности численного решения при существенно более крупном приращении трещины, что позволяет заметно снизить трудоёмкость процесса моделирования за счёт снижения необходимого количества расчётных циклов; автоматизация процесса построения нового фронта трещины позволяет значительно повысить точность отображения трещины в ходе её развития за счёт определения величины прироста в большом количестве точек на фронте.

*Авиационный газотурбинный двигатель; малоцикловая усталость; устойчивый рост трещин; конечно-элементное моделирование; нижняя релаксация*

**Цитирование:** Рябов А.А., Мохов К.Ю., Воронков О.В., Кудрявцев А.Ю., Мусеев А.А. Особенности моделирования устойчивого роста трещин малоциклового усталости в основных деталях авиационного газотурбинного двигателя // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2022. Т. 21, № 3. С. 127-140. DOI: 10.18287/2541-7533-2022-21-3-127-140

### Введение

Основные силовые детали авиационных газотурбинных двигателей (АГТД) – диски ротора в полёте испытывают интенсивные переменные термомеханические нагрузки, в результате действия которых в наиболее нагруженных зонах могут развиваться трещины малоциклового усталости (МЦУ), представляющие серьёзную угрозу разрушения конструкции. Поэтому развитие высокоточного компьютерного прогнозирования малоциклового долговечности основных силовых деталей АГТД является весьма актуальным.

Основы описания механического поведения детали с трещиной заложены в теории линейной механики разрушения (ЛМР) [1 – 5]. Прогнозирование малоциклового долговечности стало доступным с появлением различных эмпирических зависимостей, из которых наибольшее распространение получило уравнение Пэриса-Эрдогана [6]. Результаты численного моделирования, приведённые в настоящей статье, получены на основе отраслевой методики, описанной в работах [7 – 10]. Используемый подход к моделированию устойчивого роста трещины от начального дефекта в детали АГТД имеет полуэмпирическую природу, основанную на теоретических положениях ЛМР [1 – 5], эмпирическом уравнении Пэриса-Эрдогана [6], данных фрактографического анализа поверхностей трещин в деталях АГТД [10] и металловедческом представлении о фрагментированной структуре металла в окрестности фронта трещины МЦУ [11]. Деформированное состояние твёрдых тел вычисляется методом конечных элементов (МКЭ) [12; 13].

В настоящей работе приведены некоторые результаты моделирования устойчивого роста трещин МЦУ в основных деталях АГТД. Перечисляются возникающие трудности в реализации применяемого подхода. Предлагаются эффективные приёмы моделирования, позволяющие повысить точность численных расчётов при снижении трудоёмкости.

В работе [14] перечислены несколько альтернативных методов моделирования роста трещин МЦУ. В частности, приводится сравнение двух основных методов, реализованных в коммерческих кодах, таких как ABAQUS [15]: МКЭ и расширенный МКЭ (XFEM) [16; 17]. Главным преимуществом этого метода является отсутствие необходимости в перестроении КЭ-сетки в процессе моделирования, что потенциально даёт существенные возможности для снижения трудоёмкости. Недостатком метода является большая размерность КЭ-модели, т. к. мелкая сетка необходима вдоль всего предполагаемого пути распространения трещины, что ставит под вопрос реальный потенциал снижения трудоёмкости. Сравнение эффективности применяемого отраслевого подхода и метода XFEM для рассматриваемой задачи в рамках данной работы не проводится.

## **1. Постановка задачи и применяемые методы**

Основные детали АГТД, большую часть из которых составляют диски ротора, рассматриваются изолированно или в составе подборки в зависимости от применяемых соединений с соседними деталями и фокуса интереса на конкретной детали. Для уменьшения размерности КЭ-модели рассматривается репрезентативный сектор детали или подборки с периодическими границами на боковых сторонах сектора:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{Q}\mathbf{x}) \text{ на } \Omega.$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – вектор перемещения точки тела;  $\mathbf{x}$  – вектор положения точки тела;  $\mathbf{Q}$  – тензор поворота, который вращает вектор положения точки вокруг оси детали на угол сектора модели;  $\Omega$  – поверхность периодической границы сектора модели.

Учитываются следующие нагрузки в порядке убывания их влияния на напряжённо-деформированное состояние (НДС): центробежная нагрузка, температурное поле, усилия затяжки болтов и контактное давление от посадок с натягом, давление газа на омываемой поверхности подборки, радиальная, осевая и окружная реакции соседних деталей. Поля температуры и давления определяются отдельным численным расчётом течения газа и сопряжённого теплообмена на стенках проточного тракта двигателя, работающего по типовому полётному циклу (ТПЦ). Описание указанного расчёта сопряжённого теплообмена выносится за рамки данной статьи.

Лопатки рассматриваются как деформируемые тела. Учитывается контактное взаимодействие дисков ротора с лопатками и прочими деталями и моделируется скользящим контактом с трением.

Прогнозирование малоциклового долговечности детали проводится на основе следующих положений и последовательности шагов:

1. Проводится переходный статический термомеханический расчёт подборки. На поверхностях деталей определяются зоны концентрации напряжений. Критерием выбора критической зоны является размах первого главного напряжения ( $\sigma_1$ ) по ТПЦ. Максимальное значение  $\sigma_1$  в критической зоне соответствует расчётной временной точке по ТПЦ (состояние «М»).

2. Далее рассматривается нагрузочный цикл «0 – М – 0». Состояние «0» в данном случае соответствует «холодному» двигателю.

3. В модель детали в критической зоне вводится начальный дефект в виде надреза нулевой ширины. Размер начального дефекта в плане берётся равным максимально возможному дефекту, который не обнаруживается средствами визуального контроля при производстве. Форма начального дефекта зависит от технологии изготовления детали и механической обработки поверхности.

4. Плоскость начального дефекта совпадает с первой главной площадкой НДС.

5. Процесс устойчивого роста трещины моделируется серией расчётов, в ходе которых длина трещины увеличивается в соответствии с принципами, приведёнными далее в разделе 1.2.

6. Считается, что трещина достигла верхнюю границу устойчивого роста, когда она начинает прирастать на 2 мкм или более за нагрузочный цикл [7 – 10]. После достижения трещиной верхней границы устойчивого роста или после подтверждения предписанной долговечности детали процесс моделирования прекращается.

### 1.1. Механическая модель деформируемого твёрдого тела

В лагранжевой постановке рассматривается статическое деформирование конструкции из однородного изотропного линейно-упругого материала с учётом больших перемещений [18]. Упругие константы материала: модуль упругости, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного линейного расширения зависят от температуры. Решение нелинейной краевой задачи проводится по неявной схеме методом конечных элементов в коммерческом коде ABAQUS [15]:

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} + \mathbf{f} = 0,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_T),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 0,5(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}), \mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T,$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_T = \boldsymbol{\alpha}(T - T_{ref}),$$

где  $\nabla$  – дифференциальный оператор;  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений Коши;  $\mathbf{f}$  – вектор объёмных сил;  $\mathbf{I}$  – единичный тензор;  $\mathbf{C}$  – тензор упругих податливостей;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор деформаций Эйлера-Алманси;  $\mathbf{F}$  – тензор градиента перемещений;  $\boldsymbol{\varepsilon}_T$  – тензор тепловых деформаций;  $\boldsymbol{\alpha}$  – тензор коэффициентов теплового линейного расширения;  $T$  – темпе-

ратура в точке тела;  $T_{ref}$  – температура, соответствующая нулевой тепловой деформации;

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{[(1+\nu)(1-2\nu)]}, \quad \mu = \frac{E}{[2(1+\nu)]},$$

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij},$$

где  $C_{ijkl}$  – компоненты тензора  $\mathbf{C}$ ;  $E = E(T)$ ,  $\nu = \nu(T)$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала в зависимости от температуры;  $\lambda$ ,  $\mu$  – параметры Ляме материала;  $\alpha_{ij}$  – компоненты тензора  $\mathbf{\alpha}$ ;  $\alpha = \alpha(T)$  – изотропный коэффициент теплового линейного расширения материала в зависимости от температуры;  $\delta_{ij}$  – Кронекерова дельта.

## 1.2. Модель роста трещины

Для описания устойчивого роста трещины от начального дефекта используются следующие основные уравнения [7 – 9]:

$$\Delta l = B \left( \frac{\Delta K_I}{E} \right)^2 N, \quad (1)$$

$$\theta = -\arccos \left[ \frac{(3K_{II}^2 + K_I \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2})}{(K_I^2 + 9K_{II}^2)} \right],$$

где  $\Delta l$  – продвижение фронта трещины за  $N$  циклов нагружения в точке фронта по нормали к нему;  $B = 10$  – эмпирический коэффициент;  $K_I$ ,  $K_{II}$  – коэффициенты интенсивности напряжений (КИНы) для первой и второй мод распространения трещины соответственно;  $\Delta K_I$  – размах  $K_I$  в цикле нагружения;  $\theta$  – угол поворота вектора распространения трещины в точке фронта.

Новый фронт трещины представляет собой годограф вектора  $(\Delta l, \theta, 0)$ , координаты которого определены в локальной цилиндрической системе  $(R, \Theta, Z)$  с началом в рассматриваемой точке текущего фронта трещины и осью  $Z$  касательной к кривой фронта. Прямая  $\Theta = 0$  проходит через соответствующие точки текущего и предыдущего фронтов.

Моделирование роста трещины проводится пошагово от начального дефекта путём построения нового фронта трещины относительно предыдущего. Значение  $N$  берётся из предположения малого отклонения определяемых значений  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $\Delta K_I$  от среднего значения за данное количество циклов нагружения. В выполненных численных исследованиях допустимое отклонение величин определяемых переменных не превышало 5%.

### 1.3. КЭ-сетка

**КЭ-модели для определения расположения опасных зон.** Для реализации преимуществ автоматической генерации КЭ-сеток использовались элементы tetra второго порядка пространственной аппроксимации (C3D10 в терминологии ABAQUS [19]). Сеточная сходимость решения о НДС рассматриваемой детали обеспечивалась путём применения специальных правил при генерации сетки:

- 1) соотношение длин сторон элементов, прилегающих к поверхности детали, должно быть близким к единице;
- 2) число элементов на скруглении должно быть пять или более;
- 3) число элементов по толщине стенки детали должно быть пять или более.

Указанные правила основываются на проведённых исследованиях сеточной сходимости на концентраторах напряжений для типовых деталей. Генерация сетки, основанная на этих правилах, позволяет избежать повторения подобных исследований для каждой новой детали, имеющей рассмотренные ранее виды концентраторов напряжений. Выработанные рекомендации иллюстрируются на примере нескольких сеточных моделей, показанных на рис. 1. Тетраэдральная сетка на рис. 1, б сгенерирована на основе правил, а сетки на рис. 1, а и 1, в соответственно в два раза грубее и в два раза мельче сетки рис. 1, б. На рис. 1, г приведена сетка гексагональных элементов второго порядка пространственной аппроксимации неполного интегрирования (C3D20R в терминологии ABAQUS [19]), плотность которой близка к сетке на рис. 1, в.

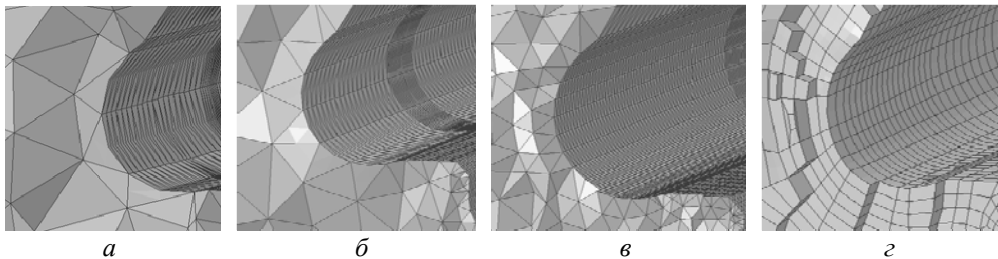


Рис. 1. Исследование сеточной сходимости напряжённо-деформированного состояния

Численные эксперименты показывают, что на сетке рис. 1, б максимальное первое главное напряжение  $\sigma_{1\max}$  на концентраторе отличается от соответствующего значения на сетке рис. 1, а на 0,63%; от значения на сетке рис. 1, в – на 0,08%; а от значения на сетке рис. 1, г – на 2,0%. Сравнительный анализ показывает, что выработанные правила генерации сетки обеспечивают сеточную сходимость численных решений по  $\sigma_{1\max}$  на скруглении. Аналогичный анализ проведён для прочих видов типовых концентраторов напряжений и применяемых к ним правил построения сетки.

На рис 2, а и 2, б показана типичная КЭ-модель диска осевого компрессора. Угол репрезентативного сектора в данном случае составляет  $10^\circ$ . Сетка состоит из 140 тыс. элементов tetra и 218 тыс. узлов.

**Сфокусированная сетка вокруг фронта трещины.** На рис. 2, в показан фрагмент сетки диска, используемой для моделирования роста трещины. Трещина отображена толстой линией, мелкая сетка вокруг фронта трещины выделена тёмным тонированием граней элементов. Сетка сектора диска с трещиной и соответствующим локальным измельчением в зависимости от длины трещины может содержать до 2 млн элементов tetra и 2,5 млн узлов.

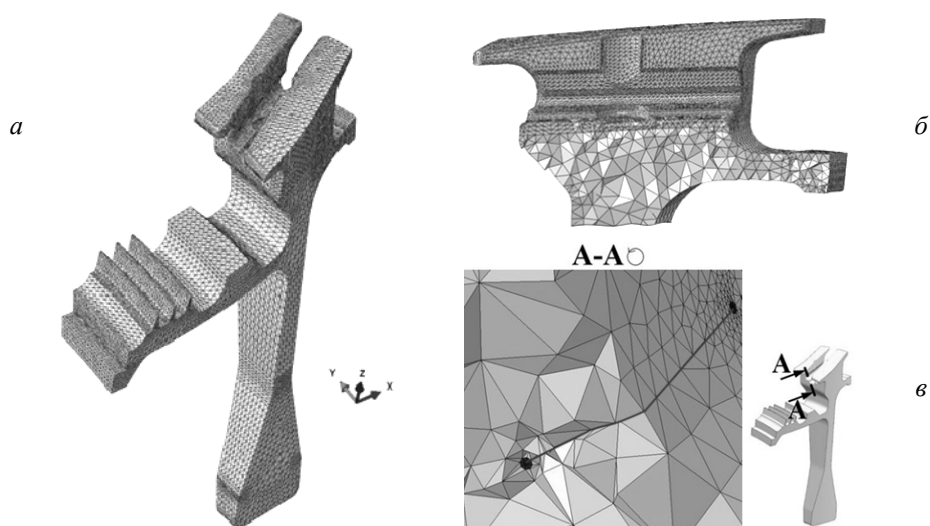


Рис. 2. КЭ-сетка диска (а), фрагмент сетки диска в районе лопаточного замка (б), разрез сетки диска поперёк трещины (в)

НДС в окрестности фронта трещины вычисляется на подмодели из элементов hexa второго порядка пространственной аппроксимации (C3D20 в терминологии ABAQUS [19]). В подмодели используется специальная сфокусированная сетка, пример которой для начального фронта показан на рис. 3, а. Соответствующий фрагмент КЭ-сетки детали вокруг фронта трещины показан на рис. 3, б. Узлы на внешней поверхности подмодели совпадают в пространстве с соответствующими узлами фрагмента модели для точного приложения граничного условия Дирихле – заданного перемещения точек из решения для модели детали.

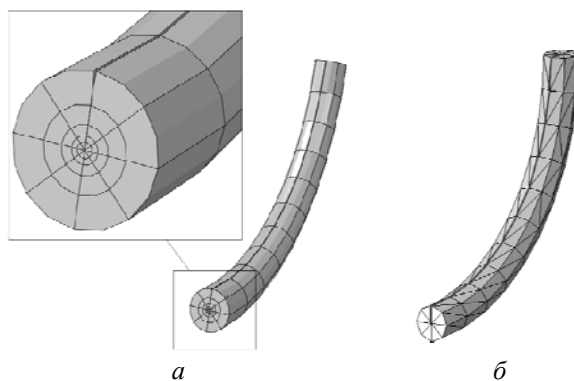


Рис. 3. Пример сетки подмодели (а) и соответствующий фрагмент модели детали (б)

Компоненты тензора напряжений плоского деформированного состояния вблизи фронта трещины описываются следующими уравнениями [3 – 5] (рис. 4, а):

$$\sigma_{ij} = \sum_k \left[ \frac{K_k}{\sqrt{2\pi r}} \right] f_{ijk}(\Theta), \quad (2)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений Коши;  $i, j = 1, 2$  – номера осей локальной СК (рис. 4, б);  $K_k$  – КИН  $k$ -й моды;  $k = I, II$ , т.к. учитываются только  $K_I$  и  $K_{II}$ ;  $r$  – рассто-

яние от рассматриваемой точки на фронте трещины в плоскости сечения;  $f_{ijk}(\Theta)$  – функция, зависящая от угла  $\Theta$ .

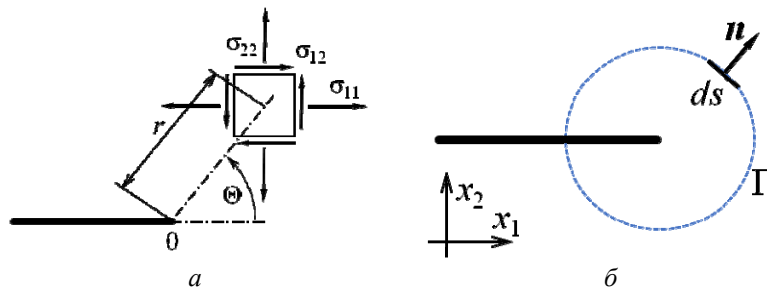


Рис. 4. Локальная полярная СК ( $r, \Theta$ ) и НДС в плоскости сечения в окрестности фронта трещины (а), локальная декартова СК и контур  $\Gamma$  вокруг фронта трещины для расчёта  $J$ -интеграла (б)

На рис. 4 показано сечение близкой окрестности фронта; трещина показана толстой линией; плоскость сечения нормальна касательной к фронту в его рассматриваемой точке.

Коэффициенты интенсивности напряжений  $K_k$  вычисляются через значения  $J$ -интеграла [3 – 5; 20; 21], которые рассчитываются вдоль замкнутого пути вокруг фронта трещины в рассматриваемом сечении (рис. 4, б). Такой путь в подмодели представлен границей одного кольца элементов, прилегающих к рассматриваемому сечению.

$$K_k = \sqrt{\frac{G_k E}{(1-\nu^2)}},$$

$$G_k = J_k = \int_{\Gamma} \left( W dx_j - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right) ds \right), \quad W = \int_0^{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon},$$

где  $G_k$  – скорость высвобождения упругой энергии по  $k$ -й моде;  $J_k$  –  $J$ -интеграл по  $k$ -й моде;  $k = i, i \neq j; i, j = 1, 2$  – номера осей локальной СК;  $W$  – плотность упругой энергии;  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к пути  $\Gamma$ ;  $s$  – естественная координата вдоль пути.

Внутреннее кольцо элементов подмодели (рис. 3, а) имеет радиус  $\sim 1$  мкм и состоит из вырожденных hexa элементов второго порядка пространственной аппроксимации: ребра элементов на фронте трещины имеют нулевую длину. Узлы элементов на рёбрах, прилегающих к фронту, сдвинуты из положения  $1/2$  длины ребра в положение  $1/4$  длины ребра от фронта трещины. Указанная модификация приводит к тому, что поле напряжений в элементе имеет сингулярность пропорциональную  $1/\sqrt{r}$ . Таким образом, в окрестности фронта трещины воспроизводится теоретическое решение, описываемое уравнением (2).

Параметры сетки подмодели и соответствующего фрагмента модели детали, достаточные для вычисления величин КИН с отклонением от полностью сошедшегося значения в пределах 5%, получены в ходе соответствующих исследований сеточной сходимости. В результате при построении сетки подмодели применялись следующие правила:

1. Количество элементов по окружности  $n_{\Theta} = 8$ .
2. Количество колец элементов в радиальном направлении  $n_R = 7$ .
3. Соотношение длин сторон элементов в радиальном и окружном направлениях должно быть одинаковым, определяемым параметрами  $n_R$  и  $n_{\Theta}$ .
4. Соотношение длин сторон элементов в радиальном и осевом направлениях должно быть одинаковым для всех элементов подмодели и не превышать 20.
5. Разрешение сетки подмодели в 10 – 20 элементов вдоль начального фронта трещины является достаточным. Данный параметр в совокупности с прочими перечисленными параметрами и правилами определяет наружный радиус подмодели. Для последующих расчётных шагов наружный радиус подмодели и соотношение длин сторон элементов в радиальном и осевом направлениях сохранялись постоянными.
6. Для фрагмента модели детали, соответствующего подмодели, достаточным является наличие одного кольца из элементов tetra.

#### **1.4. Нижняя релаксация прироста трещины**

Схема моделирования распространения трещины, описанная в разделе 1.2, является явной и её устойчивость ограничена величиной  $\Delta l$  продвижения фронта трещины за расчётный шаг. При моделировании распространения трещины до большой длины ( $l_{\max}/l_0 > 10...20$ , где  $l_0$  – размер начального дефекта;  $l_{\max}$  – длина трещины на последнем расчётном шаге) и увеличении  $\Delta l$  неизбежно возникают колебания расчётных фронтов трещины. Для подавления этих колебаний в настоящей работе использовался метод сглаживания – нижняя релаксация (подрелаксация):

$$K^{[u]} = K^{[i]}URF + K^{[i-1]}(1 - URF),$$

где  $K = K_I$  или  $K_{II}$ ;  $URF \in [0,1]$  – коэффициент нижней релаксации; индексы означают:  $[u]$  – релаксированное значение;  $[i]$ ,  $[i-1]$  – значение с текущего и предыдущего расчётного шага соответственно.

## **2. Результаты расчётов**

Методика, описанная в разделе 1, даёт возможность точного моделирования устойчивого роста трещин в основных деталях АГТД, таких как диски ротора. Важным аспектом процесса моделирования является количество точек, задействованное при построении нового фронта трещины на расчётном шаге. В данной работе для построения нового фронта использовались все точки текущего фронта. В зависимости от текущей длины трещины число точек варьировалось от десяти на фронте начального дефекта и до 4 тыс. на последних фронтах сравнительно длинных трещин. Для автоматического построения сеток подмоделей, обработки результатов, связанных с вычислением прироста трещины в каждой точке, и построения новых фронтов трещины на расчётных шагах использовалась программа, специально написанная на языке программирования C++ [22]. Данная программа обеспечила практическое применение рассматриваемой методики моделирования с приемлемыми трудозатратами. Пример, демонстрирующий важность высокого сеточного разрешения модели вдоль фронта трещины, показан на рис. 5.

На рис. 5, б белой точкой показано расположение очага трещины, на рис. 5, в поверхность трещины представлена серией фронтов, полученных на расчётных шагах. Показанный вид соответствует направлению проецирования, при котором площадь



проекции поверхности трещины максимальна. На рис. 5, *г* показан график размаха  $K_I$  вдоль последнего расчётного фронта трещины, показанного серой линией на рис. 5, *в*. Нулевая относительная координата на графике соответствует нижнему левому краю трещины на рис. 5, *в*. Обозначено [7 – 10]:

$$\Delta K_{2-3} = E \sqrt{\frac{\Delta l_{2-3}}{B}}, \quad \Delta l_{2-3} = 2 \text{ мкм.}$$

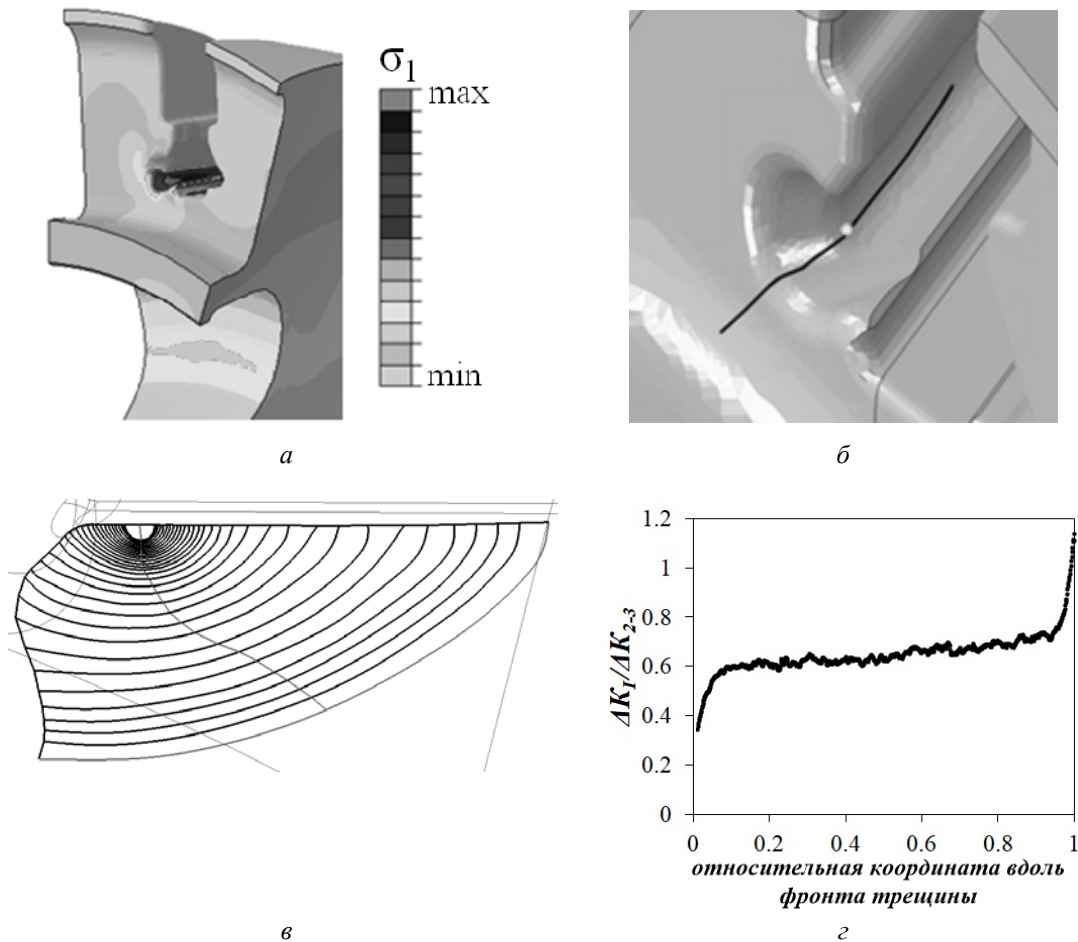


Рис. 5. Поле первого главного напряжения в опасной зоне (а); трещина на наружной поверхности диска (б); расчётные фронты трещины (в); размах  $K_I$  вдоль последнего расчётного фронта (г)

Форма кривой, показанной на рис. 5, *г*, может быть объяснена конфигурацией НДС в опасной зоне (рис. 5, *а*). Правый верхний край трещины на рис. 5, *в* в ходе её роста движется вдоль скругления дна замкового паза и всегда находится в высоконапряжённой области. Нижний левый край трещины движется вниз по боковой поверхности диска в менее напряжённую область. Такое состояние объясняет быстрый рост размаха КИН на правом краю трещины и снижение на левом. В данном случае, если бы новые фронты на расчётных шагах строились на основе малого количества точек в средней части текущего фронта, как это обычно бывает при осуществлении отраслевой методи-

ки моделирования без широкого применения автоматизации, то был бы высок риск упустить указанный эффект и спрогнозировать завышенную долговечность.

На рис. 6, а показаны две серии расчётных фронтов трещины. Пунктирные линии соответствуют решению с умеренно крупным шагом  $\Delta l$  без применения подрелаксации, описанной в разделе 1.4. Сплошные линии соответствуют решению с тем же шагом  $\Delta l$ , но с применением подрелаксации. На рис. 6, б для сравниваемых решений показаны кривые  $\Delta K_I(l)$ : 1 – без подрелаксации; 2, 3 – с подрелаксацией. Данная нумерация сохраняется и на рис. 6, г. Для решения без подрелаксации наблюдаются существенные колебания расчётных фронтов, в то время как решение с подрелаксацией обеспечивает стабильность. Проведённые исследования показывают, что подрелаксация величин КИН позволяет увеличить размер  $\Delta l$  примерно в два раза – с  $\Delta l \sim (0,05 - 0,15)l$  до  $\Delta l \sim (0,1 - 0,3)l$  без появления колебаний расчётных фронтов. Верхнее значение  $\Delta l$  соответствует меньшей величине  $l$  (начальная стадия роста трещины), нижнее – большей  $l$  (длинная трещина).

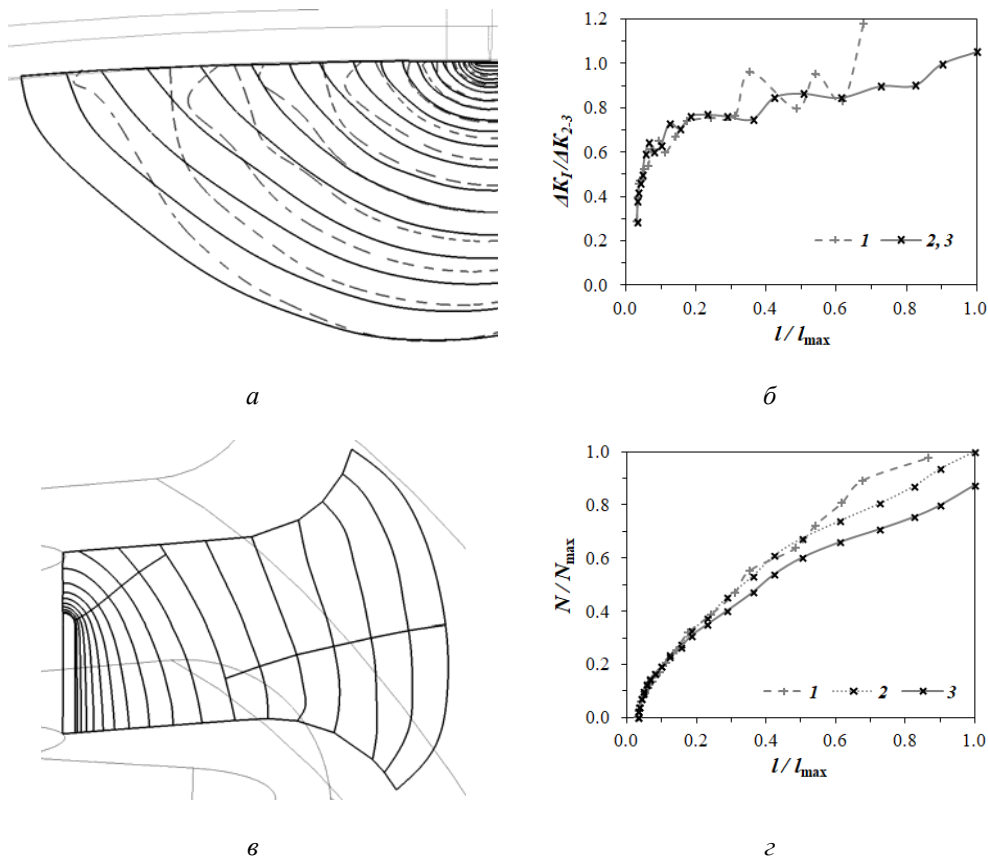


Рис. 6. Сравнение расчётных фронтов трещин для решения с подрелаксацией и без (а); график  $\Delta K_I(l)$  (б); кривая для пересчёта долговечности (в); график  $N(l)$  (г)

На рис. 6, б и 6, г обозначено:  $l$  – текущая длина трещины;  $l_{max}$  – максимальная длина трещины для кривых 1 – 3;  $N_{max}$  – максимальное значение  $N$  для кривых 1 – 3.

$$\frac{d(\Delta K_k)}{dN} = \left( \frac{d(\Delta K_k)}{dl} \right) \left( \frac{dl}{dN} \right), \quad k = I, II, \quad (3)$$

$$\frac{dl}{dN} \neq 0 \rightarrow \frac{d(\Delta K_I)}{dN} = 0, \text{ только если } \frac{d(\Delta K_I)}{dl} = 0, \quad (4)$$

$$K_{II} \approx 0 = \text{const} \rightarrow \frac{dK_{II}}{dl} = 0.$$

Из уравнений (3), (4) следует, что подрелаксация  $\Delta K_I$  не влияет на прогнозируемую долговечность, если  $\frac{d(\Delta K_I)}{dl} = 0$ . Это означает, что после решения с подрелаксацией необходим пересчёт прогнозируемой долговечности для построенной серии расчётных фронтов. Пересчёт производится по уравнению (1) вдоль кривой, соединяющей соответствующие точки последовательности расчётных фронтов. Данная кривая, пример которой показан на рис. 6, в сплошной линией, пересекающая расчётные фронты, должна быть перпендикулярна к расчётным фронтам в точках пересечения. Так как каждый расчётный фронт является изохорой, то кривая для пересчёта долговечности может состоять из нескольких отдельных отрезков. На рис. 6, з кривая 2 соответствует решению с подрелаксацией до пересчёта долговечности, а кривая 3 – после пересчёта.

Если рассматриваемая трещина распространяется в правильном направлении, то на расчётных шагах  $K_{II} \approx 0 = \text{const}$ . Это означает, что подрелаксация  $K_{II}$  имеет минимальное влияние на решение.

### Заключение

В статье приведены некоторые результаты моделирования стабильного роста трещин в основных силовых деталях АГТД на основе отраслевой методики [7 – 10]. Численно исследованы важные аспекты практического моделирования, включая построение КЭ-сеток деталей достаточного качества, основанное на выработанных правилах, обеспечивающих сходимость численных решений; подчеркивается необходимость высокого разрешения КЭ-модели вдоль фронта трещины совместно с высокой автоматизацией процесса моделирования для повышения точности решений. Для снижения трудоёмкости моделирования устойчивого роста трещины предложена методика сглаживания колебаний расчётных фронтов трещины – нижняя релаксация, позволяющая снизить трудозатраты примерно на 50%. Последующее развитие рассматриваемой методики может включать использование альтернативных критериев для определения опасных зон на поверхности детали и расчётной временной точки по типовому полётному циклу.

### Библиографический список

1. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 1921. V. 221, Iss. 582-593 P. 163-198. DOI: 10.1098/rsta.1921.0006
2. Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // Journal of Applied Mechanics. 1957. V. 24, Iss. 3. P. 361-364. DOI: 10.1115/1.4011547
3. Брок Д. Основы механики разрушения. М.: Высшая школа, 1980. 368 с.
4. Gdoutos E.E., Rodopoulos C.A., Yates J.R. Problems of fracture mechanics and fatigue: A solution guide. London, UK: Springer, 2003. 618 p. DOI: 10.1007/978-94-017-2774-7

5. Anderson T.L. Fracture mechanics. Fundamentals and applications. New York, USA: CRC Press, 2017. 661 p.

6. Paris P., Erdogan F. A critical analysis of crack propagation laws // Journal of Basic Engineering (Transactions of the ASME). 1963. V. 12, Iss. 4. P. 528-533. DOI: 10.1115/1.3656900

7. Туманов Н.В., Лаврентьева М.А. Прогнозирование циклической долговечности дисков авиадвигателей на основе моделирования устойчивого роста трещин малоциклового усталости // Авиационные двигатели. 2019. № 1 (2). С. 37-48. DOI: 10.54349/26586061\_2019\_1\_37

8. Туманов Н.В. Кинетическое уравнение устойчивого роста трещин малоциклового усталости // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва (национального исследовательского университета). 2014. № 5 (47), ч. 1. С. 18-26. DOI: /10.18287/1998-6629-2014-0-5-1(47)-18-26

9. Туманов Н.В. Физико-механические аспекты устойчивого роста усталостных трещин // Вестник Московского авиационного института. 2011. Т. 18, № 2. С. 132-136.

10. Ножницкий Ю.А., Туманов Н.В., Черкасова С.А., Лаврентьева М.А. Фрактографические методы определения остаточного ресурса дисков авиационных газотурбинных двигателей // Вестник УГАТУ. 2011. Т. 15, № 4 (44). С. 39-45.

11. Рыбин В.В. Большие пластические деформации и разрушение металлов. М.: Металлургия, 1986. 224 с.

12. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. The finite element method for solid and structural mechanics. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2014. 624 p. DOI: 10.1016/C2009-0-26332-X

13. Belytschko T., Liu W.K., Moran B., Elkhodary K.I. Nonlinear finite elements for continua and structures. Chichester, UK: Wiley, 2014. 804 p.

14. Rege K., Lemu H.G. A review of fatigue crack propagation modelling techniques using FEM and XFEM // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2017. V. 276, Iss. 1. DOI:10.1088/1757-899X/276/1/012027

15. Abaqus unified FEA. Complete solutions for realistic simulation. <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/>

16. Moës N., Dolbow J., Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1999. V. 46, Iss. 1. P. 131-150. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J

17. Khoei A.R. Extended finite element method. Theory and applications. Chichester, UK: Wiley, 2015. 602 p.

18. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. Cambridge, USA: Cambridge University Press, 2008. 315 p.

19. 3DS SIMULIA User Assistance 2021 / Abaqus Online Documentation. <https://help.3ds.com/>

20. Черепанов Г.П. Распространение трещин в сплошной среде // Прикладная математика и механика. 1967. Т. 31, № 3. P. 476-488.

21. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // Journal of Applied Mechanics (Transactions ASME). 1964. V. 35, Iss. 2. P. 379-388. DOI: 10.1115/1.3601206

22. ISO/IEC JTC1/SC22/WG21 – The C++ Standards Committee – ISOCPP. <http://www.open-std.org/jtc1/sc22/wg21/>

## ASPECTS OF SIMULATING STABLE LOW-CYCLE FATIGUE CRACK GROWTH IN THE MAIN PARTS OF AIRCRAFT GAS TURBINE ENGINES

© 2022

- A. A. Ryabov** Doctor of Science (Phys. & Math.), Director;  
Sarov Engineering Center Ltd., Sarov, Russian Federation;  
[alex.ryabov@saec.ru](mailto:alex.ryabov@saec.ru)
- K. Yu. Mokhov** Head of Department;  
Sarov Engineering Center Ltd., Sarov, Russian Federation;  
[kmokhov@saec.ru](mailto:kmokhov@saec.ru)
- O. V. Voronkov** Candidate of Science (Engineering); Senior Research Associate;  
Sarov Engineering Center Ltd., Sarov, Russian Federation;  
[ovoronkov@saec.ru](mailto:ovoronkov@saec.ru)
- A. Yu. Kudryavtsev** Candidate of Science (Phys. & Math.), Head of Department;  
Sarov Engineering Center Ltd., Sarov, Russian Federation;  
[kudryavtsev@saec.ru](mailto:kudryavtsev@saec.ru)
- A. A. Museev** Head of Simulation Department;  
JSC UEC-Klimov, Saint Petersburg, Russian Federation;  
[museev\\_aa@klimov.ru](mailto:museev_aa@klimov.ru)

The article presents theoretical basis for the industry-based approach for finite element modeling of stable crack growth in the main parts of an aviation gas turbine engine. An axial compressor disc is used as an example. Parameters of typical FE-models applied are provided. In addition, some effective practices of FE-modeling representing the novelty of this work are described: crack evolution increment under-relaxation and automation of the process of constructing a new crack front. Some simulation results are presented demonstrating implementation of the approach steps and benefits gained from the application of the listed features. Under-relaxation ensures maintaining the stability of a numerical solution for a significantly larger crack increment size. This leads to essential effort decrease as a result of reducing the total number of simulation cycles required. Automatic construction of a new crack front allows significant improvement in crack representation accuracy during the simulation process due to the greater number of points for which crack front evolution is determined.

*Aircraft gas turbine engine; low-cycle fatigue; stable crack growth; finite-element modeling; under-relaxation*

---

*Citation:* Ryabov A.A., Mokhov K.Yu., Voronkov O.V., Kudryavtsev A.Yu., Museev A.A. Aspects of simulating stable low-cycle fatigue crack growth in the main parts of aircraft gas turbine engines. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2022. V. 21, no. 3. P. 127-140. DOI: 10.18287/2541-7533-2022-21-3-127-140

### References

1. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 1921. V. 221, Iss. 582-593 P. 163-198. DOI: 10.1098/rsta.1921.0006
2. Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*. 1957. V. 24, Iss. 3. P. 361-364. DOI: 10.1115/1.4011547
3. Broek D. Elementary engineering fracture mechanics. Netherlands, Leiden, 1974.
4. Gdoutos E.E., Rodopoulos C.A., Yates J.R. Problems of fracture mechanics and fatigue: A solution guide. London, UK: Springer, 2003. 618 p. DOI: 10.1007/978-94-017-2774-7
5. Anderson T.L. Fracture mechanics. Fundamentals and applications. New York, USA: CRC Press, 2017. 661 p.
6. Paris P., Erdogan F. A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering (Transactions of the ASME)*. 1963. V. 12, Iss. 4. P. 528-533. DOI: 10.1115/1.3656900

7. Tumanov N.V., Lavrentyeva M.A. Prediction of aero engine discs cyclic life based on modeling the steady growth of low cycle fatigue cracks. *Aviation Engines*. 2019. No. 1 (2). P. 37-48. (In Russ.). DOI: 10.54349/26586061\_2019\_1\_37

8. Tumanov N.V. Kinetic equation of stable growth for low cycle fatigue cracks. *Vestnik of the Samara State Aerospace University*. 2014. No. 5 (47), part 1. P. 18-26. (In Russ.). DOI: /10.18287/1998-6629-2014-0-5-1(47)-18-26

9. Tumanov N.V. Physical and mechanical aspects of stable fatigue crack growth. *Aerospace MAI Journal*. 2011. V. 18, no. 2. P. 132-136. (In Russ.)

10. Nozhnitsky Yu.A., Tumanov N.V., Cherkasova S.A., Lavrentyeva M.A. Fractographic methods of residual life estimation for aero engine disks. *Vestnik UGATU*. 2011. V. 15, no. 4 (44). P. 39-45. (In Russ.)

11. Rybin V.V. *Bol'shie plasticheskie deformatsii i razrushenie metallov* [Large plastic deformations and failure of metals]. Moscow: Metallurgiya Publ., 1986. 224 p.

12. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. The finite element method for solid and structural mechanics. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2014. 624 p. DOI: 10.1016/C2009-0-26332-X

13. Belytschko T., Liu W.K., Moran B., Elkhodary K.I. Nonlinear finite elements for continua and structures. Chichester, UK: Wiley, 2014. 804 p.

14. Rege K., Lemu H.G. A review of fatigue crack propagation modelling techniques using FEM and XFEM. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2017. V. 276, Iss. 1. DOI:10.1088/1757-899X/276/1/012027

15. Abaqus unified FEA. Complete solutions for realistic simulation. Available at: <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/>

16. Moës N., Dolbow J., Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1999. V. 46, Iss. 1. P. 131-150. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J

17. Khoei A.R. Extended finite element method. Theory and applications. Chichester, UK: Wiley, 2015. 602 p.

18. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. Cambridge, USA: Cambridge University Press, 2008. 315 p.

19. 3DS SIMULIA User Assistance 2021. Available at: <https://help.3ds.com/>

20. Cherepanov G.P. The propagation of cracks in a continuous medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1967. V. 31, Iss. 3. P. 503-512. DOI: 10.1016/0021-8928(67)90034-2

21. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics (Transactions ASME)*. 1964. V. 35, Iss. 2. P. 379-388. DOI: 10.1115/1.3601206

22. ISO/IEC JTC1/SC22/WG21 – The C++ Standards Committee – ISOCPP. Available at: <http://www.open-std.org/jtc1/sc22/wg21/>