

Математическая модель задержки на базе системы с распределениями Эрланга

В.Н. Тарасов

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Россия, г. Самара,
ул. Л. Толстого, 23

Аннотация – Настоящая статья посвящена анализу системы массового обслуживания, образованной двумя потоками с функциями плотности закона распределения Эрланга второго порядка с целью вывода решения для средней задержки требований в очереди, являющейся главной характеристикой для любых систем массового обслуживания. По этой характеристике, например, оценивают задержки пакетов в сетях пакетной коммутации при их моделировании с помощью системы массового обслуживания. В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 особо актуальны в связи с тем, что не существует решения в конечном виде для общего случая. Поэтому в качестве произвольного закона распределения G при исследовании таких систем используют различные частные законы распределений. В исследовании систем G/G/1 важную роль играет метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли, и большинство результатов в теории массового обслуживания получены именно с помощью данного метода. В статье представлен вывод расчетной формулы для средней задержки требований в очереди в рассматриваемой системе также на основе метода спектрального разложения.

Ключевые слова – распределение; интегральное уравнение Линдли; метод спектрального разложения; преобразование Лапласа.

Введение

Статья содержит анализ системы массового обслуживания (СМО), образованной двумя потоками с функциями плотности распределения Эрланга второго порядка, для которого в открытом доступе не обнаружены результаты по средней задержке требований в очереди, являющейся главной характеристикой для любых СМО. В исследовании систем G/G/1 важную роль играет метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ), и большинство результатов в теории массового обслуживания получены именно с помощью данного метода. Используемый в работе метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли впервые подробно представлен в классике теории массового обслуживания [1], а впоследствии применялся во многих работах, включая [2–4]. Другой подход к решению ИУЛ использован в [5]. Здесь вместо термина «спектральное разложение» использована факторизация, а вместо функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ – компоненты факторизации $\omega_+(z, t)$ и $\omega_-(z, t)$ функции $1 - z\chi(t)$.

Такой подход для получения конечных результатов для рассматриваемых систем менее удобен, чем подход, описанный в [1] и проиллюстрированный многочисленными примерами для лучшего понимания. Метод спектрального разложения

решения ИУЛ также применен для исследования систем с гиперэкспоненциальными входными распределениями в работах [6–8]. Результаты современных исследований по системам массового обслуживания приведены в работах [12–15].

Теперь перейдем к рассмотрению закона гамма-распределения. Как известно, двухпараметрическое гамма-распределение задается функцией плотности общего вида

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\beta^{-\alpha} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta}}{\Gamma(\alpha)}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, равная $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$

для любого вещественного числа $z > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Преобразование Лапласа функции $f(t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-st} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta} dt = \\ &= \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-(s+1/\beta)t} dt = \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} (s+1/\beta)t &= x \\ t &= \frac{\beta}{\beta s + 1} x \\ dt &= \frac{\beta}{\beta s + 1} dx \end{aligned} \right| =$$

$$= \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{\beta s + 1} \right)^\alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx =$$

$$= \frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{\beta s + 1} \right)^\alpha \Gamma(\alpha) = \frac{1}{(\beta s + 1)^\alpha}.$$

Анализируя преобразование Лапласа гамма-распределения, делаем вывод, что этот закон распределения в теории массового обслуживания можно использовать только в частных случаях при целочисленных значениях $\alpha \geq 2$.

С целью дальнейшего построения дробно-рациональной функции для спектрального разложения в последнем выражении сделаем замену переменной $\lambda = 1/\beta$ для функции плотности распределения интервалов входного потока, $\mu = 1/\beta$ – для функции плотности распределения времени обслуживания и ограничимся случаем $\alpha = 2$.

Таким образом, в случае целочисленных $\alpha \geq 2$ данное распределение превращается в обычное распределение Эрланга порядка α . Например, при замене $\lambda = 1/\beta$, $k = \alpha$ получим обычное распределение Эрланга порядка k : $f_\lambda(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!}$.

Ограничимся распределением Эрланга второго порядка при $k = 2$ $f_\lambda(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$. Это распределение отличается от рассмотренного в [11], а также в других работах автора нормированного распределения Эрланга $f_\lambda(t) = 4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}$, обозначенного ранее E_2 .

Разница между ними заключается в том, что у нормированного распределения Эрланга математическое ожидание не зависит от порядка распределения k , следовательно, они еще отличаются и числовыми характеристиками [3]. Из-за такой разницы между распределениями СМО, образованную двумя потоками с функциями плотности обычного распределения Эрланга второго порядка, полученного из гамма распределения обозначим $\Gamma_2/\Gamma_2/1$. Это будет различать СМО $E_2/E_2/1$, образованную нормированными распределениями Эрланга.

1. Постановка задачи

В статье ставится задача получения решения в замкнутой форме для основной характеристики системы – средней задержки в очереди для указанной СМО с помощью метода спектрального разложения решения ИУЛ. Вначале проясним различие между двумя законами распределения Γ_2 и E_2 . Для этого в табл. 1 и 2 приведем их числовые харак-

Таблица 1. Числовые характеристики распределений
 Table 1. Numerical characteristics of distributions

Распределение	$\bar{\tau}_\lambda$	$\overline{\tau_\lambda^2}$	c_λ^2
Γ_2	$2/\lambda$	$6/\lambda^2$	$1/2$
E_2	$1/\lambda$	$3/(2\lambda^2)$	$1/2$

Таблица 2. Параметр распределения, полученный методом моментов
 Table 2. Distribution parameter obtained by the method of moments

Распределение	Плотность $f_\lambda(t)$	Параметр λ
Γ_2	$\lambda^2 t e^{-\lambda t}$	$\lambda = 2/\bar{\tau}_\lambda$
E_2	$4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}$	$\lambda = 1/\bar{\tau}_\lambda$

теристики: первый начальный момент $\bar{\tau}_\lambda$, второй начальный момент $\overline{\tau_\lambda^2}$, квадрат коэффициента вариации c_λ^2 , а также параметр распределений λ .

Таким образом, указанные законы распределения отличаются как параметром, так и числовыми характеристиками, кроме коэффициента вариации.

При кратком изложении метода спектрального разложения решения ИУЛ будем придерживаться подхода и символики автора классики теории массового обслуживания [1]. Суть решения ИУЛ методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения $F_\lambda^*(-s) \cdot B^*(s) - 1$ представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от s . Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо следующее спектральное разложение: $F_\lambda^*(-s) F_\mu^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$, где $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ – некоторые рациональные функции от s , которые можно разложить на множители. Функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям согласно [1]:

- для $\text{Re}(s) > 0$ функция $\psi_+(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости;
- для $\text{Re}(s) < D$ функция $\psi_-(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости, где D – некоторая положительная константа, определяемая из условия:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{e^{-Dt}} < \infty.$$

Кроме того, функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям:

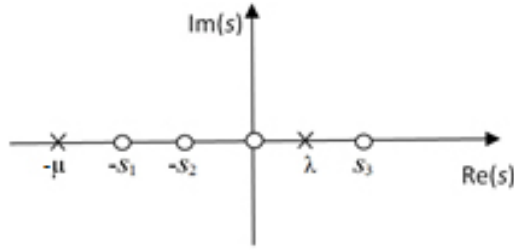


Рис. Нули и полюсы функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ для системы $\Gamma_2/\Gamma_2/1$
Fig. Zeros and poles of the function $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ for the system $\Gamma_2/\Gamma_2/1$

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) > 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad (2)$$

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) < D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1.$$

Для решения поставленной задачи необходимо вначале построить для рассматриваемой системы спектральное разложение вида $F_\lambda^*(-s)F_\mu^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ с учетом условий (1), (2). Тогда для системы $\Gamma_2/\Gamma_2/1$ законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида:

$$f_\lambda(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}, \quad (3)$$

$$f_\mu(t) = \mu^2 t e^{-\mu t}. \quad (4)$$

Преобразования Лапласа функций (3) и (4) будут соответственно:

$$F_\lambda^*(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^2; \quad F_\mu^*(s) = \left(\frac{\mu}{\mu + s} \right)^2.$$

Тогда спектральное разложение решения ИУЛ для рассматриваемой системы $F_\lambda^*(-s)F_\mu^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - s} \right)^2 \left(\frac{\mu}{\mu + s} \right)^2 - 1 = \\ &= \frac{\lambda^2 \mu^2 - (\lambda - s)^2 (\mu + s)^2}{(\lambda - s)^2 (\mu + s)^2} = \\ &= \frac{-s(s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0)}{(\lambda - s)^2 (\mu + s)^2}, \end{aligned}$$

где коэффициенты кубического многочлена, собранные с помощью символьных операций Mathcad:

$$c_0 = 2\lambda\mu(\mu - \lambda), \quad c_1 = -(\lambda^2 - 4\lambda\mu + \mu^2),$$

$$c_2 = -2(\mu - \lambda).$$

Кубическое уравнение, полученное из числителя разложения $s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0 = 0$, имеет два отрицательных корня и один положительный, т. к. в случае стабильной системы $\lambda < \mu$, т. е. $(\mu - \lambda) > 0$. Обозначим их для удобства через $-s_1$, $-s_2$ и s_3 .

Тогда нули числителя разложения $\psi_+(s)/\psi_-(s)$:
 $s = 0, -s_1, -s_2, s_3$.

Двукратные полюсы разложения $\psi_+(s)/\psi_-(s)$:
 $s = \lambda, s = -\mu$ (см. рис.). Теперь с учетом условий (1) и (2) построим функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$:

$$\psi_+(s) = \frac{s(s + s_1)(s + s_2)}{(\mu + s)^2}; \quad \psi_-(s) = -\frac{(\lambda - s)^2}{(s - s_3)}.$$

Выполнение условий (1) для этих функций очевидно, что подтверждается также рисунком. Остается проверить выполнение условий (2):

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1;$$

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\psi_-(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{2(\lambda - s)}{2s - s_3} = -1.$$

Условия (2) также полностью выполнены.

При построении этих функций удобнее нули и полюсы отношения $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ отметить на комплексной s -плоскости для исключения ошибок построения функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$. На рисунке полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками.

Далее по методике спектрального разложения найдем константу K :

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s + s_1)(s + s_2)}{(\mu + s)^2} = \frac{s_1 s_2}{\mu^2},$$

где s_1 и s_2 – абсолютные значения отрицательных корней $-s_1, -s_2$. Теперь построим промежуточную функцию

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{s_1 s_2 (s + \mu)^2}{\mu^2 s (s + s_1)(s + s_2)}.$$

Отсюда преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания:

$$W^*(s) = s \cdot \Phi_+(s) = \frac{s_1 s_2 (s + \mu)^2}{\mu^2 (s + s_1)(s + s_2)}. \quad (5)$$

Для нахождения среднего времени ожидания найдем производную от функции $W^*(s)$ со знаком минус в точке $s = 0$:

$$-\frac{dW^*(s)}{d(s)} \Big|_{s=0} = \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}.$$

Окончательно среднее время ожидания для системы $\Gamma_2/\Gamma_2/1$:

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu}, \quad (6)$$

где s_1 и s_2 как корни кубического уравнения выражаются через параметры распределений (3) и (4).

2. Результаты вычислительных экспериментов

Ниже в табл. 3 приведены данные расчетов для системы $\Gamma_2/\Gamma_2/1$ для различных случаев нагрузки $\rho = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$. Для сравнения в правой колонке приведены данные для системы $E_2/E_2/1$, образованной нормированными распределениями Эрланга. Коэффициент загрузки в данном случае определяется отношением средних интервалов $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$. Расчеты, приведенные в табл. 3, проведены для удобства для нормированного времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu = 1$.

Несмотря на большие различия между распределениями E_2 и Γ_2 , показанные в табл. 1 и 2, а также различие между преобразованиями Лапласа функции плотности времени ожидания, данные табл. 3 полностью совпадают с соответствующими данными для СМО $E_2/E_2/1$. Данные табл. 3 хорошо согласуются с результатами метода двухмоментной аппроксимации [9], а также с результатами имитации [10].

Заключение

Таким образом, по результатам работы можно сделать следующие выводы.

Научная новизна полученных результатов заключается в том, что получено спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемой системы и с его помощью выведена расчетная формула для среднего времени ожидания в очереди для этой системы в зам-

Таблица 3. Результаты экспериментов для СМО $\Gamma_2/\Gamma_2/1$ и $E_2/E_2/1$
 Table 3. Results of experiments for QS $\Gamma_2/\Gamma_2/1$ and $E_2/E_2/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания	
ρ	λ	для системы $\Gamma_2/\Gamma_2/1$	для системы $E_2/E_2/1$
0,1	0,2	0,017	0,017
0,3	0,6	0,131	0,131
0,5	1,0	0,390	0,390
0,7	1,4	1,039	1,039
0,9	1,8	4,359	4,359

кнутой форме. Данные численных экспериментов подтверждают, с одной стороны, полную адекватность полученных теоретических результатов, а с другой – полное совпадение результатов по среднему времени ожидания для систем $\Gamma_2/\Gamma_2/1$ и $E_2/E_2/1$. Предложенный подход к анализу систем также позволяет находить джиттер через преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания, т. к. он в [16] определен как разброс времени ожидания вокруг среднего значения.

Практическое значение работы заключается в том, что полученные результаты с успехом могут быть применены в современной теории телетрафика, где задержки пакетов входящего трафика играют первостепенную роль. Для этого достаточно знать средние значения интервалов между пакетами входящего трафика и времени обслуживания, что не вызывает трудностей при использовании современных анализаторов трафика.

Список литературы

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / пер. с англ. под ред. В.И. Неймана. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
2. Brännström N. A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems: master's thesis applied to HS-DSCH. Lulea University of Technology, 2004. 79 p. URL: <http://tu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1016709/FULLTEXT01>
3. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.
4. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress. Copenhagen, Denmark. 19–26 June 1991. P. 683–688. URL: <https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true>
5. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods // Operation Research. 1982. Vol. 30, No. 1. P. 125–147. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125>
6. Малахов С.В., Карташевский И.В., Тарасов В.Н. Теоретическое и экспериментальное исследование задержки в программно-конфигурируемых сетях // Инфокоммуникационные технологии. 2015. Т. 13, № 4. С. 409–413. DOI: <https://doi.org/10.18469/ikt.2015.13.4.08>
7. Малахов С.В., Тарасов В.Н. Экспериментальные исследования производительности сегмента программно-конфигурируемой сети // Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2013. № 2. С. 81–85.
8. Тарасов В.Н., Липилина Л.В., Бахарева Н.Ф. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров // Информационные технологии. 2016. Т. 22, № 12. С. 952–957. URL: http://novtex.ru/IT/it2016/it1216_web-952-957.pdf
9. Тарасов В.Н. Вероятностное компьютерное моделирование сложных систем. Самара: СНЦ РАН, 2002. 194 с.
10. Тарасов В.Н., Коннов А.Л., Ушаков Ю.А. Анализ и оптимизация локальных сетей и сетей связи с помощью программной системы OPNET Modeler // Вестник Оренбургского государственного университета. 2006. № 6-2 (56). С. 197–204. URL: <http://vestnik.osu.ru/doc/1033/article/2762/lang/0>

11. Тарасов В.Н. Исследование и сравнение двойственных систем E2/M/1 и M/E2/1 // Инфокоммуникационные технологии. 2019. Т. 17, № 2. С. 157–162. DOI: <https://doi.org/10.18469/ikt.2019.17.2.03>
12. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues // *Queueing Systems*. 2016. Vol. 84, No. 1–2. P. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
13. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times // *Queueing Systems*. 2018. Vol. 89, No. 3–4. P. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
14. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates // *Queueing Systems*. 2018. Vol. 89. № 3–4. P. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
15. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure // *Queueing Systems*. 2019. Vol. 93, No. 1–2. P. 139–152. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09606-1>
16. Demichelis C., Chimento P. IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics. URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>

References

1. Klejnrok L. *Queueing Theory* / trans. from English ed. by V.I. Neumann. Moscow: Mashinostroenie, 1979, 432 p. (In Russ.)
2. Brännström N. *A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems: master's thesis applied to HS-DSCH*. Lulea University of Technology, 2004, 79 p. URL: <http://tu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1016709/FULLTEXT01>
3. Aliev T.I. *Discrete Modeling Basics*. Saint Petersburg: SPbGU ITMO, 2009, 363 p. (In Russ.)
4. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress, Copenhagen, Denmark, 19–26 June 1991*, pp. 683–688. URL: <https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true>
5. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods. *Operation Research*, 1982, vol. 30, no. 1, pp. 125–147. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125>
6. Malahov S.V., Kartashevskij I.V., Tarasov V.N. Theoretical and experimental study of delay in software defined networks. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2015, vol. 13, no. 4, pp. 409–413. DOI: <https://doi.org/10.18469/ikt.2015.13.4.08> (In Russ.)
7. Malahov S.V., Tarasov V.N. Experimental studies of the performance of the SDN segment. *Intellekt. Innovatsii. Investitsii*, 2013, no. 2, pp. 81–85. (In Russ.)
8. Tarasov V.N., Lipilina L.V., Bahareva N.F. Automation of calculating the characteristics of queuing systems for a wide range of changes in their parameters. *Informatsionnye tehnologii*, 2016, vol. 22, no. 12, pp. 952–957. URL: http://novtex.ru/IT/it2016/it1216_web-952-957.pdf (In Russ.)
9. Tarasov V.N. *Probabilistic Computer Modeling of Complex Systems*. Samara: SNTs RAN, 2002, 194 p. (In Russ.)
10. Tarasov V.N., Konnov A.L., Ushakov Yu.A. Analysis and optimization of local networks and communication networks using the OPNET Modeler software system. *Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2006, no. 6–2 (56), pp. 197–204. URL: <http://vestnik.osu.ru/doc/1033/article/2762/lang/0> (In Russ.)
11. Tarasov V.N. Study and comparison of dual systems E2/M/1 and M/E2/1. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2019, vol. 17, no. 2, pp. 157–162. DOI: <https://doi.org/10.18469/ikt.2019.17.2.03> (In Russ.)
12. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*, 2016, vol. 84, no. 1–2, pp. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
13. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3–4, pp. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
14. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3–4, pp. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
15. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, no. 1–2, pp. 139–152. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09606-1>
16. Demichelis C., Chimento P. IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics. URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>

Physics of Wave Processes and Radio Systems

2021, vol. 24, no. 2, pp. 62–67

DOI 10.18469/1810-3189.2021.24.2.62-67

Received 9 April 2021
Accepted 11 May 2021

Mathematical model of delay based on a system with gamma distribution

Veniamin N. Tarasov

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics
23, L. Tolstoy Street,
Samara, 443010, Russia

Abstract – This article is devoted to the analysis of a queuing system formed by two flows with density functions of the gamma distribution law in order to derive a solution for the average delay of requests in the queue, which is the main characteristic for any queuing system. According to this characteristic, for example, packet delays in packet-switched networks are estimated when they are modeled using the queuing system. In queuing theory, studies of G/G/1 systems are especially relevant because there is no solution in the final form for the general case. Therefore, in the study of such systems, various particular distribution laws are used as an arbitrary distribution law for G. In the study of G/G/1 systems, an important role is played by the method of spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation, and most of the results in the theory of queuing were obtained using this method. The article presents the derivation of the calculation formula for the average delay of requests in the queue in the system under consideration, also based on the spectral decomposition method.

Keywords – gamma distribution; Lindley integral equation; spectral decomposition method; Laplace transform.

Информация об авторе

Тарасов Вениамин Николаевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: информационные технологии, проектирование и моделирование компьютерных сетей, методы и модели исследования вычислительных систем и сетей, теория массового обслуживания.

E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Information about the Author

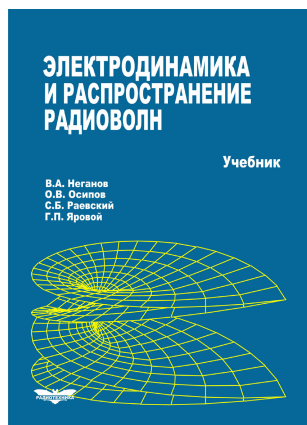
Veniamin N. Tarasov, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Software and Management in Technical Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

Research interests: information technology, design and modeling of computer networks, methods and models for the study of computing systems and networks, queuing theory.

E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Неганов, В.А.

Электродинамика и распространение радиоволн: учебник / В.А. Неганов [и др.]; под ред. В.А. Неганова и С.Б. Раевского. – Изд. 4-е, доп. и перераб. – М.: Радиотехника, 2009. – 744 с.



ISBN 978-5-88070-154-4

УДК 537.87(075.3)

ББК 22.3

Н 41

Книга написана активно работающими в области электродинамики учеными. Излагаются теория электромагнитного поля с акцентом на радиотехническую электродинамику и анализ волновых процессов; рассматриваются отражение и преломление волн, излучение и дифракция; описываются основные закономерности распространения электромагнитных волн в различных безграничных средах (изотропных, анизотропных, диспергирующих, неоднородных), в направляющих и резонансных структурах, в природных условиях. Обсуждаются методы математического моделирования в электродинамике, опирающегося на применение ЭВМ.

Отличительной особенностью книги является обсуждение современных проблем электродинамики: расчет электромагнитных волн в ближних зонах излучающих структур (самосогласованный метод расчета), комплексных волн в волноведущих структурах и др.

Предназначается для студентов радиотехнических и радиофизических специальностей вузов, а также инженеров-радиотехников и радиофизиков.