

УДК 539.3+620.22

## ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕЛКОСЛОИСТОЙ СРЕДЫ

© 2013 Н. С. Рапилбекова

Таразский государственный педагогический институт,  
Республика Казахстан

Разработана методика, позволяющая оценить точность отдельных предложений для аналитического вычисления интегральных теплофизических характеристик многослойных тел композиционной структуры. Результаты расчёта теплового состояния многослойной среды сравниваются с результатами расчёта однородного тела с приведёнными теплофизическими характеристиками. Это позволяет оценить пригодность аналитических зависимостей для описания интегральных теплофизических характеристик многослойной композиционной среды.

*Температура, пространственные координаты, теплопроводность анизотропного тела, источники тепла, теплообмен.*

## Введение

В технике широко используется новый класс материалов, особенностью которых является последовательное чередование слоёв, имеющих различные механические и теплофизические характеристики. Обычно толщина слоя сравнительно мала (от нескольких до сотен микрон), а число их велико (до нескольких сотен и тысяч). Однако с ростом числа слоёв объём вводимой информации в расчётные программы становится большим, рутинная работа при этом трудоёмка, крайне неудобна и занимает много времени. Механические и теплофизические свойства самой конструкции при большом числе чередующихся слоёв с различными свойствами имеют некоторые интегральные характеристики, зависящие как от объёмного содержания отдельных составляющих материалов, так и условий связей на границе их раздела.

Для аналитической оценки теплофизических характеристик слоистых композиционных материалов обычно используют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \lambda^{\text{эфф}} &= v_1 \lambda_1 + v_2 \lambda_2, & (\text{а}) \\ \lambda^{\text{эфф}} &= \lambda_2 / (v_1 \lambda_2 / \lambda_1 + v_2), & (\text{б}) \\ c_{\text{е}}^{\text{эфф}} &= v_1 c_{\text{е}1} + v_2 c_{\text{е}2}, & (\text{в}) \\ c_{\text{е}}^{\text{эфф}} &= 1 / (v_1 / c_{\text{е}1} + v_2 / c_{\text{е}2}), & (\text{г}) \\ \rho^{\text{эфф}} &= v_1 \rho^1 + v_2 \rho^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $v_i$  ( $i=1,2$ ) – объёмное содержание  $i$ -й составляющей композиционного материала,  $\lambda_i$ ,  $c_{\text{е}i}$  – коэффициент теплопроводности и теплоёмкость материала  $i$ -го слоя,  $\lambda^{\text{эфф}}$ ,  $c_{\text{е}}^{\text{эфф}}$  – эффективные теплофизические характеристики композиционного материала. Соотношения (1 а) и (1 в) соответствуют модели последовательного соединения двух тел с различными теплофизическими характеристиками. Формула «смеси» (1 а) для коэффициента теплопроводности  $\lambda^{\text{эфф}}$  обычно используется для однонаправленного армированных структур в направлении армирования [1, 2]. В этих работах предложены несколько отличающиеся от равенства (1 б) и друг от друга соотношения (например, [2]):

$$\lambda^{\text{эфф}} = \lambda_2 \{ 1 + 2v_1(\lambda_1 - \lambda_2) / [(1 + v_1)\lambda_2 + v_2\lambda_1] \}. \quad (2)$$

Более сложные соотношения, чем приведённые формулы (1 в), (1 г), предложены для аналитической оценки теплоёмкости составных материалов. Эффективные параметры теплоёмкости составного материала  $c_{\text{е}}^{\text{эфф}}$  зависят не только от теплоёмкостей  $c_{\text{е}i}$  составляющих композицию материалов, но и от коэффициентов линейного расширения  $\alpha_i$  и модулей их упругости  $E_i$ . Эти результаты связаны с анализом выражений энергии для сред

связанной термоупругости и являются решением следующей системы уравнений [2]:

$$(c_p - c_v) / 3T_0 = v_1 \lambda_1 \alpha_1^2 + v_2 \lambda_2 \alpha_2^2 - (\alpha_{11} - v_1 \alpha_1 - v_2 \alpha_2)^2 / (1/E_{11} - v_1/E_1 - v_2/E_2), \quad (3)$$

$$(c_p - c_v) = T_0 C_{ijkl} \alpha_{ij} \alpha_{kl}.$$

Здесь  $C_{ijkl}$  – тензор упругих модулей анизотропного тела,  $\alpha_{ij}$  – тензор коэффициентов линейного расширения,  $T_0$  – некоторая заданная начальная температура,  $c_v / \rho$  – удельная теплоёмкость при постоянной деформации,  $c_p / \rho$  – удельная теплоёмкость при постоянном давлении,  $E_{11}$ ,  $\alpha_{11}$  – модуль упругости и коэффициент линейного расширения композиционного материала вдоль направления армирования.

Проведённый анализ показывает, что большинство исследователей используют отдельные приближённые оценки. В связи с этим задача оценки теплофизических характеристик слоистых материалов является актуальной.

Разработана методика расчётной оценки теплофизических характеристик мелкослоистой среды, включающая в себя:

1) получение точного решения нестационарной задачи теплопроводности для многослойной среды,

2) решение задачи теплопроводности для однородной среды с заданными эффективными теплофизическими характеристиками,

3) сравнение результатов расчёта, выполненных на основе указанных подходов.

При совпадении результатов решения по пунктам 1 и 2 эффективные теплофизические характеристики могут быть рекомендованы для практического применения.

## 1. Теплопроводность мелкослоистой среды

Коэффициенты теплопроводности  $\lambda^k$  и теплоёмкости  $c_\epsilon^k$  слоёв ( $k = 1, 2, \dots, M$ ), коэффициенты теплообмена как на поверхностях раздела слоёв  $\alpha^k$ , так и на наружных поверхностях исследуемой области  $\alpha_0^1$ ,  $\alpha_L^M$  являются параметрами, которые определяют характер распространения тепла в многослойной среде. Число исходных параметров может быть уменьшено, если рассматривается первая крайняя задача теплопроводности в многослойном ( $M$ -слойном) стержне и принимаются условия идеального теплообмена на поверхностях раздела слоёв.

При отсутствии внутренних источников тепла и в случае, когда теплофизические характеристики слоёв являются постоянными и могут только скачкообразно меняться при переходе от слоя к слою, необходимо решить уравнения

$$\rho^k c_\epsilon^k \partial T^k / \partial t = \lambda^k \partial^2 T^k / \partial x^2, \quad (k=1, 2, \dots, M), \quad (4)$$

в которые входят только два параметра: коэффициент теплопроводности  $\lambda^k$  и теплоёмкость  $\rho^k c_\epsilon^k$  материала. Уравнения нестационарной теплопроводности для многослойной среды (4) решаются при следующих начальных и граничных условиях:

$$T^k = T_0 \quad \text{при} \quad t=0; \quad (5 \text{ а})$$

$$\lambda^k \partial T^k / \partial x = \lambda^{k+1} \partial T^{k+1} / \partial x, \quad (5 \text{ б})$$

$$T^k = T^{k+1} \quad \text{при} \quad x=L^k=L_0^{k+1}; \quad (5 \text{ в})$$

$$T^1(t) = T_0 \quad \text{при} \quad x=x_0^1=0; \quad (5 \text{ в})$$

$$T^M(t) = \begin{cases} A t & \text{для } 0 \leq t \leq t_0, \\ A t_0 & \text{для } t_0 \leq t \leq t_1, \\ A(t_2 - t) & \text{для } t_1 \leq t \leq t_2 = t_0 + t_1 \\ & \text{при } x=L^M, \\ 0 & \text{для } t_2 = t_0 + t_1 \leq t \leq t_{\text{кон}}. \end{cases} \quad (5 \text{ г})$$

Условия (5 б) соответствуют условию идеального теплообмена на контактной поверхности  $x=L^k=L_0^{k+1}$  соседних слоёв.

Решение уравнений (4) при условиях (5) выполнено численным методом [4] в безразмерной системе координат и относительно безразмерной температуры:

$$\xi = x/L^M, \quad \tau = t/t_0, \quad \theta^k = (T^k - T_0)/\Delta T_0. \quad (6)$$

Полученное точное решение для многослойной среды ниже будет называться экспериментальным результатом (результат численного эксперимента).

На рис.1 приведены построенные по результатам расчётов зависимости относительной температуры  $\theta^k$  от пространственной координаты  $\xi$  для различных моментов времени  $\tau$  (через 2500 шагов по времени; 5000 шагам по времени соответствует реальное время  $t_0$ ) и при различном числе слоёв ( $M = 4, 8, 16, 32, 64$ ) для стержней одной длины ( $L^M = 150$  мм) из углепластика. Используемые в расчётах свойства материалов отдельных слоёв приведены в табл. 1.

Из полученных результатов следует, что увеличение числа слоёв за счёт уменьшения толщины слоя приводит к тому, что зависимости относительной

температуры  $\theta$  от времени  $\tau$ , пространственной координаты  $\xi$  становятся более гладкими. Это особенно хорошо видно при существенном отличии теплофизических характеристик материалов отдельных слоёв: углеродного волокна и эпоксидной смолы.

Следует отметить, что при малом числе слоёв стержень прогревается на большую глубину. Влияние слоёв с меньшей теплопроводностью растёт с увеличением числа слоёв. Однако это влияние постепенно убывает (результаты для 4-слойного и 64-слойного и 32-слойного и 64-слойного стержня). Отмеченные особенности температурного состояния многослойного стержня имеют место на всех временных этапах.

В заключение следует отметить, что приведены результаты расчётов для многослойных сред, чередующиеся слои которых выполнены из двух различных материалов. Отмеченными свойствами будут обладать и составные тела, состоящие из большего числа чередующихся разнородных материалов.

Таблица 1

Материал	Объёмное содержание	Плотность	Теплоёмкость	Теплопроводность
Углеродное волокно	0,66	1,45 г/см <sup>3</sup>	670 Дж/кгК	125,6 Вт/мК
Эпоксидная смола	0,34	1,2 г/см <sup>3</sup>	837 Дж/кгК	8,8 Вт/мК
Углепластик	—	1,3625	726,8 (1 в)	22,78 (1 б)
Углепластик	—	1,3625	726,8 (1 в)	85,89 (1 а)

## 2. Теплопроводность однородной среды

Для однородной среды с эффективными характеристиками уравнение нестационарной теплопроводности имеет вид

$$(\rho c_\epsilon)^{\text{эфф}} \partial T / \partial t = \lambda^{\text{эфф}} \partial^2 T / \partial x^2. \quad (7)$$

Для получения адекватного решения уравнение теплопроводности (7) должно быть решено при тех же начальных и граничных условиях, что и уравнения (4) для многослойной среды:

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= T_0 \quad \text{при } t = 0; \\ T(0, t) &= T_0 \quad \text{при } x = 0; \\ T(L, t) &= T^M(t) \quad \text{при } x = L^M. \end{aligned} \quad (8)$$

Условие  $T^M(t)$  задано соотношениями (5 г). Эффективные значения теплофизических характеристик, вычисленные по рекомендуемому в литературе соотношениям (1 а), (1 б) и (1 в), приведены в табл.1. Выбор исследуемых конструкционных материалов связан с тем, что теплофизические характеристики компонентов композиционного материала заметно отличаются (углепластик).

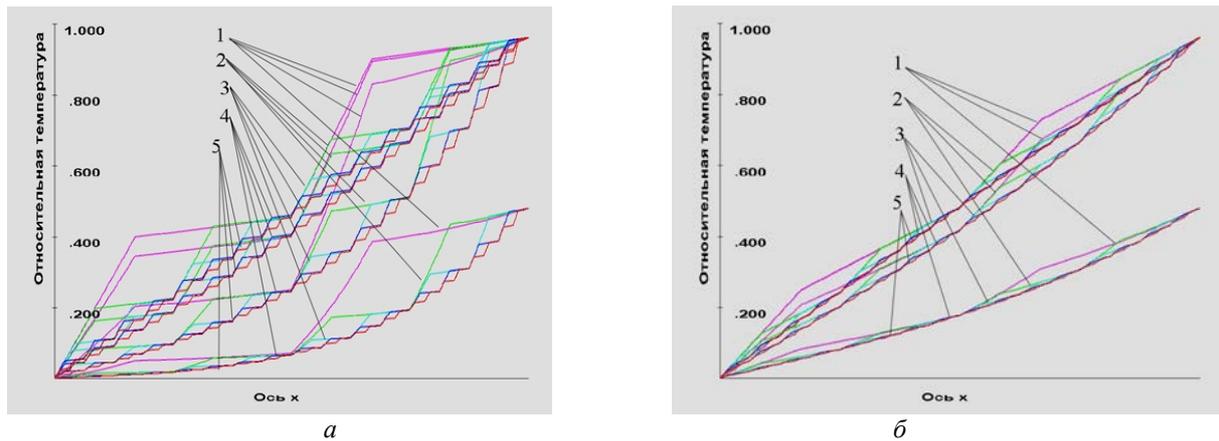


Рис. 1. Распределение температуры в многослойных стержнях из углепластика (а) и углеалюминия (б): 4-слойный (линия 1), 8-слойный (линия 2), 16-слойный (линия 3), 32-слойная (линия 4), 64-слойный (линия 5)

### 3. Сравнение результатов решения

Проведено сравнение результатов решения задачи теплопроводности в однородной и в многослойной среде. Результаты расчётов показывают, что для композиций, теплофизические свойства составляющих которых мало отличаются (например, углеалюминий), вполне пригодны рекомендуемые соотношения (1 б), (1 в). При заметном отличии теплофизических свойств они нуждаются в поправках. При решении даже первой краевой задачи сравнение решений для однородной и многослойной среды даёт одно уравнение, а неизвестных параметров два:

$\lambda^{\text{эфф}}$  и  $(\rho c_{\epsilon})^{\text{эфф}}$ . Одно соотношение относительно этих двух параметров приводит к функциональной зависимости между ними. В работе методами планирования эксперимента [5] получено множество значений  $\lambda^{\text{эфф}}$  и  $(\rho c_{\epsilon})^{\text{эфф}}$ , при которых решения для однородной и многослойной среды интегрально отличаются на величины, которые меньше заданной требуемой точности. На рис. 2 приведён характер сходимости результатов расчёта эффективных теплофизических характеристик по разработанному алгоритму к экспериментальным кривым распределения температуры в различные моменты времени.

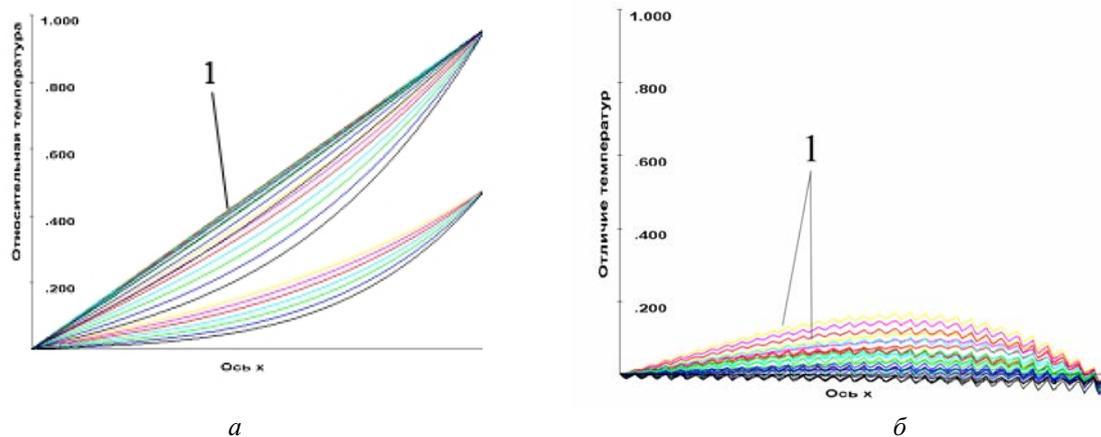


Рис. 2. Распределение температуры (а) и отличия от экспериментальной (б) в многослойном углепластиковом стержне при приближении к кривой с заданными эффективными характеристиками (1 линия) экспериментальных кривых (другие линии) в моменты времени  $t = 2500$  (нижняя группа линий),  $t = 5000$  (верхняя группа линий)

### Выводы

Разработана методика определения эффективных теплофизических характеристик однородной анизотропной среды по результатам решения нестационарной задачи теплопроводности для многослойного тела. Разработанный метод, эффективность которого продемонстрирована при определении двух параметров  $\lambda^{\text{эфф}}$  и  $(\rho c_{\epsilon})^{\text{эфф}}$ , может быть использован при большем числе неизвестных параметров однородной среды.

### Библиографический список

1. Рытов, С.М. Акустические свойства мелкослоистой среды [Текст] / С.М.

Рытов Акустический журнал. – 1956. – Т. II. Вып. 1. – С.71-83.

2. Ванин, Г.А. Микромеханика композиционных материалов [Текст] / Г.А. Ванин. – Киев: Науково Думка, 1985. – 302 с.

3. Кристенсен, Р. Введение в механику композитов [Текст] / Р. Кристенсен – М.: Мир, 1982. – 334 с.

4. Рапилбекова, Н.С. Термонапряженное состояние слоистых тел: дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук [Текст] / Рапилбекова Нагима Сейсенбаевна. – Алма-Ата, 1993. – 290 с.

5. Зедгинидзе, И.Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем [Текст] / И.Г. Зедгинидзе. – М.: Наука, 1976. – 390 с.

## THERMOPHYSICAL PROPERTIES OF MULTILAYERED STRUCTURES

© 2013 N. S. Rapilbekova

Taraz State Pedagogical Institute, Kazakhstan Republic

The developed methods make it possible to estimate the accuracy of certain proposals for analytical calculations of integral thermophysical characteristics of multilayered composites. For that purpose, the results of precise calculations of a multilayered structure's thermal state are compared with the results of calculating a homogeneous body with indicated thermophysical characteristics. This comparison makes it possible to assess the applicability of analytical dependences for describing integral thermophysical characteristics of multilayered composites.

*Temperature, 3d coordinates, thermal conductivity of an anisotropic body, heat sources, heat exchange.*

### Информация об авторе

**Рапилбекова Нагима Сейсенбаевна**, кандидат физико-математических наук, доцент, старший преподаватель кафедры информатики, Таразский государственный педагогический институт (Республика Казахстан). E-mail: [sandu.rapilbekova@mail.ru](mailto:sandu.rapilbekova@mail.ru). Область научных интересов: теплотехника, композиционные материалы с мелкослоистой структурой.

**Rapilbekova Nagima Seisenbayevna**, candidate of physics and mathematics, associate professor, Taraz State Pedagogical Institute, Kazakhstan Republic. E-mail: [sandu.rapilbekova@mail.ru](mailto:sandu.rapilbekova@mail.ru). Area of research: heat engineering, multilayered composites.