

Метод простых итераций с коррекцией сходимости и метод минимальных невязок в задачах плазмоники

М.В. Давидович¹, А.К. Кобец², К.А. Саяпин¹

¹ Саратовский национальный исследовательский
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
410012, Россия, г. Саратов,
ул. Астраханская, 83

² ООО «НПФ “Этна плюс”»
410040, Россия, г. Саратов,
ул. Вишневая, 11

Аннотация – Рассмотрена задача поиска комплексных корней дисперсионных уравнений плазмон-поляритонов вдоль границ раздела слоистая структура – вакуум. Такие задачи возникают при определении собственных волн вдоль границ раздела структур, поддерживающих поверхностные и вытекающие волны, в том числе плазмоны и поляритоны вдоль металлических, диэлектрических и иных поверхностей. Для численного решения задачи рассмотрена модификация метода простых итераций с переменным параметром итерации, приводящим к нулевой производной правой части уравнения на каждом шаге, т. е. к сходящимся итерациям, а также модификация метода минимальных невязок. Показано, что метод минимальных невязок с линеаризацией совпадает с методом простых итераций при указанной коррекции. Рассмотрены сходящиеся методы более высоких порядков. Результаты продемонстрированы на примерах, включая комплексные решения дисперсионных уравнений для плазмон-поляритонов. Преимуществом метода перед другими методами поиска комплексных корней в задачах электродинамики является возможность упорядочивания корней и построения дисперсионных ветвей без разрывов, что позволяет классифицировать моды.

Ключевые слова – плазмон-поляритоны; метод простых итераций; метод минимальных невязок; дисперсионное уравнение.

Введение

В задачах плазмоники, например при решении нелинейных комплексных дисперсионных уравнений (ДУ), возникает проблема нахождения их комплексных корней. При этом важно построение полной дисперсионной ветви: зависимостей фазовой постоянной (замедления) и постоянной затухания от частоты, например, для поверхностных плазмон-поляритонов (ПП). Мы рассматриваем среду и структуру с диссипацией, поэтому дисперсионные ветви непрерывны и существуют для всех частот, в том числе и в запрещенных для не-диссипативных структур зонах. Если в разрешенных зонах при пренебрежимо малой диссипации ПП обычно имеет вид медленной поверхностной волны, а его дисперсия может быть найдена путем решения ДУ в действительной области, то в запрещенной зоне ПП обычно быстрые вытекающие, соответствующие антиповерхностной волне с большим радиационным затуханием. При реальной диссипации ПП классифицируются на втекающие и вытекающие [1–5], что определяется углом вытекания $\vartheta = \arctan(k'_{0x}/k'_z)$. Здесь мы считаем, что ПП распространяются вдоль оси z , лежащей на поверхности раздела $x = 0$ структура – вакуум. Сверху

в вакууме $k_0^2 = k_{0x}^2 + k_z^2$, $k_{0x} = k'_{0x} - ik''_{0x}$, причем мы ищем решение с зависимостью $\exp(i\omega t - ik_z z)$, $k_z = k'_z - ik''_z$. При $x < 0$ может находиться произвольная структура или среда, поддерживающая указанную волну. Волна прямая, если $k'_z k''_z > 0$, обратная, если $k'_z k''_z < 0$ [1; 2]. Случай отсутствия диссипации $k''_z = 0$ требует для анализа характера волны рассмотрения дисперсии и вычисления групповой скорости. В общем случае определения характера волны следует использовать проинтегрированную по поперечному сечению структуры компоненту вектора Пойнтинга \tilde{S}_z , и тогда критерием служит знак величины $\tilde{S}_z k'_z$ [5]. Следует отметить, что для вытекающих волн интеграл \tilde{S}_z может расходиться, и для определения плотности потока мощности его нужно вычислять в определенных границах, а затем переходить к пределу. Для втекания необходимо условие $\vartheta < 0$. Определяя S_x , видим, что в этом случае энергия втекает из вакуума в структуру, тогда как при $\vartheta > 0$ она вытекает из структуры в вакуум. Границей перехода от медленных к быстрым волнам служит условие «отсечки» $n' = k'_z/k_0 = 1$. Далее будем решать ДУ вида $k_z = D(k_0, k_z)$. Простейшее такое ДУ Ценнека имеет вид $k_z = k_0 \sqrt{\varepsilon(\omega)/(1 + \varepsilon(\omega))}$ и описывает

ПП над диэлектрическим полупространством. Оно дает явное решение, поэтому уравнением не является. Для него ПП всегда втекающий, причем для быстрой волны Ценнека при $\varepsilon'(\omega) > 1$ втеkanie может быть весьма слабым, как и для весьма медленного ПП, когда $\varepsilon'(\omega) \approx -1$ и диссипация мала: $\varepsilon''(\omega)/\varepsilon'(\omega) \ll 1$ [4]. В общем случае правая часть ДУ нелинейно зависит от k_z , даже если возможно описание структуры поверхностным импедансом, поэтому нахождение корней ДУ является актуальной задачей.

Одним из распространенных методов поиска корней общего нелинейного уравнения

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

является метод простых итерации (МПИ) [6; 7] или последовательных приближений. Согласно ему осуществляются итерации

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Невязка уравнения (1) совпадает с самой функцией: $\Delta(x) = f(x)$, а для уравнения (2) невязка есть $\Delta(x) = x - \varphi(x)$. Под невязкой, характеризующей решение, будем понимать квадрат модуля невязки $\delta = |\Delta(x)|^2 = \|\Delta(x)\|^2$, т. е. квадрат нормы. Функция $\varphi(x)$ может быть получена из (1) бесконечным числом способов: $\varphi(x) = x + g(x)f(x)$, где $g(x)$ – произвольная функция. Обычно для действительного уравнения ее берут непрерывной и знакопостоянной [6]. Если в уравнении (1) функция дифференцируемая p раз, функцию $g(x)$ также удобно брать таковой. Далее будем предполагать, что все функции дважды, а в некоторых алгоритмах и трижды непрерывно дифференцируемые. МПИ удобен и для комплексного уравнения для определения комплексных корней. Итерационный процесс для (1) и (2) запишем в эквивалентном виде

$$x_n = x_{n-1} - \tau_n \Delta_{n-1}, \quad (3)$$

где для уравнения (1) $\Delta_n = f(x_n)$, а для уравнения (2) $\Delta_n = x_n - \varphi(x_n)$. Очевидно, классический МПИ (2) реализуется, если параметр итерации равен единице на каждом шаге: $\tau_n = 1$. Однако выбор параметра итерации на каждом шаге дает дополнительную возможность улучшить сходимость. Это, например, используется в методе минимальных невязок (ММН) [8; 9]: параметр итерации τ_n выбирается из условия минимума δ_n на следующем шаге. В случае систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) или для линейных операторных уравнений $\hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ или $\mathbf{x} = (\hat{I} - \hat{A})\mathbf{x} + \mathbf{b}$ в форме (3) $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} - \tau_n \Delta_{n-1}$, $\Delta_{n-1} = \hat{A}\mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{b}$ имеем [8; 9]:

$$\tau_n = (\hat{A}\Delta_{n-1}, \Delta_{n-1}) / \|\hat{A}\Delta_{n-1}\|^2. \quad (4)$$

Скалярное произведение понимаем как $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{y}$. Для сходимости простых итераций ($\tau_n \equiv 1$) достаточно, чтобы для одной из норм выполнялось условие $\|\hat{I} - \hat{A}\| < 1$. Для сходимости ММН достаточно выполнения условия $\|\hat{I} - \tau_n \hat{A}\| < 1$. Считаем матрицу эрмитовой, что всегда можно сделать, умножив СЛАУ на матрицу, эрмитово сопряженную исходной и нормированной: $\|\hat{A}\| = 1$, разделив СЛАУ на норму. Рассмотрим квадрат спектральной нормы μ_i . Это наибольшее собственное значение матрицы и по условию $\mu_i = 1$. Тогда итерации выполняются с параметром (4), если $0 < \tau_n < 1$. При выходе из этой области параметр следует корректировать. При $\tau_n > 1$ следует брать $\tau_n = 1 - \delta$, $0 < \delta < 1$. При очень малом параметре алгоритм почти закликивается, поэтому следует брать $\tau_n = \delta$, не допуская слишком малых значений. Алгоритм метода скорейшего спуска (МСС) аналогичен, но в нем минимизируется энергетическая норма невязки, а параметр итерации приобретает известный вид $\tau_n = \|\Delta_{n-1}\|^2 / (\hat{A}\Delta_{n-1}, \Delta_{n-1})$. ММН и МСС могут не сойтись. Даже в случае одного линейного уравнения итерационный процесс может разойтись, а может сходиться достаточно медленно. Для одного линейного уравнения ММН и МСС дают решение за один шаг в силу скалярной природы задачи: $\tau_1 = A^{-1}$. Это также следует из условия $|\Delta_1|^2 = 0$. В многомерном случае $\|\Delta_n\|^2 \neq 0$, и из наложения условия $\|\Delta_n\|^2 = 0$ не следует, вообще говоря, сходящийся алгоритм. Получающееся квадратное уравнение для τ_n может иметь комплексные значения для действительной СЛАУ. Использование матричного параметра итерации $\hat{\tau}_n$ сопряжено с трудностями его определения: такой оптимальный параметр должен быть взят в виде $\hat{\tau}_n = \hat{A}^{-1}$, т. е. приводит к той же самой задаче, для решения которой он и выбирается. Матричный параметр целесообразен в специальных случаях, например, когда матрица \hat{A} имеет большие диагональные элементы. Однако для поиска корня нелинейного уравнения условие $\|\Delta_n\|^2 = 0$ весьма продуктивно.

1. Методы коррекции параметра итерации

При решении нелинейного скалярного уравнения соотношение $|\Delta_n|^2 = 0$ может быть наложено, поскольку принципиально может быть достигнуто. Цель работы – модификация МПИ с целью получения сходящихся алгоритмов для решения

нелинейных уравнений. В работе [9] рассмотрен ММН в случае расположения начальной точки x близко к корню \bar{x} . Он основан на разложениях Тейлора типа $f(x) \approx f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + f''(\bar{x})(x-\bar{x})^2/2$, в частном случае – на линеаризации, т. е. на удержании в разложениях такого типа линейного члена. Рассматривая уравнение (2) в форме (3), имеем $\delta_n = |x_n - x_{n-1} + \tau_n \Delta_{n-1}|^2$. Параметр τ_n можно искать из условия, что δ_n имеет минимум, т. е. из условия $\partial \delta_n / \partial \tau_n^* = 0$ [8]. Поскольку $\Delta_{n-1}^* \neq 0$ (иначе итерации уже бы сошлись на шаге $n-1$), это эквивалентно условию $\Delta_n = 0$. Из него имеем $\tau_n = (x_{n-1} - x_n) / \Delta_{n-1}$. Поскольку $\Delta_n = 0$, это означает, что $x_n = \bar{x} = \varphi(\bar{x})$. С другой стороны, $\varphi(x_{n-1}) = \varphi(\bar{x} + x_{n-1} - \bar{x}) \approx \bar{x} + \varphi'(\bar{x})(x_{n-1} - \bar{x})$, поэтому имеем соотношение

$$\Delta_n = \bar{x} - x_{n-1} + \tau_n (x_{n-1} - \bar{x} - \varphi'(\bar{x})(x_{n-1} - \bar{x})),$$

из которого следует $\tau_n = [1 - \varphi'(\bar{x})]^{-1}$. Итерационный процесс приобретает вид

$$x_n = x_{n-1} \left[1 - (1 - \varphi'(x_n))^{-1} \right] + (1 - \varphi'(x_n))^{-1} \varphi(x_{n-1}).$$

Поскольку корень \bar{x} неизвестен, процесс реализуем заменой $x_n \rightarrow x_{n-1}$ в форме

$$x_n = \tilde{\varphi}(x_{n-1}) = (1 - \tau_n)x_{n-1} + \tau_n \varphi(x_{n-1}), \quad (5)$$

полагая $\tau_n = [1 - \varphi'(x_{n-1})]^{-1}$. Итерации (5) имеют форму (2) с переопределением функции φ на $\tilde{\varphi}(x)$. Рассмотрим, к чему он приводит. Известно, что процесс (2) сходится, если $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ в области сходимости (принцип сжимающих отображений). Однако если это условие не выполнено, процесс (2) может разойтись. Это требует поиска и подбора вида функций $\varphi(x)$. Удобно строить такие процессы, которые сходятся из любого начального приближения. Конечно, теоретическая сходимость не означает возможности вычисления. Скажем, вполне можно построить процесс, сходящийся за несколько итераций при движении из начальной точки вблизи корня, и сходящийся за 10^6 или за существенно большее число итераций при движении из удаленной точки. Такие точки нецелесообразно рассматривать и всегда желательно определять области, из которых скорость сходимости высокая. Если рассмотреть форму (5), то для выполнения условия сжимающих отображений достаточно выполнить $|1 - \tau_n(1 - \varphi'(x_{n-1}))| < 1/\alpha$, где параметр $\alpha > 1$. Выбирая этот параметр на каждом шаге, можно находить параметр

итерации и строить сходящийся итерационный процесс. Удобнее, однако, сразу взять $\alpha \rightarrow \infty$, т. е. положить $\tau_n = [1 - \varphi'(x_{n-1})]^{-1}$. В этом случае производная правой части (5) в точке x_{n-1} точно равна нулю, а процесс сходится, даже если $\varphi'(x_{n-1}) > 1$. Такие образом, на каждом шаге процесс (5) подбирает оптимальную функцию $\tilde{\varphi}(x)$ в правой части так, что $\tilde{\varphi}'(x_{n-1}) = 0$.

Рассмотрим ряд частных случаев. Если $\varphi'(x_{n-1}) = 0$, то $\tau_n = 1$, в окрестности этой точки реализуется хорошо сходящийся процесс (2). Если $|\varphi'(x_{n-1})| \gg 1$ (точка вблизи полюса производной), то $\tau_n \approx 0$, поэтому $x_n \approx x_{n-1}$. Это медленно сходящийся процесс, и для его ускорения целесообразно сделать одну-две простые итерации (2), а затем перейти к процессу (5) в новой точке, т. е. отойти от полюса производной. Если $\varphi'(x_{n-1}) = x_{n-1}$, то $x_n(1 - x_{n-1}) = -x_{n-1}x_{n-1} + \varphi(x_{n-1})$. Вблизи корня функция отличается от аргумента на малую величину: $\varphi(x_{n-1}) = x_{n-1} + \delta$. Тогда $x_n = x_{n-1} + \delta / (1 - x_{n-1})$. Если $|x_{n-1}|$ существенно меньше единицы или величина x_{n-1} отрицательная, то сходимость хорошая. Если $\varphi'(x_{n-1}) \approx 1$, возможна разболтка. Если $|\varphi'(x_{n-1})| < 1$, то для ее преодоления надо сделать 2-3 итерации (2), а если $|\varphi'(x_{n-1})| > 1$, то 2-3 итерации (5) без пересчета параметра итерации, а затем продолжить процесс (5). Если $|1 - \varphi'(x_{n-1})| \leq \delta$, где величина δ порядка точности представления чисел в ЭВМ (погрешность округления), это означает, что точка вблизи корня, в котором $\varphi'(\bar{x}) = 1$. При достижении такой точки целесообразно фиксировать τ_n и выполнять метод простой итерации с $\tau_n \approx 1$. Вообще, если $\varphi'(x_{n-1}) = 1$, это означает, что $x_{n-1} = \varphi(x_{n-1})$, т. е. x_{n-1} – это корень. Поэтому рассматриваем случай $\varphi'(x_{n-1}) \approx 1$. Это может быть, только если $\varphi'(\bar{x}) = 1$ и процесс подошел к корню. Фактически продолжение итераций (5) означает использование медленно сходящегося процесса (2). В этом случае следует сделать несколько итераций (5) без пересчета параметров, что обычно достаточно для получения результата. При приближенном вычислении производной из-за разболтки сходимость может не достигаться. В этом случае удобно вообще зафиксировать параметр итерации, пока производная слабо отличается от единицы. Если $\varphi'(\bar{x}) = 1$, для достижения быстрой сходимости функцию целесообразно заменить на новую $\tilde{\varphi}(x) = x + g(x)(x - \varphi(x))$. На эту функцию наложим условие $\tilde{\varphi}'(x_{n-1}) = 0$, что делает процесс быстро сходящимся. Функцию $g(x)$

можно взять с точностью до любого множителя, поэтому $g(x_{n-1})$ задаем произвольно. Полагаем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}'(x) &= 1 + g'(x)(x - \varphi(x)) + \\ &+ g(x)(1 - \varphi'(x)) = a(x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Справа вообще можно написать полином, но это усложняет задачу. Имеем

$$\begin{aligned} 1 + g'(x_{n-1})(x_{n-1} - \varphi(x_{n-1})) &= 0, \\ \tilde{\varphi}(x) &= a(x - x_{n-1})^2 / 2 + \tilde{\varphi}(x_{n-1}). \end{aligned}$$

Параметр a возьмем из условия, что сходимость в точке начального приближения хорошая, например, берем $\tilde{\varphi}'(x_0) = 1/2$. Таким образом, необходимо интегрировать уравнение

$$g'(x) = \frac{a(x - x_{n-1}) - 1 - g(x)(1 - \varphi'(x))}{(x - \varphi(x))}$$

из начальной точки x_{n-1} с произвольным начальным условием

$$g(x_{n-1}) = \frac{\tilde{\varphi}(x_{n-1}) - x_{n-1}}{x_{n-1} - \varphi(x_{n-1})}.$$

Интегрирование желательно выполнить аналитически, например методом рядов. Если это возможно, к новой функции применимы оба процесса (2) и (5). Начальное условие для $g(x)$ произвольное и может использоваться для упрощения решения, как и параметр a .

Поскольку при итерации (5) x_n не попадает точно в корень \bar{x} , итерации продолжаются, однако погрешности $|x_n - x_{n-1}|$ не возрастают, а обычно уменьшаются. Численное вычисление производных может приводить к разболтке, т. е. к немо- нотонному изменению $|x_n - x_{n-1}|$. Вблизи корня процесс имеет второй порядок и сходится квадратично, т. е. подобно методу Ньютона [6]. Однако метод Ньютона сходится не всегда. Преимущества процесса (5) в том, что по построению $\tilde{\varphi}'(x_{n-1}) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, поэтому он обладает бесконечной областью гарантированной сходимости. Однако при его реализации и численном вычислении производных возможно заикливание. Его определяем условиями, когда невязка $|x_n - x_{n-1}|$ мала или изменяется немонотонно, а невязка уравнения $|\Delta_n|$ еще не мала для выхода из процесса. Тогда при численном вычислении производных для избежания заикливания нужно после итерации (5) провести 2–3 простые итерации (2), если для них $|\varphi'| < 1$, или по формуле (5) без пересчета параметра итерации, если $|\varphi'| > 1$. С использованием полученного параметра τ_n и функции $f(x) = x - \varphi(x)$ ме-

тод Ньютона в форме $x_n = x_{n-1} - (x_{n-1} - \varphi(x_{n-1})) / (1 - \varphi'(x_{n-1}))$ приобретает вид (5), т. е. сходится, если $|\varphi''(x_{n-1})| < (1 - \varphi'(x_{n-1}))^2 / |\Delta_{n-1}|$. Если вторая производная в корне ограничена, то сходимость имеет место всегда при попадании в малую окрестность корня. Быстрая сходимость в окрестности корня имеет место, если $\varphi''(\bar{x}) = 0$.

Рассмотрим в качестве примера классическую задачу извлечения квадратного корня $x = \sqrt{a}$. Как известно, алгоритм $x = a/x$ всегда расходится из любой точки, а алгоритм $x = (x + a/x)/2$ сходится всегда из любого начального приближения [6]. Причина в том, что в первом случае $\varphi'(x) = -a/x^2$, $|\varphi'(x)| \gg 1$ при малых x^2 и в точке корня $\varphi'(\bar{x}) = -1$, а во втором случае $\varphi'(x) = (1 - a/x^2)/2$ и в точке корня $\varphi'(\bar{x}) = 0$. При этом всегда имеет место попадание в малую окрестность корня. Если в методе Ньютона взять $f(x) = x^2 - a$, получим сходящийся алгоритм $x = (x + a/x)/2$ с $\tau_n = 1/2$.

Если в методе Ньютона взять $f(x) = \sqrt{x^2 - a}$, получим расходящийся алгоритм $x = a/x$. Вообще для функции $f(x) = (x^2 - a)^\alpha$ сходимость метода Ньютона будет, если $|1 - \alpha^{-1}| < 1$. Следуя вышеизложенному, формируем процесс $x = \tilde{\varphi}(x) = (1 - \tau)x + a\tau/x$, в котором $\tau = [1 + a/x^2]^{-1}$. Как видно, $\tilde{\varphi}(x) = 4(x + a/x)^{-1}$. Для этой функции $\tilde{\varphi}'(\sqrt{a}) = 0$. Желательно использовать алгоритм (5), для которого $\tilde{\varphi}'(x_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Он эквивалентен алгоритму (2) с приведенной функцией $\tilde{\varphi}(x)$. Однако в общем случае, когда производная неизвестна и вычисляется численно, получить функцию $\tilde{\varphi}(x)$ нельзя. В случае извлечения корня такая формула приобретает вид $x = (2x + a/x)/3$. Для нее, как и для процессов $x = x/2 + 1/x$, $x = 4/(x + 2/x)$ и (5), в таблице приведены сходимости итераций для двух начальных приближений $x_0 = 10$ и $x_0 = 0,1$ при $a = 2$. Еще один процесс с удержанием производной второго порядка следует из равенства $x_n = \varphi(x_{n-1} - \tau_n \Delta_{n-1})$ при условии, что величина $\xi_n = \tau_n \Delta_{n-1}$ мала по модулю. Получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x_{n-1} - \xi_n) &\approx \varphi(x_{n-1}) - \\ &- \varphi'(x_{n-1})\xi_n + \varphi''(x_{n-1})\xi_n^2 / 2, \end{aligned}$$

что дает

$$\begin{aligned} \xi_n = \xi(x_{n-1}) &\approx -(1 - \varphi'(x_{n-1})) / \varphi''(x_{n-1}) + \\ &+ \sqrt{[(1 - \varphi'(x_{n-1})) / \varphi''(x_{n-1})]^2 + 2\Delta_{n-1} / \varphi''(x_{n-1})}. \end{aligned}$$

Табл. Сходимость (ход итераций) процессов для вычисления $x = \sqrt{2}$
Table. Convergence (course of iterations) of processes for calculating $x = \sqrt{2}$

n	$x = x/2 + 1/x$	$x = 4(x + 2/x)^{-1}$ и алгоритм (5)	Алгоритм (10)	$x = x/2 + 1/x$	$x = 4(x + 2/x)^{-1}$	Алгоритм (10)
0	10,0	10,0	10,0	0,1	0,1	0,1
1	5,100000	0,392157	6,733333	10,050000	0,199005	6,733333
2	2,746078	0,728311	4,587899	5,124503	0,390282	4,587899
3	1,737195	1,151281	3,203909	2,757392	0,725323	3,203909
4	1,444238	1,3841813	2,344018	1,741358	1,148529	2,344018
5	1,414526	1,413902	1,847091	1,444943	1,384137	1,847091
6	1,414214	1,414214	1,592322	1,414540	1,413887	1,592322

2. Решение дисперсионных уравнений для поверхностных плазмонов

Поверхностные ПП в настоящее время широко исследуются в нанооптике, фотонике и нанолазмонике [1–5; 10–19]. Особенность их моделирования в том, что необходим поиск комплексных корней нелинейных трансцендентных дисперсионных уравнений. Рассмотрим решение комплексного уравнения

$$n = \sqrt{1 - z^2(n)}. \quad (6)$$

Это уравнение описывает комплексный коэффициент замедления ПП вдоль поверхности образца с комплексным импедансом $z(n)$. Поверхностный импеданс характеризует входное сопротивление образца. Металл описывается комплексной зависящей от круговой частоты ω диэлектрической проницаемостью (ДП) $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_L - \omega_p^2 / (\omega^2 - i\omega\omega_c)$, где ω_p , ω_c – константы, а ε_L на низких частотах также является константой. На высоких частотах мы опишем ее двумя термами дисперсии Лоренца, подбирая параметры так, чтобы удовлетворить экспериментальным данным для металлов в оптическом диапазоне. Далее обозначаем $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$. Уравнение (6) имеет точное решение $n = \sqrt{\varepsilon / (\varepsilon + 1)}$ для любого однородного образца с ДП ε , занимающего полупространство (J. Zenneck, 1907). Это точное решение получается сшиванием электромагнитных полей или приравниванием входных импедансов, например металла $z(n) = \sqrt{\varepsilon - n^2} / \varepsilon$ и характеристического импеданса вакуума $z_0(n) = \sqrt{1 - n^2}$ для Е-волны. Однако если образец неоднородный (слоистый или ДП ε зависит от нормальной координаты), входной импеданс $z(n)$ является сложной функцией, но уравнение (6) все равно справедливо. Решения таких уравнений рассмотрены в ряде работ (см. [1–4; 14]). Кроме того, в ряде работ показано совместное итерационное

решение интегральных уравнений и соответствующих им функционалов, получающиеся из линейной теории рассеяния или линейной электродинамики. Искомый параметр в такие функционалы входит нелинейно, в том числе и через аргументы трансцендентных функций. В нелинейной теории рассеяния итерационные методы, как правило, являются наиболее эффективными для получения решений. Часто в теории рассеяния возникают интегральные уравнения типа Липпмана – Швингера в форме объемных (трехмерных) уравнений Фредгольма второго рода, для которых удобно организовать итерационный процесс типа (2), в котором $\hat{\phi}(x)$ – интегральный или интегродифференциальный оператор, а x – функция трехмерных координат и времени. Для таких задач также применимы изложенные итерационные алгоритмы.

Для задач о плазмонах есть области, где модуль производной правой части уравнений типа (6) больше единицы и метод прямой итерации расходится. Решение $n = \sqrt{\varepsilon / (\varepsilon + 1)}$ для металла (серебро) приведено на рис. 1, кривая 1. Однако если решать уравнение (6) МПИ, то в области $\varepsilon' < -1$ он сходится, в области $-1 < \varepsilon' < 1$ расходится, а в области $1 < \varepsilon'$ снова имеет место сходимость. Действительно, $\phi(n) = \sqrt{n^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon / \varepsilon$, $\phi'(n) = n / (\varepsilon \sqrt{n^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon)$. Будем считать потери очень малыми, т. е. $\varepsilon'' \ll |\varepsilon'|$. В области малых частот $n \approx 1$, $|\varepsilon^2| \gg 1$, и $|\phi'(n)| \approx 0$. В области плазмонного резонанса $\varepsilon' \approx -1$ имеем $n \approx (1 - i) / \sqrt{2\varepsilon''}$, $|n| \gg 1$ и $|\phi'(n)| \approx 1$. Если $|\varepsilon| \approx 0$, то $|n| \approx 0$, а $|\phi'(n)| \gg 1$. Если $\varepsilon = 1$, то $n = 1$ и $\phi'(1) = 1$. Нетрудно видеть, что $\phi'(n) = 1/\varepsilon^2 = (1 - n^2)^2 / n^4$. Поэтому сходимость возникает при $\varepsilon > 1$, когда $1/2 < n < 1$ и $\phi'(n) = 1/\varepsilon^2 < 1$. Построим процесс, который сходится во всей области комплексных значений ДП.

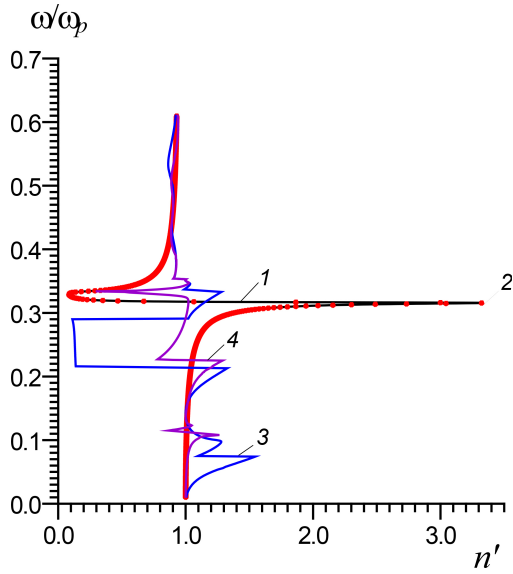


Рис. 1. Дисперсия замедления ПП на поверхности серебра ($\omega_p = 1,35 \cdot 10^{16}$, $\omega_c = 2,7 \cdot 10^{13}$, $\varepsilon_L = 9,0$) (кривая 1), на поверхности серебра, покрытой диэлектрической пленкой толщины 250 нм с ДП $4 - i0,004$ (3), на поверхности серебра, покрытой диэлектрической пленкой и пленкой серебра толщиной 10 нм (4). Точки 2 показывают сходимость итераций (5) для ПП на серебре

Если взять $\varphi'(n) = 1/\varepsilon^2$, процесс типа (2) определен функцией

$$\tilde{\varphi}(n) = \left[\varepsilon^2 \sqrt{n^2/\varepsilon^2 + 1} - 1/\varepsilon - n \right] / (\varepsilon^2 - 1). \quad (7)$$

Однако такой процесс хорошо сходится только в окрестности корня: именно там $\tilde{\varphi}'(n) = 0$. Процесс с индексом k , сходящийся из любого начального приближения, имеет вид

$$n_k = n_{k-1}(1 - \tau_k) + \tau_k \sqrt{n_{k-1}^2/\varepsilon^2 + 1} - 1/\varepsilon. \quad (8)$$

Для него $\partial n_k / \partial n_{k-1} = 0$, $\partial \tau_k / \partial n_{k-1} = 0$, где

$$\tau_k = \frac{\varepsilon^2 \sqrt{n_k^2/\varepsilon^2 + 1} - 1/\varepsilon}{\varepsilon^2 \sqrt{n_k^2/\varepsilon^2 + 1} - 1/\varepsilon - n_k}$$

Реально необходимо строить частотную дисперсию ПП. Полагая для низких частот $n_0 = 1$, получаем быстро сходящийся к решению $n \approx 1$ процесс. Это решение на низких частотах определяет быстрый (движущийся почти со скоростью света) ПП. Плавно повышая частоту и используя для начального значения полученное решение на предыдущей частоте, получаем быстро сходящиеся процессы для всех частот. Преимущество таких вычислений в том, что всегда начальное прибли-

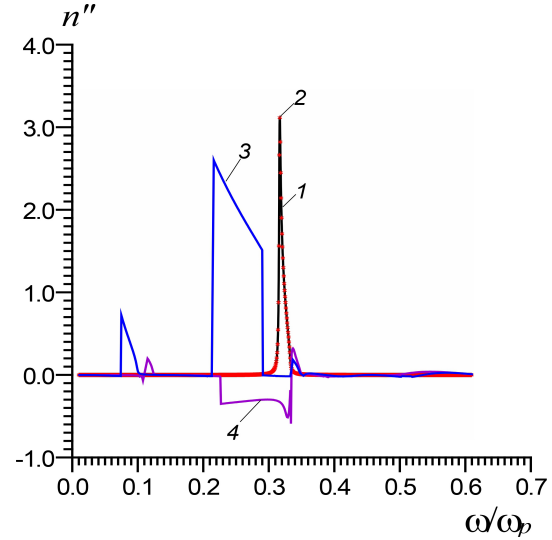


Рис. 2. Дисперсия потерь ПП на поверхности серебра (1), на серебре, покрытом диэлектрической пленкой (3), на серебре, покрытом диэлектрической пленкой и пленкой серебра толщиной 10 нм (4). Точки 2 показывают сходимость итераций (5) для ПП на серебре. Структура соответствует рис. 1

жение близко к корню, поэтому скорость сходимости высокая, и можно также использовать процесс (7). Результаты расчета приводят к точкам 2 на рис. 1, точно лежащим на дисперсионную ветвь (кривая 1, рис. 1).

Рассмотрим более сложную подобную задачу. Пусть на металле лежит слой диэлектрика с ДП ε_d толщины d . Тогда входной импеданс приобретает вид

$$z(n) = z_d \frac{z_0(n) + iz_d \tan(k_0 d \sqrt{\varepsilon_d - n^2})}{z_d + iz_0(n) \tan(k_0 d \sqrt{\varepsilon_d - n^2})}. \quad (9)$$

Опять решаем уравнение (6). Результат решения приведен на рис. 1, кривая 3. Еще один пример на рис. 1 (кривая 4) соответствует случаю, когда еще и на слое диэлектрика лежит слой металла толщины d_m . Импеданс строится рекуррентно по формуле (9) подстановкой в нее $z_0(n) \rightarrow z(n)$ и $z_d \rightarrow z_m$, $\varepsilon_d \rightarrow \varepsilon$, $d \rightarrow d_m$. Можно получить метод более высокого порядка, оставляя в разложении правой части в точке корня три члена $\varphi(x) = \varphi(\bar{x}) + \varphi'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \varphi''(\bar{x})(x - \bar{x})^2/2$ и полагая $\partial \delta_n / \partial \tau_n = 0$, что также ведет к условию $\Delta_n = 0$. Окончательно имеем

$$x = \frac{x \left[2\varphi'(x)\varphi''(x) - \varphi''^2(x) \right] - \varphi(x)\varphi''^2(x)}{2\varphi'(x)\varphi''(x)}. \quad (10)$$

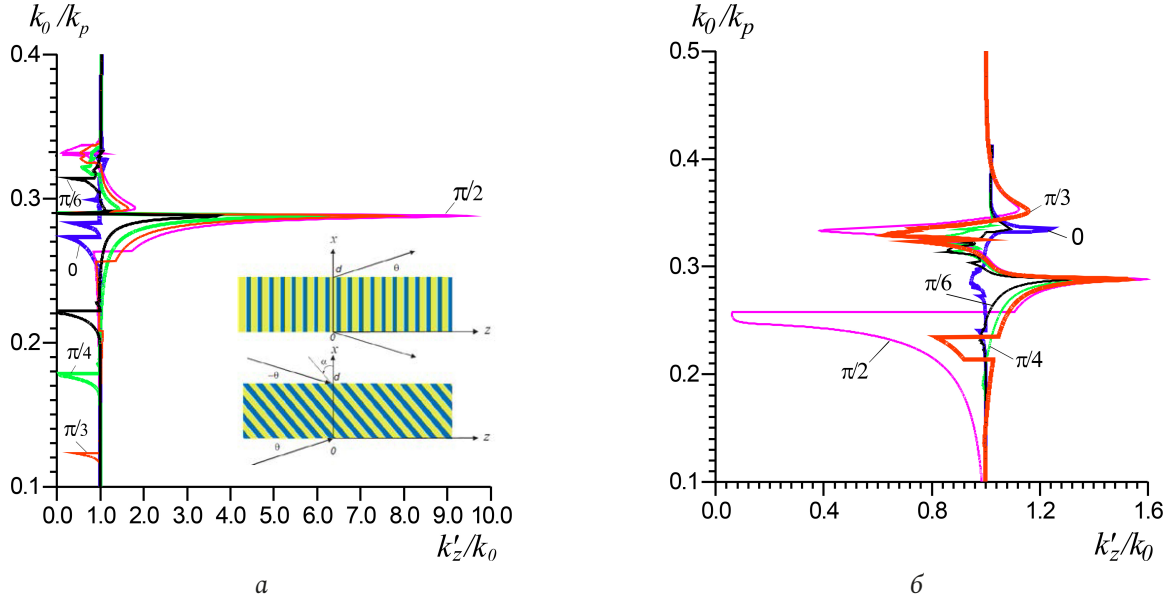


Рис. 3. Дисперсия в слое асимметричного ГММ (вкладка) толщины 50 нм при разных углах α : $\pi/3$, $\pi/4$ и $\pi/6$. Знаки «+» и «-» в ψ соответствуют графикам (а) и (б)
 Fig. 3. Dispersion in an asymmetric HMM layer (inset) 50 nm thick at different angles α : $\pi/3$, $\pi/4$, and $\pi/6$. The signs «+» and «-» in ψ correspond to graphs (a) and (b)

Рассмотрим пример более сложной структуры в виде слоя гиперболического метаматериала ГММ второго типа [5] (см. вставка на рис. 3, а) толщины d , образованного тонкими серебряными пленками, разделенными диэлектрическими слоями SiO_2 . Для упрощения гомогенизации мы считаем слои металла и диэлектрика одинаковой наноразмерной толщины. Тогда гомогенизация справедлива вплоть до оптических частот, и слой, имеющий ось анизотропии вдоль оси z , характеризуется диагональным тензором ДП $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = (\epsilon_m + \epsilon_d)/2$, $\epsilon_{zz} = 2\epsilon_m \epsilon_d / (\epsilon_m + \epsilon_d)$. Здесь мы обозначили ДП металла ϵ_m и диэлектрика ϵ_d . Для ДП металла (серебра) мы используем модель Друде – Лоренца с введением двух Лоренцевых термов для описания сложного поведения ϵ'_m вблизи перехода через нуль [20]. Если повернуть ось анизотропии на угол α относительно оси y , получим тензор ДП вида

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha)\epsilon_{xx} + \sin^2(\alpha)\epsilon_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha)(\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^2(\alpha)\epsilon_{zz} + \sin^2(\alpha)\epsilon_{xx} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Он соответствует случаю асимметричного ГММ, когда ось анизотропии направлена под углом к границе раздела. Еще более сложным является

случай, когда волна распространяется вдоль поверхности в произвольном направлении, т. е. образует некий угол θ с осью z . Поворачивая систему координат вдоль оси x так, что новая ось z совпала с направлением распространения, получим в новой системе координат тензор ДП вида

$$\tilde{\epsilon} = \begin{bmatrix} \tilde{\epsilon}_{xx} & \tilde{\epsilon}_{xy} & \tilde{\epsilon}_{xz} \\ \tilde{\epsilon}_{xy} & \tilde{\epsilon}_{yy} & \tilde{\epsilon}_{yz} \\ \tilde{\epsilon}_{xz} & \tilde{\epsilon}_{yz} & \tilde{\epsilon}_{zz} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

с компонентами:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{xx} &= \cos^2(\alpha)\epsilon_{xx} + \sin^2(\alpha)\epsilon_{zz}, \\ \tilde{\epsilon}_{yy} &= \cos^2(\theta)\epsilon_{xx} + \sin^2(\theta) \times \\ &\times (\cos^2(\alpha)\epsilon_{zz} + \sin^2(\alpha)\epsilon_{xx}), \\ \tilde{\epsilon}_{zz} &= \sin^2(\alpha)\epsilon_{xx} + \cos^2(\theta) \times \\ &\times (\cos^2(\alpha)\epsilon_{zz} + \sin^2(\alpha)\epsilon_{xx}), \\ \tilde{\epsilon}_{xy} &= -\sin(\theta)\sin(2\alpha)(\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx})/2, \\ \tilde{\epsilon}_{xz} &= \cos(\theta)\sin(\alpha)\cos(\alpha)(\epsilon_{zz} - \epsilon_{xx}), \\ \tilde{\epsilon}_{yz} &= \sin(2\theta) \times \\ &\times [\epsilon_{xx} - (\cos^2(\alpha)\epsilon_{zz} + \sin^2(\alpha)\epsilon_{xx})]/2. \end{aligned}$$

Мы не приводим довольно сложно получающиеся ДУ. Наиболее простой случай здесь соответствует полупространству с тензором ДП (11), когда волны распадаются на Е и Н ПП. Также имеется два типа волн для случая конечного слоя (рис. 3). В этом случае ДУ имеет вид

$$k_z^\pm = \pm k_0 \left[\frac{\tilde{\epsilon}_{xx} f(k_0, k_z) / \Delta - 1}{f(k_0, k_z) / \Delta - 1} \right]^{1/2}, \quad (13)$$

где

$$\Delta = \hat{\epsilon}_{xx} \hat{\epsilon}_{zz} - \hat{\epsilon}_{xz}^2,$$

$$\psi = \pm d \sqrt{(k_0^2 \hat{\epsilon}_{xx} - k_z^2) \Delta} / \hat{\epsilon}_{xx},$$

а входящая в (13) функция представляется в виде

$$f(k_0, k_z) = \left[\frac{(\rho - \rho_0) \exp(-i\psi) - (\rho + \rho_0) \exp(i\psi)}{(\rho - \rho_0) \exp(-i\psi) + (\rho + \rho_0) \exp(i\psi)} \right]^2.$$

В случае тензора ДП (12) волны вдоль поверхности слоя гибридные. ДУ может быть получено методом шивания и на основе матриц передачи (переноса) 4×4 – так называемых матриц Берремана. Для рис. 3 также существуют области прямых и обратных волн на дисперсионных кривых. В силу корневых многозначностей в общем случае возможны четыре дисперсионные ветви. Возможно рассмотрение ПП вдоль поверхностей ГММ, построенных на основе графен-диэлектрических структур [5]. ГММ с полупроводниковыми и графеновыми слоями хорошо оптически управляются. Также возможно создание гиротропных структур, управляемых магнитным полем, но получение ДУ в этом случае является весьма сложной задачей.

Заключение

Показано, что алгоритм МПИ с коррекцией сходимости путем подбора правой части, имеющей нулевую производную на каждом шаге, совпадает с ММН первого приближения (при линейризации) и имеет то преимущество, что всегда сходится (по крайней мере, невязка не возрастает). Такой выбор τ_n приводит к равенству нулю линейризованной невязки. Вблизи корня сходимость квадратичная. Однако в ряде случаев возможно сильное замедление сходимости. В этих случаях можно предусмотреть специальные методы коррекции шага. Если корней несколько, алгоритм их поиска может состоять из движений из сильно различных начальных приближений.

Рассмотренные адаптивные методы удобны для задач плазмоники и позволяют определять целиком всю комплексную ветвь и даже несколько ветвей (если они есть) дисперсионного уравнения при плавном изменении частоты (или иного параметра), т. е. решать проблему поиска и классификации комплексных корней. На рис. 2 приведены результаты для потерь $n''(\omega)$, соответствующие рис. 1. Приведенные численные результаты, рис. 1–3 показывают возможность существования обратных ПП, для которых $n'(\omega)n''(\omega) < 0$. Если дисперсионная кривая 4, рис. 1 строится из условия $\text{Re}(n(\omega)) > 0$, то обратным ПП соответствуют «отрицательные» потери (рис. 2, кривая 4).

Список литературы

1. Давидович М.В. Плазмоны в многослойных плоскостных структурах // Квантовая электроника. 2017. Т. 47, № 6. С. 567–579. URL: <http://mi.mathnet.ru/qe16620>
2. Давидович М.В. Втекающие и вытекающие несобственные моды – анализ диссипативных дисперсионных уравнений и волна Ценнека. Саратов: Сарат. ун-т, 2014. 104 с.
3. Давидович М.В. Максимальное замедление и отрицательная дисперсия плазмонов вдоль металлического слоя // ПЖТФ. 2017. Т. 43, вып. 22. С. 55–62. DOI: <https://doi.org/10.21883/PJTF.2017.22.45261.16629>
4. Давидович М.В. Об условии перехода быстрой поверхностной волны в медленную // Радиотехника и электроника. 2018. Т. 63, № 6. С. 499–506. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35104331>
5. Давидович М.В. Гиперболические метаматериалы: получение, свойства, применения, перспективы // УФН. 2019. Т. 189, № 12. С. 1250–1284. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2019.08.038643>
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
7. Chapra S.C., Canale R.P. Numerical Methods for Engineers. New York: McGraw-Hill Education, 2014. 970 p.
8. Самохин А.Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М.: Радио и связь, 1998. 160 с.
9. Давидович М.В. Итерационные методы решения задач электродинамики. Саратов: Сарат. ун-т, 2014. 240 с.
10. Long-range plasmonic waveguides with hyperbolic cladding / V.E. Babicheva [et al.] // Opt. Express. 2015. Vol. 23, no. 24. P. 31109–31119. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.23.031109>
11. Lyashko E.I., Maimistov A.I. Guided waves in asymmetric hyperbolic slab waveguides: the TM mode case // J. Opt. Soc. Am. B. 2016. Vol. 33, no. 11. P. 2320–2330. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.33.002320>
12. Chern R.-L., Yu Y.-Z. Chiral surface waves on hyperbolic-gyromagnetic metamaterials // Opt. Express. 2017. Vol. 25, no. 10. P. 11801–11812. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.25.011801>
13. Chiral surface waves supported by biaxial hyperbolic metamaterials / W.-L. Gao [et al.] // Light Sci. Appl. 2015. Vol. 4, no. 9. P. e328-1-5. DOI: <https://doi.org/10.1038/lsa.2015.101>

14. Popov V., Lavrinenko A.V., Novitsky A. Surface waves on multilayer hyperbolic metamaterials: Operator approach to effective medium approximation // *Phys. Rev. B*. 2018. Vol. 97, no. 12. P. 125428-1–10. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.125428>
15. Engineered surface Bloch waves in graphene-based hyperbolic metamaterials / Y. Xiang [et al.] // *Opt. Express*. 2014. Vol. 22, no. 3. P. 3054–3062. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.22.003054>
16. Tunable terahertz amplification based on photoexcited active graphene hyperbolic metamaterials [Invited] / T. Guo [et al.] // *Opt. Materials Express*. 2014. Vol. 8, no. 12. P. 3941–3952. DOI: <https://doi.org/10.1364/OME.8.003941>
17. Grig T., Hess O. Tunable surface waves at the interface separating different graphene-dielectric composite hyperbolic metamaterials // *Opt. Express*. 2017. Vol. 25, no. 10. P. 11466–11476. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.25.011466>
18. Tunable bulk polaritons of graphene-based hyperbolic metamaterials / L. Zhang [et al.] // *Opt. Express*. 2014. Vol. 22, no. 11. P. 14022–14030. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.22.014022>
19. Давидович М.В. Плазмон-поляритоны Дьяконова вдоль гиперболического метаматериала // *Компьютерная оптика*. 2021. Т. 45, № 1. С. 48–57. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-673>
20. Johnson P.B., Christy R.W. Optical constants of the noble metals // *Phys. Rev. B*. 1972. Vol. 6, no. 12. P. 4370–4379. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.6.4370>

References

1. Davidovich M.V. Plasmons in multilayer planar-layered structures. *Kvantovaya elektronika*, 2017, vol. 47, no. 6, pp. 567–579. URL: <http://mi.mathnet.ru/qe16620> (In Russ.)
2. Davidovich M.V. *Inflowing and Outflowing Improper Modes – Analysis of Dissipative Dispersion Equations and Zenneck Wave*. Saratov: Sarat. un-t, 2014, 104 p. (In Russ.)
3. Davidovich M.V. Maximum deceleration and negative dispersion of plasmons along the metal layer. *PZhTF*, 2017, vol. 43, no. 22, pp. 55–62. DOI: <https://doi.org/10.21883/PJTF.2017.22.45261.16629> (In Russ.)
4. Davidovich M.V. On the condition for the transition of a fast surface wave to a slow one. *Radiotekhnika i elektronika*, 2018, vol. 63, no. 6, pp. 499–506. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35104331> (In Russ.)
5. Davidovich M.V. Hyperbolic metamaterials: preparation, properties, applications, prospects. *UFN*, 2019, vol. 189, no. 12, pp. 1250–1284. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFN.2019.08.038643> (In Russ.)
6. Kalitkin N.N. *Numerical Methods*. Moscow: Nauka, 1978, 512 p. (In Russ.)
7. Chapra S.C., Canale R.P. *Numerical Methods for Engineers*. New York: McGraw-Hill Education, 2014, 970 p.
8. Samohin A.B. *Integral Equations and Iterative Methods in Electromagnetic Scattering*. Moscow: Radio i svjaz', 1998, 160 p. (In Russ.)
9. Davidovich M.V. *Iterative Methods for Solving Problems of Electrodynamics*. Saratov: Sarat. un-t, 2014, 240 p.
10. Babicheva V.E. et al. Long-range plasmonic waveguides with hyperbolic cladding. *Opt. Express*, 2015, vol. 23, no. 24, pp. 31109–31119. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.23.031109>
11. Lyashko E.I., Maimistov A.I. Guided waves in asymmetric hyperbolic slab waveguides: the TM mode case. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2016, vol. 33, no. 11, pp. 2320–2330. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.33.002320>
12. Chern R.-L., Yu Y.-Z. Chiral surface waves on hyperbolic-gyromagnetic metamaterials. *Opt. Express*, 2017, vol. 25, no. 10, pp. 11801–11812. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.25.011801>
13. Gao W.-L. et al. Chiral surface waves supported by biaxial hyperbolic metamaterials. *Light Sci. Appl.*, 2015, vol. 4, no. 9, pp. e328-1–5. DOI: <https://doi.org/10.1038/lsa.2015.101>
14. Popov V., Lavrinenko A.V., Novitsky A. Surface waves on multilayer hyperbolic metamaterials: Operator approach to effective medium approximation. *Phys. Rev. B*, 2018, vol. 97, no. 12, pp. 125428-1–10. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.125428>
15. Xiang Y. et al. Engineered surface Bloch waves in graphene-based hyperbolic metamaterials. *Opt. Express*, 2014, vol. 22, no. 3, pp. 3054–3062. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.22.003054>
16. Guo T. et al. Tunable terahertz amplification based on photoexcited active graphene hyperbolic metamaterials [Invited]. *Opt. Materials Express*, 2014, vol. 8, no. 12, pp. 3941–3952. DOI: <https://doi.org/10.1364/OME.8.003941>
17. Grig T., Hess O. Tunable surface waves at the interface separating different graphene-dielectric composite hyperbolic metamaterials. *Opt. Express*, 2017, vol. 25, no. 10, pp. 11466–11476. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.25.011466>
18. Zhang L. et al. Tunable bulk polaritons of graphene-based hyperbolic metamaterials. *Opt. Express*, 2014, vol. 22, no. 11, pp. 14022–14030. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.22.014022>
19. Davidovich M.V. Dyakonov plasmon-polaritons along a hyperbolic metamaterial. *Komp'yuternaya optika*, 2021, vol. 45, no. 1, pp. 48–57. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-673> (In Russ.)
20. Johnson P.B., Christy R.W. Optical constants of the noble metals. *Phys. Rev. B*, 1972, vol. 6, no. 12, pp. 4370–4379. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.6.4370>

Physics of Wave Processes and Radio Systems 2021, vol. 24, no. 3, pp. 18–27

DOI 10.18469/1810-3189.2021.24.3.18-27

Received 25 May 2021
Accepted 30 June 2021

The method of simple iterations with correction of convergence and the minimal discrepancy method for plasmonic problems

Mikhail V. Davidovich¹, Alexander K. Kobetz², Kirill A. Sayapin¹

¹ Saratov State University
83, Astrakhanskaya Street,
Saratov, 410012, Russia

² LLC «NPF “Etna plus”»
11, Vishnevaya Street,
Saratov, 410040, Russia

Abstract – The problem of searching for complex roots of the dispersion equations of plasmon-polaritons along the boundaries of the layered structure-vacuum interface is considered. Such problems arise when determining proper waves along the interface of structures supporting surface and leakage waves, including plasmons and polaritons along metal, dielectric and other surfaces. For the numerical solution of the problem, we consider a modification of the method of simple iterations with a variable iteration parameter leading to a zero derivative of the right side of the equation at each step, i.e. convergent iterations, as well as a modification of the minimum residuals method. It is shown that the method of minimal residuals with linearization coincides with the method of simple iterations with the specified correction. Convergent methods of higher orders are considered. The results are demonstrated by examples, including complex solutions of dispersion equations for plasmon-polaritons. The advantage of the method over other methods of searching for complex roots in electrodynamics problems is the possibility of ordering the roots and constructing dispersion branches without discontinuities. This allows you to classify modes.

Keywords – simple iteration method; minimal residuals method; characteristic equation; plasmon-polaritons.

Информация об авторах

Давидович Михаил Владимирович, доктор физико-математических наук (2000 г.), профессор кафедры радиотехники и электродинамики (с 2000 г.) Института физики Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия. Профессор (2001 г.), Senior Member, IEEE (2001 г.). Автор 8 монографий и более 350 статей.

Область научных интересов: электродинамика, радиофизика, оптика и нанофотоника, теория плазмы, физика конденсированных сред и наноструктур, эмиссионная и вакуумная электроника.

E-mail: davidovichmv@info.sgu.ru

Кобец Александр Константинович, директор по качеству ООО «НПФ “Этна плюс”», г. Саратов, Россия. Окончил аспирантуру Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского по специальности «Радиофизика» в 2020 г. Автор 16 публикаций и патентов РФ.

Область научных интересов: радиофизика, СВЧ-нагрев и обработка материалов.

E-mail: kobetzak@info.sgu.ru

Саяпин Кирилл Александрович, аспирант кафедры радиотехники и электродинамики Института физики Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского по специальности «Радиофизика», г. Саратов, Россия. Автор 28 научных публикаций.

Область научных интересов: радиофизика, техника СВЧ, методы математического моделирования.

E-mail: sayapin_kirill@mail.ru

Information about the Authors

Mikhail V. Davidovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences (2000), professor of the Department of Radio Engineering and Electrodynamics (since 2000), Institute of Physics, Saratov State University, Saratov, Russia. Professor (2001), Senior Member, IEEE (2001). Author of 8 monographs and over 350 articles.

Research interests: electrodynamics, radiophysics, optics and nanophotonics, plasma theory, physics of condensed matter and nanostructures, emission and vacuum electronics.

E-mail: davidovichmv@info.sgu.ru

Alexander K. Kobetz, quality director of LLC «NPF “Etna plus”», Saratov, Russia. Graduated from Saratov State University with a degree in Radiophysics in 2020. Author of 16 publications and patents of the Russian Federation.

Research interests: radiophysics, microwave heating and material processing.

E-mail: kobetzak@info.sgu.ru

Kirill A. Sayapin, postgraduate student of the Department of Radio Engineering and Electrodynamics, Institute of Physics, Saratov State University with a degree in Radiophysics, Saratov, Russia. Author of 28 scientific publications.

Research interests: radiophysics, microwave technology, methods of mathematical modeling.

E-mail: sayapin_kirill@mail.ru