

ФОРМИРОВАНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ КОЛЬЦЕОБРАЗНОЙ ТРОСОВОЙ ГРУППИРОВКИ ИЗ ТРЁХ НАНОСПУТНИКОВ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА УПРАВЛЕНИЕ

© 2022

Шумин Чэнь

аспирант кафедры программных систем;
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва;
csm.ssau@yandex.ru

Ю. М. Заболотнов

доктор технических наук; профессор,
профессор кафедры программных систем;
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королёва;
yumz@yandex.ru

Рассматривается задача формирования кольцеобразной вращающейся тросовой группировки, состоящей из трёх наноспутников. Для анализа динамики тросовой системы используется математическая модель, построенная в подвижной орбитальной системе координат методом Лагранжа. С применением метода скользящих режимов предложены две программы управления для развёртывания тросов, в которых в качестве управлений используются силы натяжения тросов и реактивные силы, создаваемые двигателями малой тяги. В первой программе управляющие воздействия непосредственно ограничены допустимыми пределами изменения сил натяжения тросов и реактивных сил, а при построении второй программы в систему управления вводится вспомогательная динамическая система, которая вводит поправки к управлению, учитывающие эффект насыщения. Устойчивость движения тросовой группировки для обеих программ управления исследуется с использованием теории Ляпунова. Приводятся результаты численных расчётов, подтверждающие возможность использования предлагаемых программ управления для формирования тросовой группировки в виде вращающегося правильного треугольника при наличии возмущений и с учётом заданных ограничений.

Наноспутники; треугольная тросовая группировка; развёртывание тросов; динамика системы; скользящий режим управления; ограничения на управление; устойчивость движения системы

Цитирование: Чэнь Шумин, Заболотнов Ю.М. Формирование вращающейся кольцеобразной тросовой группировки из трёх наноспутников с ограничением на управление // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2022. Т. 21, № 3. С. 69-84.
DOI: 10.18287/2541-7533-2022-21-3-69-84

Введение

Тросовая группировка космических аппаратов (ТГКА) – это космическая тросовая система (КТС) нового типа, имеющая определённую геометрическую конфигурацию и совершающая согласованный полёт по орбите [1 – 2]. Технологии, связанные с ТГКА, особенно подходят для выполнения определённых космических миссий, таких как многоточечные распределённые измерения в космосе, космическая интерферометрия и т.д. Считается, что ТГКА имеет определённые преимущества по сравнению с использованием обычных орбитальных группировок, в которых космические аппараты (КА) не связаны между собой механическими связями. В отличие от последних космических систем ТГКА характеризуется наличием протяжённых лёгких связей (тросов) между КА. В связи с этим она может функционировать на орбите при сохранении своей рабочей геометрической конфигурации в течение длительного времени с малым расходом топлива [3 – 5], которое всегда ограничено.

Большое количество исследований было посвящено изучению динамики и управлению движением КТС, состоящих из двух КА. Например, можно отметить работы

[6 – 8]. Однако вопросы, связанные с формированием ТГКА более сложных геометрических конфигураций, ещё недостаточно изучены и требуют дальнейшего рассмотрения. В частности, исследованию ТГКА, состоящих из нескольких наноспутников (НС) [9], уделяется большое внимание в связи с тем, что такой класс ТГКА имеет большие возможности для создания на орбите протяжённых конструкций при сравнительно низких затратах.

Управление движением тросовых группировок НС имеет свои особенности. Как правило это системы, стабилизируемые вращением, которое, в частности, обеспечивает натяжение тросов за счёт действия центробежных сил инерции. Особенно сложным этапом с точки зрения управления является этап формирования вращающейся ТГКА заданной конфигурации [10], что требует разработки соответствующих методов управления. Поскольку тросы должны быть всегда натянутыми (силы натяжения должны быть положительными) в процессе их выпуска, а реактивные силы, создаваемые двигателями малой тяги, ограничены по направлению и модулю из-за небольшого размера НС, то актуальной является задача разработки методов управления с ограничениями на управляющие силы как по направлению, так и по величине.

Настоящая работа посвящена задаче управления формированием кольцеобразной тросовой группировки, в состав которой входят три НС. Предлагается, что в исходном состоянии три НС жёстко соединяются между собой в виде правильного треугольника, который вращается в плоскости орбиты вокруг своего центра масс с некоторой ограниченной по модулю угловой скоростью. Конечное состояние ТГКА – это также правильный треугольник, вращающийся в плоскости орбиты с некоторой заданной угловой скоростью. При анализе процесса формирования тросовых группировок часто рассматривают НС как набор точечных масс, соединённых неупругими невесомыми тросами [11], что упрощает построение уравнений движения системы. Для разработки закона управления выпуском тросов здесь используется скользящий режим управления (СРУ) (в английской интерпретации SMC – Sliding Mode Control) [12], который обладает свойством робастности. Предложены две программы управления для вращающейся треугольной ТГКА при её развёртывании с учётом эффекта насыщения, вызванного ограничениями на управляющие силы. При анализе вопроса устойчивости движения системы используется теория Ляпунова. Проводятся результаты численных моделирований для иллюстрации эффективности предлагаемых программ управления при наличии возмущений.

Математическая модель движения тросовой группировки космических аппаратов

Принимается допущение, что центр масс ТГКА движется по невозмущённой круговой орбите в течение всего процесса формирования системы. Движение системы описывается в орбитальной прямоугольной системе координат $Sxyz$ (рис. 1, а), начало которой находится в центре масс ТГКА, ось Sx направлена по радиус-вектору центра масс системы \mathbf{R}_e , а ось Sy – по направлению движения системы в плоскости орбиты. Для вывода уравнений движения системы используется метод Лагранжа. При этом три НС рассматриваются как материальные точки, а тросы считаются нерастяжимыми и невесомыми механическими связями. Учитывая, что система движется в орбитальной плоскости ($z = 0$), её положение в системе координат $Sxyz$ задаётся совокупностью четырёх обобщённых координат $\mathbf{q} = [l_1, l_2, \theta_1, \theta_2]^T$, здесь l_1, l_2 – длины любых двух тросов, а θ_1, θ_2 – соответствующие углы наклона этих двух тросов к местной верти-

кали (рис. 1, а). В этом случае уравнения движения ТГКА записываются следующим образом [10]:

$$\begin{aligned}
 & m\mu_1(\mu_2 + \mu_3) \left\{ \ddot{l}_1 - l_1 \left[(\dot{\theta}_1 + \omega)^2 + \omega^2 (3 \cos^2 \theta_1 - 1) \right] \right\} + m\mu_1\mu_3 \left\{ -3\omega^2 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \right. \\
 & \left. + \left[\ddot{l}_2 - l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + 2\omega) \right] \cos \Delta\theta + \left[l_2 \ddot{\theta}_2 + 2\dot{l}_2 (\dot{\theta}_2 + \omega) \right] \sin \Delta\theta \right\} = Q_{l_1} + o_1; \\
 & m\mu_3(\mu_1 + \mu_2) \left\{ \ddot{l}_2 - l_2 \left[(\dot{\theta}_2 + \omega)^2 + \omega^2 (3 \cos^2 \theta_2 - 1) \right] \right\} + m\mu_1\mu_3 \left\{ -3\omega^2 l_1 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \right. \\
 & \left. + \left[\ddot{l}_1 - l_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + 2\omega) \right] \cos \Delta\theta - \left[l_1 \ddot{\theta}_1 + 2\dot{l}_1 (\dot{\theta}_1 + \omega) \right] \sin \Delta\theta \right\} = Q_{l_2} + o_2; \\
 & m\mu_1(\mu_2 + \mu_3) l_1^2 \left[\ddot{\theta}_1 + 2(\dot{l}_1/l_1)(\dot{\theta}_1 + \omega) + 3\omega^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \right] + m\mu_1\mu_3 l_1 l_2 \left\{ 3\omega^2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \right. \\
 & \left. + \left[\ddot{\theta}_2 + 2(\dot{l}_2/l_2)(\dot{\theta}_2 + \omega) \right] \cos \Delta\theta + \left[(\dot{\theta}_2 + \omega)^2 - \omega^2 - (\ddot{l}_2/l_2) \right] \sin \Delta\theta \right\} = Q_{\theta_1} + o_3; \\
 & m\mu_3(\mu_1 + \mu_2) l_2^2 \left[\ddot{\theta}_2 + 2(\dot{l}_2/l_2)(\dot{\theta}_2 + \omega) + 3\omega^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 \right] + m\mu_1\mu_3 l_1 l_2 \left\{ 3\omega^2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 + \right. \\
 & \left. + \left[\ddot{\theta}_1 + 2(\dot{l}_1/l_1)(\dot{\theta}_1 + \omega) \right] \cos \Delta\theta + \left[\omega^2 - (\dot{\theta}_1 + \omega)^2 + (\ddot{l}_1/l_1) \right] \sin \Delta\theta \right\} = Q_{\theta_2} + o_4,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$, $m = \sum_{n=1}^3 m_n$ – общая масса ТГКА, m_n – масса n -го НС ($n = \overline{1,3}$),

$\mu_n = m_n/m$, $\omega = \sqrt{G_M/R_e^3}$ – орбитальная угловая скорость центра масс системы, G_M – гравитационный параметр Земли, R_e – модуль радиус-вектора \mathbf{R}_e центра масс ТГКА относительно центра Земли, $Q_{l_1}, Q_{l_2}, Q_{\theta_1}, Q_{\theta_2}$ – обобщённые силы; o_1, o_2, o_3, o_4 – возмущения.

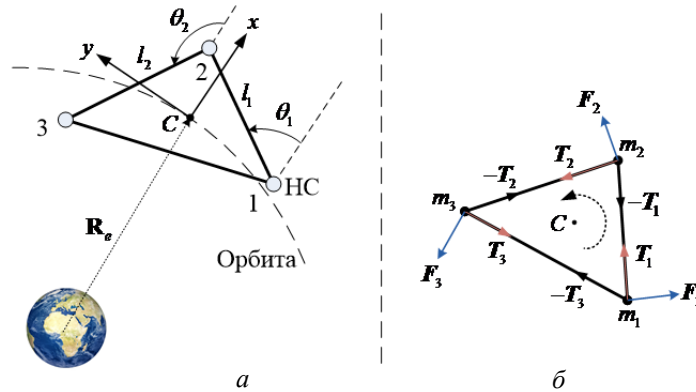


Рис. 1. Схема тросовой группировки космических аппаратов в орбитальной системе координат (а) и действующие на наноспутники силы (б)

При определении обобщённых сил учитываются следующие непотенциальные силы, действующие на каждый НС: 1) силы натяжения $T_n, n = \overline{1,3}$, направленные вдоль каждого троса соответственно; 2) реактивные силы $F_n, n = \overline{1,3}$ ортогональные тросам, причём направления их моментов относительно центра масс системы соответствуют направлению вращения ТГКА (рис. 1, б). В этом случае обобщённые силы определяются в соответствии с принципом возможных перемещений:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= -T_1 - T_3/l_3(l_1 + l_2 \cos \Delta\theta) - \mu_1 \sin \Delta\theta \cdot F_2 + \mu_1 (l_2/l_3) \sin \Delta\theta \cdot F_3; \\
 Q_2 &= -T_2 - T_3/l_3[l_2 + l_1 \cos \Delta\theta] - \mu_3 \sin \Delta\theta \cdot F_1 - (\mu_1 + \mu_2)(l_1/l_3) \sin \Delta\theta \cdot F_3; \\
 Q_{\theta_1} &= (T_3/l_3)l_1 l_2 \sin \Delta\theta + (\mu_2 + \mu_3)l_1 F_1 - \mu_1 l_1 \cos \Delta\theta \cdot F_2 + \mu_1 (l_1/l_3)(l_1 + l_2 \cos \Delta\theta) F_3; \\
 Q_{\theta_2} &= -(T_3/l_3)l_1 l_2 \sin \Delta\theta + \mu_3 l_2 \cos \Delta\theta \cdot F_1 + \mu_3 l_2 F_2 + (\mu_1 + \mu_2)(l_2/l_3)(l_2 + l_1 \cos \Delta\theta) F_3,
 \end{aligned} \tag{2}$$

здесь длина третьего троса $l_3 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \Delta\theta}$.

Программы выпуска тросов с учётом ограничений на управление и анализ устойчивости движения системы

Введём обозначения $x_1 = l_1$, $x_2 = l_2$, $x_3 = \theta_1$, $x_4 = \theta_2$, тогда система уравнений (1) переписывается в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U} + \mathbf{o} \tag{3}$$

где $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \in \mathcal{R}^4$ – вектор состояний системы, $\mathbf{o} = [o_1 \ o_2 \ o_3 \ o_4]^T$ – вектор возмущений, $\mathbf{U} = [u_1 \ \dots \ u_6]^T = [T_1 \ T_2 \ T_3 \ F_1 \ F_2 \ F_3]^T \in \mathcal{R}^6$ – вектор управляющих сил. Матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ и $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ приведены в Приложении. Далее в тексте для матриц $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ и $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ будут использоваться простые обозначения \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{Q} .

Поскольку матрица \mathbf{A} является невырожденной, то уравнение (3) преобразуется к виду

$$\ddot{\mathbf{x}} = \Phi + \Psi \cdot \mathbf{U} + \delta, \tag{4}$$

где $\Phi = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \in \mathcal{R}^{4 \times 1}$, здесь обозначим i -й элемент вектора-столбца Φ через φ_i ; $\Psi = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \in \mathcal{R}^{4 \times 6}$; $\delta = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{o} \in \mathcal{R}^{4 \times 1}$ и δ_i – i -й элемент вектора-столбца δ .

Для разработки программы управления сначала следует уточнить желаемые состояния системы, которые должны быть достигнуты в конечный момент времени. Основная цель состоит в том, чтобы разработать закон управления для обеспечения успешного формирования ТГКА в равностороннюю треугольную конфигурацию, вращающуюся с заданной угловой скоростью в орбитальной плоскости. В этом случае состояние системы должно удовлетворять следующим условиям: 1) тросы должны быть полностью развёрнуты на заданную конечную длину l_d , т.е. $x_1^d = x_2^d = l_d$; 2) сформированная конфигурация должна вращаться вокруг центра масс системы с постоянной скоростью ω_d . Тогда углы наклона тросов к местной вертикали будут изменяться по линейным законам:

$$x_3^d = \omega_d \cdot t_e + \theta_1(0), \quad x_4^d = \omega_d \cdot t_e + \theta_2(0),$$

где t_e – конечное время; $\theta_1(0)$, $\theta_2(0)$ – начальные значения углов.

Случай I. Программа с применением традиционного скользящего режима управления

Цель управления состоит в том, чтобы $x_i, i = \overline{1,4}$ стремились к своим конечным заданным значениям x_i^d при завершении формирования ТГКА. Введём обозначения для отклонений $e_i = x_i - x_i^d$, а поверхность скольжения зададим в виде

$$s_i = c_i \cdot e_i + \dot{e}_i, i = \overline{1,4}, \quad (5)$$

где коэффициенты c_i – положительные константы.

Предлагается следующая программа управления

$$\mathbf{U} = \Psi^{-1}(-\Phi - \mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \text{sign } \mathbf{s}), \quad (6)$$

где $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4]^T$; $\mathbf{s} = [s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4]^T$; $\mathbf{c} = \text{diag}\{c_1, \dots, c_4\}$, $\mathbf{k} = \text{diag}\{k_1, \dots, k_4\}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{diag}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4\}$ – матрицы коэффициентов, $k_i > 0$, $\varepsilon_i > |\delta_i|$, $|\delta_i|$ – максимальные величины возмущений; sign – функция сигнала: $\text{sign } s_i = \begin{cases} 1, & \text{если } s_i > 0 \\ 0, & \text{если } s_i = 0 \\ -1, & \text{если } s_i < 0 \end{cases}$.

Для анализа устойчивости движения системы в качестве функции Ляпунова используются положительно определённые функции:

$$V_i = \frac{1}{2} s_i^2, i = \overline{1,4},$$

производные которых

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= s_i \cdot \dot{s}_i = s_i \cdot (c_i \dot{e}_i + \ddot{e}_i) = s_i [c_i (\dot{x}_i - \dot{x}_i^d) + \ddot{x}_i] = s_i [c_i (\dot{x}_i - \dot{x}_i^d) + \varphi_i + \langle \Psi \cdot \mathbf{U} \rangle_i + \delta_i] = \\ &= s_i [c_i (\dot{x}_i - \dot{x}_i^d) + \varphi_i + \langle \Psi \cdot \Psi^{-1} \cdot (-\Phi - \mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \text{sign } \mathbf{s}) \rangle_i + \delta_i] = \\ &= s_i (-k_i \cdot s_i - \varepsilon_i \cdot \text{sign } s_i + \delta_i) = -k_i s_i^2 - \varepsilon_i |s_i| + \delta_i s_i \leq -k_i s_i^2 \leq 0 \end{aligned}$$

есть отрицательно определённая функция (здесь $\langle \rangle_i$ обозначает i -й элемент вектора-столбца), которая равна нулю только при конечном состоянии системы $\mathbf{s} = 0$. Из этого следует асимптотическая устойчивость движения системы при использовании программы (6).

Однако следует иметь в виду, что сразу после разделения НС имеет место $l_i \ll l_i^d$, что (как показывает анализ) может привести к тому, что значения управляющих сил (сил натяжения тросов) в соответствии с программой (6) будут отрицательны. Это недопустимо, так как при построении математической модели предполагается, что тросы не работают на сжатие с учётом их физических характеристик. Кроме того, очевидно, что реактивные силы не должны создавать моменты противоположного знака по сравнению с заданным направлением вращения системы. Другими словами, величины сил натяжения тросов и направления действия реактивных сил имеют ограничения. Для того, чтобы учесть эти ограничения, можно поступить по-разному. Самый простой способ – это ввести поправки в предлагаемую программу управления следующего вида:

если $u_j < u_j^{\min}$ или $u_j > u_j^{\max}$, то полагается $u_j = u_j^{\min}$, $u_j = u_j^{\max}$, где $u_j, j = \overline{1,6}$ – j -й элемент вектора-столбца \mathbf{U} , а u_j^{\min}, u_j^{\max} – предельные величины управления u_j . Более конкретно, если силы натяжения $T_n < T_{\min}$ или моменты сил $M(F_n) < 0, n = \overline{1,3}$, то полагается $T_n = T_{\min}, F_n = 0$. В этом случае тросы на начальном этапе развёртывания выпускаются с минимально разрешённой силой натяжения T_{\min} , а затем (как только $T_n > T_{\min}$) используется программа (6). Аналогично поступают с ограничением $M(F_n) \geq 0$.

Таким образом, программа управления в рассмотренном случае фактически включает в себя два характерных участка: первый сравнительно небольшой участок – это начальный этап, когда силы натяжения и реактивные силы принимают граничные значения; и второй этап, когда используется программа (6). Однако следует отметить, что недостатком такого подхода прямого внесения поправок в программу управления является то, что в этом случае доказательство устойчивости движения системы с ограничениями невозможно провести с помощью теории Ляпунова и такой подход может быть обоснован только с помощью численного моделирования.

Случай II. Модифицированная программа управления с вспомогательной системой

Идея построения модифицированной программы управления заключается в том, чтобы учесть ограничения непосредственно на этапе построения программы управления с целью удовлетворения условий устойчивости. Предлагаемый ниже закон управления с учётом ограничений можно рассматривать как изменение программы управления, построенной на основе поверхности скольжения, полученной ранее. Модифицированная программа управления характеризуется введением в систему управления вспомогательной динамической системы (ВДС), входом которой является разница между текущими значениями управлений $u_j^n (j = \overline{1,6})$ и их предельными значениями $u_j = \text{sat}(u_j^n)$, т.е. $\Delta u_j = u_j - u_j^n = \text{sat}(u_j^n) - u_j^n$, где функция $\text{sat}(u_j^n)$ имеет вид

$$\text{sat}(u_j^n) = \begin{cases} u_j^{\max}, & u_j^n > u_j^{\max}; \\ u_j^n, & u_j^{\min} < u_j^n < u_j^{\max}; \\ u_j^{\min}, & u_j^n < u_j^{\min}, \end{cases} \quad (7)$$

где $j = \overline{1,6}$.

Введём обозначения $\mathbf{U}^n = [u_1^n \dots u_6^n]^T$ и $\Delta \mathbf{U} = [\Delta u_1 \dots \Delta u_6]^T$. На рис. 2 показана схема системы управления, построенная с учётом рассматриваемых ограничений. Предлагаемый вид ВДС следующий:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_{i,1} = -\xi_{i,1} \cdot \lambda_{i,1} + \lambda_{i,2}; \\ \dot{\lambda}_{i,2} = -\xi_{i,2} \cdot \lambda_{i,2} + \psi_{i,\text{row}} \cdot \Delta \mathbf{U}, \end{cases} \quad (8)$$

где $\psi_{i,\text{row}}$ – i -я вектор-строка матрицы Ψ , $i = \overline{1,4}$. Здесь коэффициенты $\xi_{i,1}, \xi_{i,2}$ должны быть положительными. В этом случае матрица коэффициентов уравнения (8)

$\begin{bmatrix} -\xi_{i,1} & 1 \\ 0 & -\xi_{i,2} \end{bmatrix}$ будет матрицей Гурвица, и тогда при $t \rightarrow \infty$ имеем $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2} \rightarrow 0$.

Пусть $\Lambda_1 = [\lambda_{1,1} \dots \lambda_{4,1}]^T$, $\Lambda_2 = [\lambda_{1,2} \dots \lambda_{4,2}]^T$. Запишем (8) в матричной форме:

$$\begin{cases} \dot{\Lambda}_1 = -\xi_1 \cdot \Lambda_1 + \Lambda_2; \\ \dot{\Lambda}_2 = -\xi_2 \cdot \Lambda_2 + \Psi \cdot \Delta U, \end{cases}$$

где $\xi_1 = \text{diag}\{\xi_{1,1}, \dots, \xi_{4,1}\}$, $\xi_2 = \text{diag}\{\xi_{1,2}, \dots, \xi_{4,2}\}$.

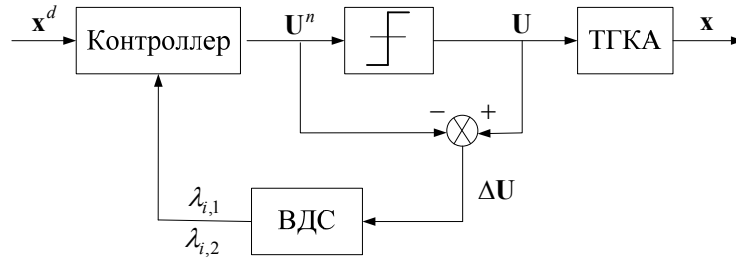


Рис. 2. Схема системы управления с вспомогательной динамической системой

В этом случае вектор ошибок определяется как $\mathbf{e} = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4]^T$, где $e_i = x_i - x_i^d - \lambda_{i,1}$. Соответственно производная ошибки по времени имеет вид: $\dot{e}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_i^d + c_{i,1} \cdot \lambda_{i,1} - \lambda_{i,2}$. Далее структура поверхности скольжения задаётся такая же, как ранее (5): $s_i = c_i \cdot e_i + \dot{e}_i$. В этом случае программа управления примет вид

$$\mathbf{U}^n = \Psi^{-1} \left[-\Phi - \mathbf{c} \cdot \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{s} - \xi_1 (-\xi_1 \cdot \Lambda_1 + \Lambda_2) - \xi_2 \cdot \Lambda_2 - \varepsilon \cdot \text{sign} \mathbf{s} \right]. \quad (9)$$

Производные по времени для поверхности скольжения определяются как

$$\begin{aligned} \dot{s}_i &= c_i \cdot \dot{e}_i + \ddot{e}_i = c_i \cdot \dot{e}_i + (\ddot{x}_i - \ddot{x}_i^d - \ddot{\lambda}_{i,1}) = c_i \cdot \dot{e}_i + \ddot{x}_i + c_{i,1} \cdot \dot{\lambda}_{i,1} - \dot{\lambda}_{i,2} = \\ &= c_i \cdot \dot{e}_i + \varphi_i + \langle \Psi \cdot \mathbf{U} \rangle_i + \delta_i + c_{i,1} \cdot (-c_{i,1} \cdot \lambda_{i,1} + \lambda_{i,2}) - (-c_{i,2} \cdot \lambda_{i,2} + \psi_{i,\text{row}} \cdot \Delta U) = \\ &= c_i \cdot \dot{e}_i + \varphi_i + \delta_i + \langle \Psi \cdot (\mathbf{U} - \Delta \mathbf{U}) \rangle_i + c_{i,1} \cdot (-c_{i,1} \cdot \lambda_{i,1} + \lambda_{i,2}) + c_{i,2} \cdot \lambda_{i,2} = \\ &= c_i \cdot \dot{e}_i + \varphi_i + \delta_i + \langle \Psi \cdot \mathbf{U}^n \rangle_i + c_{i,1} \cdot (-c_{i,1} \cdot \lambda_{i,1} + \lambda_{i,2}) + c_{i,2} \cdot \lambda_{i,2} = \\ &= -k_i \cdot s_i - \varepsilon_i \cdot \text{sign} s_i + \delta_i. \end{aligned}$$

Далее, определяя полную производную по времени от функции Ляпунова, найдём

$$\dot{V}_i = s_i \cdot \dot{s}_i = s_i (-k_i \cdot s_i - \varepsilon_i \cdot \text{sign} s_i + \delta_i) \leq -k_i s_i^2 \leq 0.$$

Поскольку производные \dot{V}_i есть определённо отрицательные функции, то движение системы (1) с управлением (9) и с ограничением (7) асимптотически устойчиво.

Следует отметить, что при $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2} \rightarrow 0$ и $e \rightarrow 0, \dot{e} \rightarrow 0$ обеспечиваются условия $x_i \rightarrow x_i^d$ и $\dot{x}_i \rightarrow \dot{x}_i^d$, из чего следует выполнение целевой задачи системы управления. С другой стороны, как следует из вида ВДС (8), ограниченность ΔU является необходимым условием для выполнения $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2} \rightarrow 0$, что определяет желаемые свойства применения предложенной программы управления.

Численные результаты и их анализ

Для иллюстрации применения предлагаемых программ управления проводится численное моделирование процесса формирования рассматриваемой ТГКА. При этом были приняты следующие исходные данные: высота орбиты $H = 500$ км, масса НС $m_n = 10$ кг ($n = \overline{1,3}$), начальная длина тросов и начальная скорость выпуска $l(0) = 1$ м, $\dot{l}(0) = 0,05$ м/с, начальные углы наклона тросов к местной вертикали и их начальные скорости $\theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 2\pi/3, \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0,1$ рад/с. Желательно, чтобы в конечный момент времени ТГКА была полностью развёрнута и выполнялись следующие условия: $l_n^d = 100$ м, $\dot{l}_n^d = 0, \dot{\theta}_1^d = \dot{\theta}_2^d = \omega_d = \text{const}$. В приведённом ниже численном исследовании ω_d выбирается как $\omega_d = 0,05$ рад/с.

При определении внешних возмущений обычно учитываются основные возмущающие воздействия от окружающей космической среды, такие как гравитационный, аэродинамический и магнитный моменты, давление солнечного излучения и др. Величины этих возмущений ограничены, в частности для высоты орбиты 500 км имеются оценки $|o_1|, |o_2| \leq 1 \times 10^{-5}$ н, $|o_3|, |o_4| \leq 8,4 \times 10^{-7}$ рад/с² [13]. Из-за сложности построения точной модели возмущающих воздействий обычной практикой является использование периодических функций для приближенного представления внешних возмущений [14]. Поэтому в численных расчётах возмущения оцениваются как $o_1(t) = o_2(t) = 1 \times 10^{-5} \sin(200\omega t)$ н, $o_3(t) = o_4(t) = 8,4 \times 10^{-7} \sin(200\omega t)$ рад/с².

При выборе коэффициентов программы управления методом скользящих режимов необходимо учитывать следующее:

1. Слагаемое $-k_i s_i$ в программах (6) и (9) позволяет обеспечить системе свойство экспоненциальной устойчивости, так как $\dot{s}_i = -k_i s_i$ приводит к решению $s_i = s_i(0) \cdot e^{-k_i t}$, что обеспечивает быстрое приближение системы на начальном этапе к поверхности скольжения, причём скорость приближения зависит от коэффициента k_i .

2. В случае, когда в программе управления учитывается только слагаемое $-k_i s_i$, то траектория системы не может достичь поверхности скольжения за конечное время. Следовательно необходимо вводить в программу управления дополнительное слагаемое $-\varepsilon_i \cdot \text{sign } s_i$, где коэффициент ε_i определяет скорость приближения системы к поверхности при $s_i \rightarrow 0$.

3. Для того, чтобы уменьшить колебания системы относительно поверхности $s_i = 0$, функция сигнала $\text{sign } s_i$ в скользящем режиме заменяется функцией типа «насыщения» $\sigma(s_i)$ (рис. 3), имеющей вид $\sigma(s_i) = \begin{cases} 1, & s_i > \eta; \\ \sigma \cdot s_i, & |s_i| \leq \eta; \\ -1, & s_i < -\eta, \end{cases}$ здесь $\sigma = \frac{1}{\eta}$,

$\eta > 0$ определяет зону, где используется линейное управление с обратной связью.

С учётом вышесказанного были выбраны значения коэффициентов программы управления (6), приведённые в табл. 1. Результаты численного моделирования, соответствующие случаю I, приводятся на рис. 4.

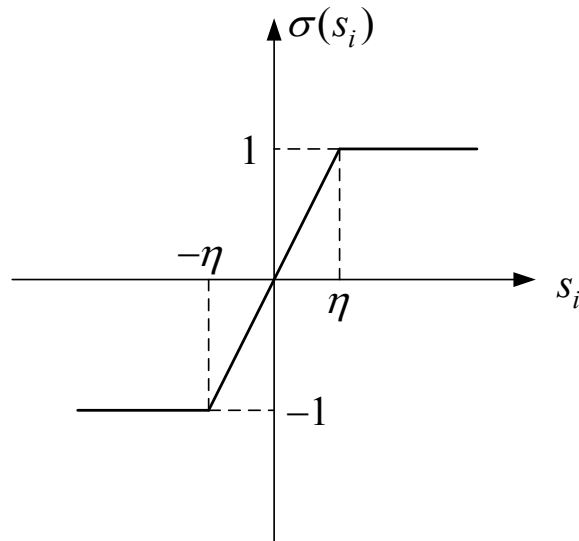


Рис. 3. Функция типа «насыщения» $\sigma(s_i)$

Таблица 1. Значения коэффициентов закона управления (6)

Описание	Значение
Матрица коэффициентов $\mathbf{c} = \text{diag}\{c_1, \dots, c_4\}$	$\mathbf{c} = \text{diag}\{0,05; 0,05; 0,01; 0,01\}$
Матрица коэффициентов $\mathbf{k} = \text{diag}\{k_1, \dots, k_4\}$	$\mathbf{k} = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$
Матрица коэффициентов $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{diag}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4\}$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{diag}\{0,01; 0,01; 0,01; 0,01\}$
Параметр η	0,05
Минимум силы натяжения T_{\min} , Н	0,01
Максимум силы тяги двигателей F_{\max} , Н	5

Из рис. 4, *a – г* следует, что процесс выпуска тросов характеризуется достаточно гладкими функциями. Зависимости, характеризующие изменение длин и их скоростей от времени, для всех тросов практически совпадают. На начальном этапе ($t \leq 50,5 \text{ c}$) выпуск тросов осуществляется при минимально возможном значении натяжения $T = 0,01 \text{ н}$ (рис. 4, *д*), при этом скорость тросов быстро увеличивается. В начале развёртывания ТГКА реактивные силы равны нулю (рис. 4, *е*), поэтому угловая скорость вращения системы $\dot{\theta}$ (рис. 4, *з*) быстро уменьшается по мере выпуска тросов. После этого имеется этап плавного торможения и приведения ТГКА в заданное состояние, в частности, когда $t = 169 \text{ c}$, $l = l^d = 100 \text{ м}$, $\dot{l} = 0$ и $\dot{\theta} = \omega_d = 0,05 \text{ рад/с}$. В итоге конфигурация ТГКА представляет собой правильный треугольник и силы натяжения тросов принимают постоянные значения ($T = 0,86 \text{ н}$), причём реактивные силы стремятся к нулю. Следует отметить, что введение функции типа «насыщения» $\sigma(s_i)$ позволило избежать быстрых колебаний системы относительно поверхности скольжения.

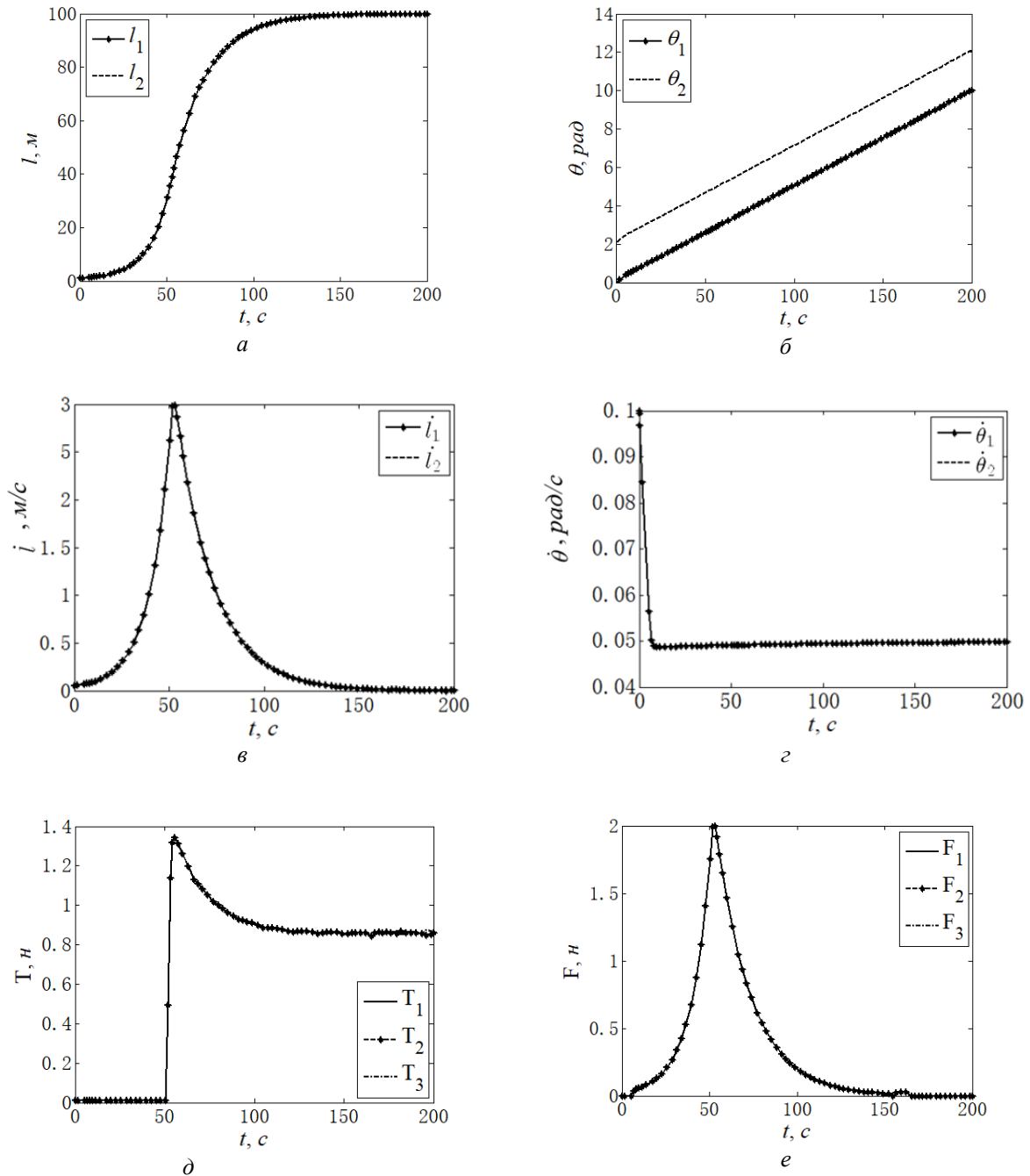


Рис. 4. Характеристики движения тросовой группировки космических аппаратов при использовании программы (6)

Численное моделирование для случая II было проведено при тех же данных, что и для случая I (табл. 1). Поэтому здесь приведены только значения коэффициентов, характеризующих ВДС: коэффициенты $\xi_{i,1} = 0,25$, $\xi_{i,2} = 1$ ($i = \overline{1,4}$); начальные значения $\lambda_{i,1}(0) = \lambda_{i,2}(0) = 0$. Результаты численного расчёта показаны на рис. 5.

На рис. 5, а – г приводятся зависимости, характеризующие изменения от времени переменных состояний системы в процессе формирования ТГКА. По сравнению с результатами, представленными выше для случая I, время развёртывания тросов меньше ($t = 125$ с), причём максимальное значение скорости выпуска тросов больше ($i_{\max} = 5,59$ м/с).

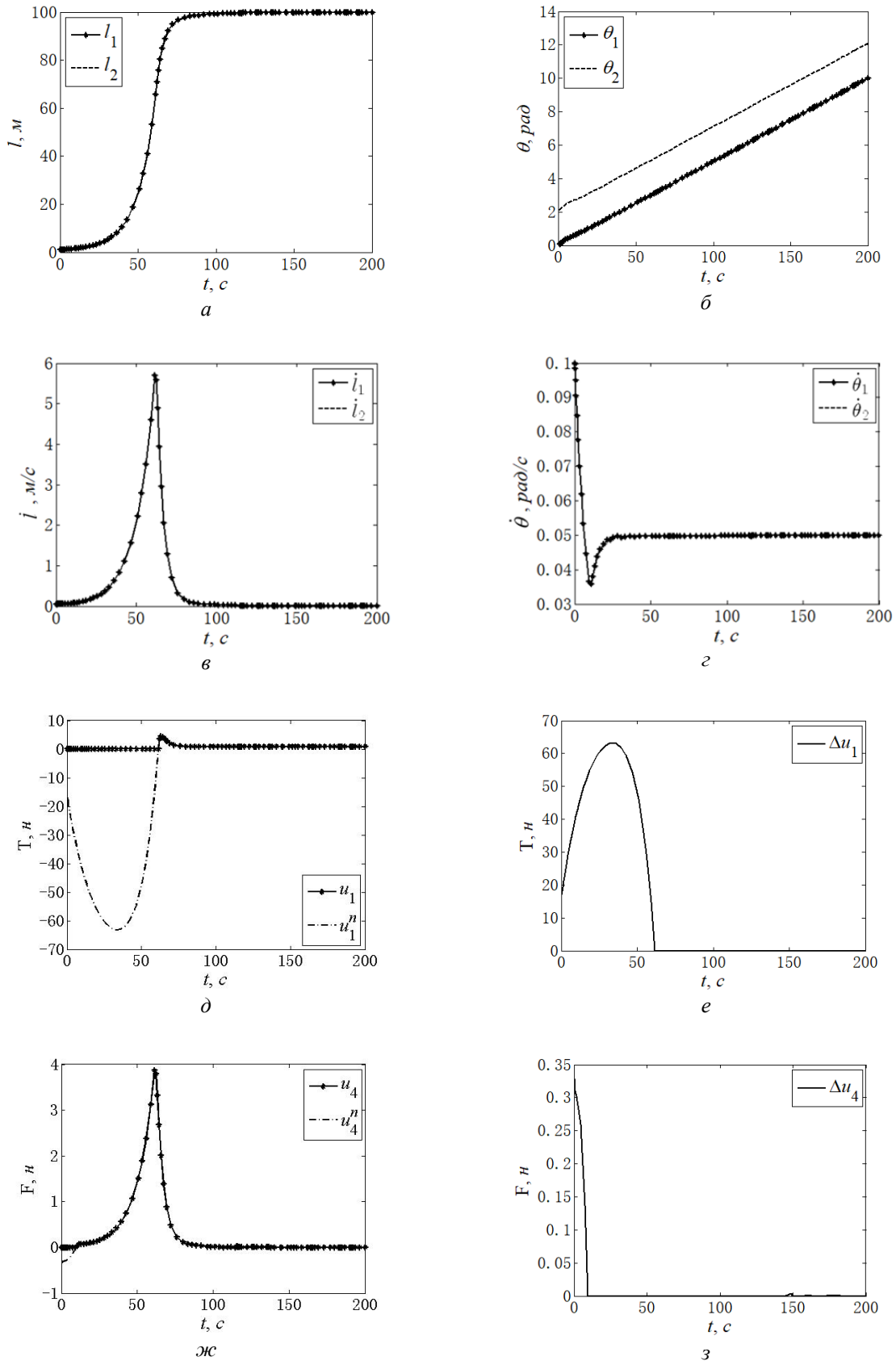


Рис. 5. Характеристики движения тросовой группировки космических аппаратов при использовании программы (9)

На рис. 5, *д* показаны зависимости силы натяжения первого троса от времени, где сплошная линия означает управляющую силу $u_1 = T_1$, штриховая – это номинальная сила натяжения u_1^n , а сплошная линия на рис. 5, *е* – есть разность $\Delta T_1 = \Delta u_1 = u_1 - u_1^n$. Как следует из результатов, на начальном этапе ($t \leq 61,4 c$) трос развѳртывается с минимальной силой натяжения 0,01н и вследствие этого значение ΔT_1 увеличивается по модулю, после чего натяжение троса практически совпадает с номинальным значением, определяемым по закону (9). На рис. 5, *ж* – з показано изменение реактивной силы ($u_4 = F_1$ – сплошная линия), номинальной реактивной силы (u_1^n – штриховая) и их разности ($\Delta F_1 = \Delta u_4 = u_4 - u_4^n$). Реактивная сила совпадает со своим номинальным значением практически везде за исключением самого начального этапа ($t \leq 9,5 c$), когда двигатель малой тяги не включѳн. Изменение таких же зависимостей для тросов 2 и 3 аналогично и здесь не приводится.

Изменение переменных ВДС $\lambda_{i,1}$ и $\lambda_{i,2}$ от времени приводится на рис. 6. Как следует из приведѳнных результатов, переменные ВДС приближаются к нулю в процессе развѳртывания ТГКА, что иллюстрирует устойчивость ВДС.

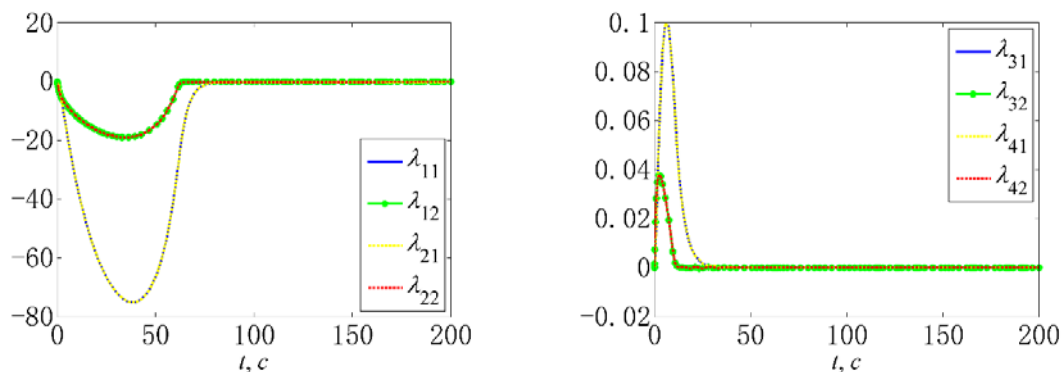


Рис. 6. Изменение коэффициентов $\lambda_{i,1}$ и $\lambda_{i,2}$ от времени

Заключение

В статье представлены разработанные методы управления формированием вращающейся тросовой группировки наноспутников с учѳтом ограничений на управляющие воздействия. Результаты работы следующие.

При формировании вращающейся тросовой группировки наноспутников на околоземной орбите возникает задача управления еѳ движением с учѳтом ограничений на силы натяжения тросов и на реактивные силы, создаваемые двигателями малой тяги, что приводит к необходимости разработки программы управления развѳртывания тросов, имеющей свойство робастности.

Предложены две программы развѳртывания тросов с использованием скользящего режима управления по заданной поверхности, учитывающие ограничения на управляющие воздействия. В первой программе ограничения на управляющие силы учитываются формально, когда при выходе на ограничение соответствующему управлению присваивается его граничное значение. Недостатком такого подхода является то, что устойчивость движения системы в этом случае нельзя доказать с помощью теории устойчивости Ляпунова. Вторую программу можно рассматривать как модификацию

первой, при этом в систему управления вводится вспомогательная динамическая система. Показано, что устойчивость системы управления зависит от устойчивости вспомогательной динамической системы, которая обеспечивается подходящим выбором значений её коэффициентов. В этом случае доказывается, что система управления с вспомогательной динамической системой асимптотически устойчива.

Результаты численного моделирования для обеих программ управления подтвердили возможность их использования (при наличии ограниченных возмущений и с учётом ограничений на управляющие силы) для формирования тросовой группировки космических аппаратов в виде правильного треугольника, вращающегося с постоянной заданной угловой скоростью в своём конечном состоянии.

Работа выполнена при поддержке научного гранта РФФИ «Динамический анализ и управление движением тросовой группировки микро-спутников» (проект № 21-51-53002).

Приложение

$$\text{Матрица } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4},$$

где $A_{11} = m\mu_1(\mu_2 + \mu_3)$, $A_{12} = m\mu_1\mu_3 \cos(x_3 - x_4)$, $A_{13} = 0$, $A_{14} = m\mu_1\mu_3 x_2 \sin(x_3 - x_4)$;
 $A_{21} = m\mu_1\mu_3 \cos(x_3 - x_4)$, $A_{22} = m\mu_3(\mu_1 + \mu_2)$, $A_{23} = -m\mu_1\mu_3 x_1 \sin(x_3 - x_4)$, $A_{24} = 0$;
 $A_{31} = 0$, $A_{32} = -m\mu_1\mu_3 x_1 \sin(x_3 - x_4)$, $A_{33} = m\mu_1(\mu_2 + \mu_3)x_1^2$, $A_{34} = m\mu_1\mu_3 x_1 x_2 \cos(x_3 - x_4)$;
 $A_{41} = m\mu_1\mu_3 x_2 \sin(x_3 - x_4)$, $A_{42} = 0$, $A_{43} = m\mu_1\mu_3 x_1 x_2 \cos(x_3 - x_4)$, $A_{44} = m\mu_3(\mu_1 + \mu_2)x_2^2$.

$$\text{Матрица } \mathbf{B}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \\ B_{41} \end{bmatrix}_{4 \times 1},$$

где

$$\begin{aligned} B_{11} &= m\mu_1(\mu_2 + \mu_3)x_1 \left[(\dot{x}_3 + \omega)^2 + \omega^2(3\cos^2 x_3 - 1) \right] - m\mu_1\mu_3 \left[-x_2\dot{x}_4(\dot{x}_4 + 2\omega)\cos(x_3 - x_4) + \right. \\ &\quad \left. + 2\dot{x}_2(\dot{x}_4 + \omega)\sin(x_3 - x_4) - 3\omega^2 x_2 \cos x_3 \cos x_4 \right]; \\ B_{21} &= m\mu_3(\mu_1 + \mu_2)x_2 \left[(\dot{x}_4 + \omega)^2 + \omega^2(3\cos^2 x_4 - 1) \right] - m\mu_1\mu_3 \left[-x_1\dot{x}_3(\dot{x}_3 + 2\omega)\cos(x_3 - x_4) - \right. \\ &\quad \left. - 2\dot{x}_1(\dot{x}_3 + \omega)\sin(x_3 - x_4) - 3\omega^2 x_1 \cos x_3 \cos x_4 \right]; \\ B_{31} &= -m\mu_1(\mu_2 + \mu_3)x_1^2 \left[2(\dot{x}_1/x_1)(\dot{x}_3 + \omega) + 3\omega^2 \sin x_3 \cos x_3 \right] - m\mu_1\mu_3 x_1 x_2 \left[3\omega^2 \sin x_3 \cos x_4 + \right. \\ &\quad \left. + 2(\dot{x}_2/x_2)(\dot{x}_4 + \omega)\cos(x_3 - x_4) + (\dot{x}_4^2 + 2\dot{x}_4\omega)\sin(x_3 - x_4) \right]; \\ B_{41} &= -m\mu_3(\mu_1 + \mu_2)x_2^2 \left[2(\dot{x}_2/x_2)(\dot{x}_4 + \omega) + 3\omega^2 \sin x_4 \cos x_4 \right] - m\mu_1\mu_3 x_1 x_2 \left[3\omega^2 \sin x_4 \cos x_3 + \right. \\ &\quad \left. + 2(\dot{x}_1/x_1)(\dot{x}_3 + \omega)\cos(x_3 - x_4) - (\dot{x}_3^2 + 2\dot{x}_3\omega)\sin(x_3 - x_4) \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Матрица } \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} & Q_{45} & Q_{46} \end{bmatrix}_{4 \times 6},$$

где $Q_{11} = -1$, $Q_{12} = 0$, $Q_{13} = -[x_1 + x_2 \cos(x_3 - x_4)]/l_3$, $Q_{14} = 0$, $Q_{15} = \mu_1 \sin(x_4 - x_3)$, $Q_{16} = -\mu_1(x_2/l_3)\sin(x_4 - x_3)$; $Q_{21} = 0$, $Q_{22} = -1$, $Q_{23} = -[x_2 + x_1 \cos(x_3 - x_4)]/l_3$, $Q_{24} = \mu_3 \sin(x_4 - x_3)$, $Q_{25} = 0$, $Q_{26} = (\mu_1 + \mu_2)(x_1/l_3)\sin(x_4 - x_3)$;
 $Q_{31} = 0$, $Q_{32} = 0$, $Q_{33} = (x_1 x_2/l_3)\sin(x_3 - x_4)$, $Q_{34} = (\mu_2 + \mu_3)x_1$, $Q_{35} = -\mu_1 l_1 \cos(x_4 - x_3)$, $Q_{36} = \mu_1(x_1/l_3)[x_1 + x_2 \cos(x_3 - x_4)]$; $Q_{41} = 0$, $Q_{42} = 0$, $Q_{43} = -(x_1 x_2/l_3)\sin(x_3 - x_4)$, $Q_{44} = \mu_3 x_2 \cos(x_4 - x_3)$, $Q_{45} = \mu_3 x_2$, $Q_{46} = (\mu_1 + \mu_2)(x_2/l_3)[x_2 + x_1 \cos(x_4 - x_3)]$;
 где $l_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 \cos(x_3 - x_4)}$.

Библиографический список

1. Bekey I. Tethers open new space options // *Astronautics and Aeronautics*. 1983. V. 21, Iss. 4. P. 32-40.
2. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.
3. Levin E.M. Dynamic analysis of space tether missions. V. 126. Univelt Incorporated, 2007. 453 p.
4. Kumar K.D., Yasaka T. Rotating formation flying of three satellites using tethers // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2004. V. 41, Iss. 6. P. 973-985. DOI: 10.2514/1.14251
5. Misra A.K. Equilibrium configurations of tethered three-body systems and their stability // *Journal of the Astronautical Sciences*. 2002. V. 50, Iss. 3. P. 241-253. DOI: 10.1007/BF03546250
6. Ишков С.А., Филиппов Г.А., Сүй Сяое. Моделирование процессов управления развёртыванием орбитальной тросовой системы с ограничениями на скорость выпуска троса // *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (национального исследовательского университета)*. 2016. Т. 15, № 1. С. 64-72. DOI: 10.18287/2412-7329-2016-15-1-64-72
7. Zabolotnov Yu. Introduction of space tether system motion dynamics and control. Beijing: Science Press, 2013. 140 p.
8. Aslanov V.S., Ledkov A.S. Dynamic of the tethered satellite systems. Cambridge, UK: Woodhead Publishing Limited, 2012. 356 p. DOI: 10.1533/9780857096005
9. Ван Ч., Заболотнов Ю.М. Анализ динамики формирования тросовой группировки из трёх наноспутников с учётом их движения вокруг центров масс // *Прикладная математика и механика*. 2021. Т. 85, № 1. С. 21-43. DOI: 10.31857/S0032823521010082
10. Chen S., Li A., Wang C. Analysis of the deployment of a three-mass tethered satellite formation // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. V. 984, Iss. 1. DOI: 10.1088/1757-899X/984/1/012028
11. Ван Ч., Заболотнов Ю.М. Моделирование и анализ процесса формирования вертикальной тросовой группировки наноспутников // *Сб. трудов IV Международной конференции и молодёжной школы «Информационные технологии и нанотехнологии» (24-27 апреля 2018 г., Самара)*. Самара: Новая техника, 2018. С. 1902-1910.

12. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981. 368 с.

13. Chen S., Li A., Wang C., Liu C. Adaptive sliding mode control for deployment of electro-dynamic tether via limited tension and current // *Acta Astronautica*. 2020. V. 177. P. 842-852. DOI: 10.1016/j.actaastro.2019.12.025

14. Kang J., Zhu Z., Wang W., Li A., Wang C. Fractional order sliding mode control for tethered satellite deployment with disturbances // *Advances in Space Research*. 2017. V. 59, Iss. 1. P. 263-273. DOI: 10.1016/j.asr.2016.10.006

FORMATION OF A ROTATING RING-SHAPED THREE-BODY TETHERED NANOSATELLITE SYSTEM WITH LIMITED CONTROL

© 2022

Shumin Chen Postgraduate Student of the Department of Software Systems;
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;
esm.ssau@yandex.ru

Yu. M. Zabolotnov Doctor of Science (Engineering), Professor,
Professor of the Department of Software Systems;
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;
yumz@yandex.ru

The problem of forming a rotating ring-shaped tethered system consisting of three nanosatellites is considered. To analyze the dynamics of the tether system, a mathematical model is developed in the orbital coordinate system using the Lagrange method. Using the sliding mode control method, two control programs for the deployment of tethers are proposed, in which tether tensions and thrust forces created by low-thrust engines are used as controls. In the first control program, the control actions are directly limited by the permissible limits of tether tensions forces and thrust forces, and when designing the second control program, an auxiliary dynamic system is added into the control system, which introduces control corrections that take into account the saturation effect. The stability of motion of the tethered formation system for both control programs is investigated using the Lyapunov theory. The results of numerical simulations confirmed the possibility of using the proposed control programs for the formation of a rotating triangular tethered system in the form of a regular triangle in the presence of disturbances and with account of the given constraints.

Nanosatellites; triangular tethered formation; tether deployment; system dynamics; sliding mode control; control constraints; stability of system motion

Citation: Chen S., Zabolotnov Yu. M. Formation of a rotating ring-shaped three-body tethered nanosatellite system with limited control. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2022. V. 21, no. 3. P. 69-84. DOI: 10.18287/2541-7533-2022-21-3-69-84

References

1. Bekey I. Tethers open new space options. *Astronautics and Aeronautics*. 1983. V. 21, Iss. 4. P. 32-40.

2. Beletskiy V.V., Levin E.M. *Dinamika kosmicheskikh trosovykh system* [Dynamics of space tether systems]. Moscow: Nauka Publ., 1990. 336 p.

3. Levin E.M. Dynamic analysis of space tether missions. V. 126. Univelt Incorporated, 2007. 453 p.

4. Kumar K.D., Yasaka T. Rotating formation flying of three satellites using tethers. *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2004. V. 41, Iss. 6. P. 973-985. DOI: 10.2514/1.14251

5. Misra A.K. Equilibrium configurations of tethered three-body systems and their stability. *Journal of the Astronautical Sciences*. 2002. V. 50, Iss. 3. P. 241-253. DOI: 10.1007/BF03546250
6. Ishkov S.A., Filippov G.A., Xu Xiaoye. Modeling orbital tether system deployment with limitations on the deployment speed. *Vestnik of the Samara State Aerospace University*. 2016. V. 15, no. 1. P. 64-72. (In Russ.). DOI: 10.18287/2412-7329-2016-15-1-64-72
7. Zabolotnov Yu. Introduction of space tether system motion dynamics and control. Beijing: Science Press, 2013. 140 p.
8. Aslanov V.S., Ledkov A.S. Dynamic of the tethered satellite systems. Cambridge, UK: Woodhead Publishing Limited, 2012. 356 p. DOI: 10.1533/9780857096005
9. Wang Ch., Zabolotnov Yu.M. Analysis of the dynamics of the formation of a tether group of three nanosatellites taking into account their movement around the centers of mass. *Mechanics of Solids*. 2021. V. 56, Iss. 7. P. 1181-1198. DOI: 10.3103/S0025654421070244
10. Chen S., Li A., Wang C. Analysis of the deployment of a three-mass tethered satellite formation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. V. 984, Iss. 1. DOI: 10.1088/1757-899X/984/1/012028
11. Wang Ch., Zabolotnov Yu.M. Modeling and analysis of the process of forming a vertical tether group of nano-satellites. *Proceedings of the IV International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT-2018) (April, 24-27, 2018, Samara)*. Samara: Novaya Tekhnika Publ., 2018. P. 1902-1910. (In Russ.)
12. Utkin V.I. *Skol'zyashchie rezhimy v zadachakh optimizatsii i upravleniya* [Sliding modes in optimization and control tasks]. Moscow: Nauka Publ., 1981. 367 p.
13. Chen S., Li A., Wang C., Liu C. Adaptive sliding mode control for deployment of electro-dynamic tether via limited tension and current. *Acta Astronautica*. 2020. V. 177. P. 842-852. DOI: /10.1016/j.actaastro.2019.12.025
14. Kang J., Zhu Z., Wang W., Li A., Wang C. Fractional order sliding mode control for tethered satellite deployment with disturbances. *Advances in Space Research*. 2017. V. 59, Iss. 1. P. 263-273. DOI: 10.1016/j.asr.2016.10.006