

Метод спектрального разложения для анализа системы со сдвинутыми эрланговским и гиперэрланговским распределениями

В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Россия, г. Самара,
ул. Л. Толстого, 23

Аннотация – В работе получено спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для системы массового обслуживания со сдвинутыми эрланговским входным потоком требований и гиперэрланговским распределением времени обслуживания. На его основе выведена расчетная формула для среднего времени ожидания в очереди для этой системы в замкнутой форме. Как известно, все остальные характеристики системы массового обслуживания являются производными от среднего времени ожидания. Полученная расчетная формула дополняет и расширяет известную незавершенную формулу для среднего времени ожидания в очереди в теории массового обслуживания для систем G/G/1. В теории массового обслуживания исследования частных систем типа G/G/1 актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика, а также при проектировании и моделировании различных систем передачи данных.

Ключевые слова – сдвинутые эрланговский и гиперэрланговский законы распределения; интегральное уравнение Линдли; метод спектрального разложения; преобразование Лапласа.

Введение

Данная работа посвящена анализу системы массового обслуживания (СМО) $E_2/HE_2/1$ со сдвинутыми эрланговским входным потоком требований и гиперэрланговским распределением 2-го порядка времени обслуживания в системе, которая обозначена $E_2^-/HE_2^-/1$, где знак «-» означает сдвиг закона распределения вправо от нулевой точки на величину t_0 . Как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания является основной характеристикой для любых СМО. По этой характеристике оценивают задержки пакетов в сетях пакетной коммутации при моделировании телетрафика с помощью СМО. Рассматриваемая СМО $E_2^-/HE_2^-/1$ по символике Кендалла для их классификации относится к типу G/G/1.

В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика, хотя необходимо заметить, что при моделировании активного сетевого оборудования с ограниченным буфером системы с неограниченным временем ожидания могут быть использованы только в первом приближении [9]. В пакетах имитационного моделирования также предусмотрено использование систем G/G/1 при частных законах распределений [10].

Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) в ис-

следовании систем G/G/1 играет важную роль, и большинство результатов в теории массового обслуживания получены именно с помощью данного метода. Одна из форм ИУЛ выглядит так [1]:

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u) dC(u), & y \geq 0; \\ 0, & y < 0, \end{cases}$$

где $W(y)$ – функция распределения вероятностей (ФРВ) времени ожидания требования в очереди; $C(u) = P(\tilde{u} < u)$ – ФРВ случайной величины $\tilde{u} = \tilde{x} - \tilde{t}$, где, в свою очередь, \tilde{x} – случайное время обслуживания требования; \tilde{t} – случайная величина – интервал времени между поступлениями требований.

При кратком изложении метода решения уравнения Линдли будем придерживаться подхода и символики автора [1]. Для этого через $A^*(s)$ и $B^*(s)$ обозначим преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов между поступлениями и времени обслуживания соответственно. Суть решения интегрального уравнения Линдли методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1$ представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от s . Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания

необходимо следующее спектральное разложение: $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$, где $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ – некоторые рациональные функции от s , которые можно разложить на множители. Функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям согласно [1]:

1. Для $\text{Re}(s) > 0$ функция $\psi_+(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости;
2. Для $\text{Re}(s) < D$ функция $\psi_-(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости, где D – некоторая положительная константа, определяемая из условия:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{e^{-Dt}} < \infty.$$

Кроме того, функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны обладать следующими свойствами:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) > 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad (2)$$

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) < D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1.$$

1. Постановка задачи

В работе ставится задача нахождения решения для среднего времени ожидания требований в очереди в СМО $E_2^- / HE_2^- / 1$ со сдвинутыми эрланговским (E_2^-) и гиперэрланговским (HE_2^-) входными распределениями с использованием классического метода спектрального разложения решения ИУЛ. Для других систем применение этого метода рассмотрено в работах [2; 6–8]. Вопросы аппроксимации законов распределений подробно освещены в [3–5], а новые исследования по системам массового обслуживания приведены в [11–14].

2. Решение задачи для системы $E_2^- / HE_2^- / 1$

Рассмотрим СМО $E_2^- / HE_2^- / 1$, для которой законы распределения входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности:

$$a(t) = \begin{cases} 4\lambda^2(t-t_0)e^{-2\lambda(t-t_0)}, & t > t_0; \\ 0, & 0 \leq t \leq t_0, \end{cases} \quad (3)$$

$$b(t) = \begin{cases} 4q\mu_1^2(t-t_0)e^{-2\mu_1(t-t_0)} + \\ + 4(1-q)\mu_2^2(t-t_0)e^{-2\mu_2(t-t_0)}, & t > t_0; \\ 0, & 0 \leq t \leq t_0. \end{cases} \quad (4)$$

Как видно из распределений (3) и (4), они при параметре сдвига $t_0 = 0$ обращаются в обычные распределения, и в этом можно заметить преимущество обычных систем и систем с запаздыванием во времени.

Запишем преобразования Лапласа функций (3) и (4):

$$A^*(s) = \left(\frac{2\lambda}{s+2\lambda} \right)^2 e^{-t_0 s};$$

$$B^*(s) = \left[q \left(\frac{2\mu_1}{s+2\mu_1} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{s+2\mu_2} \right)^2 \right] e^{-t_0 s}.$$

В этом случае выражение для спектрального разложения решения ИУЛ примет следующий вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left(\frac{2\lambda}{2\lambda-s} \right)^2 e^{t_0 s} \times \left[q \left(\frac{2\mu_1}{s+2\mu_1} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{s+2\mu_2} \right)^2 \right] e^{-t_0 s} - 1. \quad (5)$$

Здесь экспоненты из-за противоположных знаков обнуляются, и тем самым операция сдвига законов распределений нивелируется.

Представим выражение, стоящее в квадратных скобках, в виде

$$\left[q \left(\frac{2\mu_1}{s+2\mu_1} \right)^2 + (1-q) \left(\frac{2\mu_2}{s+2\mu_2} \right)^2 \right] = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{(s+2\mu_1)^2 (s+2\mu_2)^2},$$

где промежуточные параметры обозначены $b_0 = 16\mu_1^2\mu_2^2$, $b_1 = 16\mu_1\mu_2[q\mu_1 + (1-q)\mu_2]$, $b_2 = 4[q\mu_1^2 + (1-q)\mu_2^2]$. Продолжая спектральное разложение (5), получим:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{4\lambda^2(b_0 + b_1 s + b_2 s^2)}{(2\lambda-s)^2 (2\mu_1+s)^2 (2\mu_2+s)^2} - \frac{(2\lambda-s)^2 (2\mu_1+s)^2 (2\mu_2+s)^2}{(2\lambda-s)^2 (2\mu_1+s)^2 (2\mu_2+s)^2} = \frac{-s(s^5 - d_4 s^4 - d_3 s^3 - d_2 s^2 - d_1 s - d_0)}{(2\lambda-s)^2 (2\mu_1+s)^2 (2\mu_2+s)^2} = \frac{-s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)(s-\sigma_5)}{(2\lambda-s)^2 (2\mu_1+s)^2 (2\mu_2+s)^2}.$$

Окончательно спектральное разложение решения ИУЛ для системы $E_2^- / HE_2^- / 1$ имеет вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)(s-\sigma_5)}{(2\lambda-s)^2(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}. \quad (6)$$

Пояснения к разложению (6). Многочлен пятой степени в числителе разложения в случае стабильной системы $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda < 1$

$$s^5 - d_4s^4 - d_3s^3 - d_2s^2 - d_1s - d_0 \quad (7)$$

с коэффициентами:

$$d_0 = 64\lambda\mu_1\mu_2[\mu_1\mu_2 - \lambda(\mu_1 + \mu_2) + 4b_1\lambda^2],$$

$$d_1 = 16\{4\lambda\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2) - \lambda^2[2\mu_1\mu_2 + (\mu_1 + \mu_2)^2] + 4b_2\lambda^2\},$$

$$d_2 = 16\lambda[(\mu_1 + \mu_2)^2 + 2\mu_1\mu_2] - 16(\mu_1 + \mu_2)(\lambda^2 + \mu_1\mu_2),$$

$$d_3 = -4[\lambda^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 - 4\lambda(\mu_1 + \mu_2) + 4\mu_1\mu_2],$$

$$d_4 = 4(\lambda - \mu_1 - \mu_2),$$

имеет четыре действительных отрицательных корня $-\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3, -\sigma_4$ (либо два действительных отрицательных корня и два комплексно сопряженных с отрицательными действительными частями) и один положительный корень σ_5 . Исследование знака младшего коэффициента d_0 показывает, что $d_0 > 0$ всегда в случае стабильной системы, когда $0 < \rho < 1$. С учетом знака минус перед d_0 в многочлене (7) это также подтверждает предположение о наличии таких корней многочлена.

На рисунке показана комплексная s -плоскость с нулями и полюсами функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$, где полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками. Нули и полюсы нужны для построения функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ в отдельности.

Принимая во внимание условия спектрального разложения (1), (2) строим функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ с учетом нулей и полюсов разложения:

$$\psi_+(s) = \frac{s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}{(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2},$$

$$\psi_-(s) = -\frac{(2\lambda-s)^2}{(s-\sigma_5)}.$$

Константа спектрального разложения –

$$\begin{aligned} K &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}{(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2} = \\ &= \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}{16\mu_1^2\mu_2^2}. \end{aligned}$$

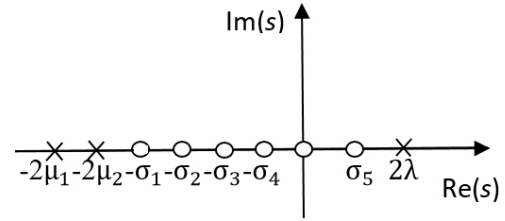


Рис. Нули и полюсы функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ для системы M/HE₂/1

Fig. Zeros and poles of the function $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ for the system M/HE₂/1

Эта константа определяет вероятность того, что поступающее в систему требование заставит ее свободной.

Далее по методике спектрального разложения строим функцию

$$\begin{aligned} \Phi_+(s) &= \frac{K}{\psi_+(s)} = \\ &= \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}{16\mu_1^2\mu_2^2s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}. \end{aligned}$$

Отсюда преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания $W^*(s) = s \cdot \Phi_+(s)$ будет равно

$$W^*(s) = \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}{16\mu_1^2\mu_2^2(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}, \quad (8)$$

Для нахождения среднего времени ожидания найдем производную от функции $W^*(s)$ со знаком минус в точке $s = 0$:

$$\bar{W} = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_3} + \frac{1}{\sigma_4} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}. \quad (9)$$

Преобразование Лапласа (8) позволяет кроме среднего времени ожидания находить также и моменты высшего порядка времени ожидания. С учетом определения вариации задержки – джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения [14], тем самым получим возможность определения джиттера через дисперсию времени ожидания.

Для того чтобы воспользоваться формулой (9) для расчетов среднего времени ожидания, необходимо задать входные параметры, в качестве которых используем значения начальных моментов первого порядка интервалов поступлений $\bar{\tau}_\lambda$ и времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu$, а также их коэффициентов вариаций c_λ, c_μ . С помощью этих входных параметров необходимо определить методом моментов неизвестные параметры распределений (3) и (4) λ, q, μ_1, μ_2 , а затем коэффициенты многочлена (7).

Определим числовые характеристики распределения (3) с использованием преобразования Лапласа. Средний интервал между поступлениями требований в систему $E_2^-/HE_2^-/1$ равен

$$\bar{\tau}_\lambda = \lambda^{-1} + t_0. \quad (10)$$

Второй начальный момент интервала между поступлениями равен

$$\left. \frac{d^2 A^*(s)}{ds^2} \right|_{s=0} = \frac{3}{2\lambda^2} + 2\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2,$$

откуда

$$\bar{\tau}_\lambda^2 = \frac{3}{2\lambda^2} + 2\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2.$$

Определим квадрат коэффициента вариации:

$$c_\lambda^2 = \frac{\bar{\tau}_\lambda^2 - (\bar{\tau}_\lambda)^2}{(\bar{\tau}_\lambda)^2} = \frac{1}{2(1 + \lambda t_0)^2}.$$

Отсюда коэффициент вариации:

$$c_\lambda = [\sqrt{2}(1 + \lambda t_0)]^{-1}. \quad (11)$$

Значение первой производной функции $B^*(s)$ со знаком минус в точке $s = 0$ дает среднее значение времени обслуживания

$$\bar{\tau}_\mu = q\mu_1^{-1} + (1-q)\mu_2^{-1} + t_0, \quad (12)$$

а значение второй производной функции $B^*(s)$ в точке $s = 0$ дает второй начальный момент времени обслуживания

$$\bar{\tau}_\mu^2 = t_0^2 + 2t_0 \left[\frac{q}{\mu_1} + \frac{(1-q)}{\mu_2} \right] + \frac{3q}{2\mu_1^2} + \frac{3(1-q)}{2\mu_2^2}. \quad (13)$$

Отсюда определим квадрат коэффициента вариации интервалов поступления:

$$c_\mu^2 = \frac{\mu_1^2 - 2q\mu_2(\mu_1 - \mu_2) + q(1-2q)(\mu_1 - \mu_2)^2}{2[\mu_1 - q(\mu_1 - \mu_2) + t_0\mu_1\mu_2]^2}. \quad (14)$$

Заметим, что коэффициенты вариации $0 < c_\lambda < 1/\sqrt{2}$ и $c_\mu > 0$ при параметре сдвига $t_0 > 0$. Таким образом, очевидно, что система $E_2^-/HE_2^-/1$ относится к типу G/G/1.

Рассматривая выражения (10)–(15) как форму записи метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (3) и (4). Определим параметр распределения (3) λ из (10) и получим значение $\lambda = 1/(\bar{\tau}_\lambda - t_0)$.

Нахождение параметров распределения (4) μ_1, μ_2, q будет аналогичным нахождению этих параметров для обычного распределения. Теперь, исходя из вида уравнения (12), положим:

$$\mu_1 = 2q/(\bar{\tau}_\mu - t_0), \quad (15)$$

$$\mu_2 = 2(1-q)/(\bar{\tau}_\mu - t_0),$$

и потребуем выполнения условия (14). Подставив частное решение (15) в (14), решим полученное уравнение четвертой степени $q(1-q)[8(1+c_\mu^2)q^2 - 8(1+c_\mu^2)q + 3] = 0$ относительно параметра q с учетом условия $0 < q < 1$ и выберем нужное решение:

$$q = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3(\bar{\tau}_\mu - t_0)^2}{8[(\bar{\tau}_\mu - t_0)^2 + c_\mu^2 \bar{\tau}_\mu^2]}}$$

а затем определим из (15) параметры μ_1 и μ_2 .

Задавая значения $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu, t_0$ в качестве входных параметров системы, таким образом находим известным методом моментов все неизвестные параметры распределений (3) и (4).

Теперь рассмотрим влияние параметра сдвига на коэффициенты вариаций распределений. Для эрланговского закона распределений интервалов поступлений $c_\lambda = 1/\sqrt{2}$, и, сравнивая это с выражением (11), устанавливаем, что параметр сдвига $t_0 > 0$ уменьшает коэффициент вариации интервалов поступлений в $1 + \lambda t_0$ раз. Для обычного распределения HE_2 времени обслуживания, как следует из выражений (14), получим:

$$c_\mu^2 = \frac{\mu_1^2 - 2q\mu_2(\mu_1 - \mu_2) + q(1-2q)(\mu_1 - \mu_2)^2}{2[\mu_1 - q(\mu_1 - \mu_2)]^2}.$$

Сравнивая последнее выражение с (14), убеждаемся, что параметр сдвига во времени $t_0 > 0$ уменьшает коэффициент вариации интервалов поступлений в $1 + \frac{t_0\mu_1\mu_2}{[\mu_1(1-q) + \mu_2q]}$ раз. Учитывая квадратичную зависимость среднего времени ожидания от коэффициентов вариаций интервалов поступлений и времени обслуживания, убеждаемся в том, что введение параметра сдвига в законы распределения уменьшает среднее время ожидания в очереди в СМО.

3. Результаты вычислительных экспериментов

В таблице приведены расчетные значения среднего времени ожидания для системы с запаздыванием $E_2^-/HE_2^-/1$ для случаев малой, средней и высокой нагрузки $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$ при значениях параметра сдвига t_0 от 0,001 до 0,999 и коэффициенте вариации времени обслуживания $c_M = 0,71$ для обычной системы $E_2/HE_2/1$. Значения параметров c_λ и c_M в системе $E_2^-/HE_2^-/1$ изменяются согласно выражениям (11) и (14). Расчеты проведены для нормированного времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu = 1$.

Таблица. Результаты экспериментов для СМО $E_2^-/H_2^-/1$ при $c_\mu = 0,71$ для системы $E_2/HE_2/1$
 Table. Experimental results for the QS $E_2^-/H_2^-/1$ at, $c_\mu = 0,71$ for the $E_2/HE_2/1$ system

Входные параметры				Среднее время ожидания	
ρ	c_λ	c_μ	t_0	для системы $E_2^-/H_2^-/1$	для системы $E_2/HE_2/1$
0,1	0,636	0,355	0,999	0,006	0,018
	0,672	0,473	0,5	0,006	
	0,700	0,645	0,1	0,013	
	0,706	0,703	0,01	0,017	
	0,707	0,709	0,001	0,018	
0,5	0,354	0,355	0,999	0,063	0,395
	0,530	0,473	0,5	0,124	
	0,672	0,645	0,1	0,321	
	0,704	0,703	0,01	0,386	
	0,707	0,709	0,001	0,394	
0,9	0,071	0,355	0,999	0,568	4,380
	0,389	0,473	0,5	1,511	
	0,643	0,645	0,1	3,578	
	0,701	0,703	0,01	4,292	
	0,706	0,709	0,001	4,371	

Таким образом, данные таблицы демонстрируют качественное и количественное влияние параметра сдвига $t_0 > 0$ на числовые характеристики распределений (3) и (4) и, следовательно, на основную характеристику системы - среднее время ожидания. Как и следовало ожидать, уменьшение коэффициентов вариации c_λ и c_μ влечет за собой многократное уменьшение времени ожидания.

Заключение

Таким образом, по результатам работы можно сделать следующие выводы.

Научная новизна результатов заключается в том, что получено спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для рас-

сматриваемой системы и с его помощью выведена расчетная формула для среднего времени ожидания в очереди для этой системы в замкнутой форме. Данные численных экспериментов подтверждают полную адекватность полученных теоретических результатов.

Практическое значение работы состоит в том, что полученные результаты с успехом могут быть применены в современной теории телетрафика, где задержки пакетов входящего трафика играют первостепенную роль. Для этого необходимо знать числовые характеристики интервалов входящего трафика и времени обслуживания на уровне двух первых моментов, что не вызывает трудностей при использовании современных анализаторов трафика.

Список литературы

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / пер. с англ. под ред. В.И. Неймана. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
2. Brännström N. A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems: master's thesis applied to HS-DSCH. Lulea University of Technology, 2004. 79 p. URL: <http://tu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1016709/FULLTEXT01>
3. Алиев Т.И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 2 (84). С. 88–93. URL: https://ntv.ifmo.ru/article/4127/approksimaciya_veroyatnostnyh_raspredeleniy_v_modelyah_massovogo_obslyzhivaniya.htm
4. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress. Copenhagen, Denmark. 19–26 June 1991. P. 683–688. URL: <https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true>
5. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods // Operation Research. 1982. Vol. 30, No. 1. P. 125–147. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125>
6. Малахов С.В., Карташевский И.В., Тарасов В.Н. Теоретическое и экспериментальное исследование задержки в программно-конфигурируемых сетях // Инфокоммуникационные технологии. 2015. Т. 13, № 4. С. 409–413. DOI: <https://doi.org/10.18469/ikt.2015.13.4.08>

7. Малахов С.В., Тарасов В.Н. Экспериментальные исследования производительности сегмента программно-конфигурируемой сети // Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2013. № 2. С. 81–85.
8. Тарасов В.Н., Липилина Л.В., Бахарева Н.Ф. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров // Информационные технологии. 2016. Т. 22, № 12. С. 952–957. URL: http://novtex.ru/IT/it2016/it1216_web-952-957.pdf
9. Тарасов В.Н. Вероятностное компьютерное моделирование сложных систем. Самара: СНЦ РАН, 2002. 194 с.
10. Тарасов В.Н., Коннов А.Л., Ушаков Ю.А. Анализ и оптимизация локальных сетей и сетей связи с помощью программной системы OPNET Modeler // Вестник Оренбургского государственного университета. 2006. № 6-2 (56). С. 197–204. URL: <http://vestnik.osu.ru/doc/1033/article/2762/lang/0>
11. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues // Queueing Systems. 2016. Vol. 84, No. 1–2. P. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
12. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times // Queueing Systems. 2018. Vol. 89, No. 3–4. P. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
13. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates // Queueing Systems. 2018. Vol. 89. № 3–4. P. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
14. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure // Queueing Systems. 2019. Vol. 93, No. 1–2. P. 139–152. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09606-1>
15. Demichelis C., Chimento P. IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics. URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>

References

1. Klejnrok L. *Queueing Theory*. Trans. from English ed. by V.I. Neumann. Moscow: Mashinostroenie, 1979, 432 p. (In Russ.)
2. Brännström N. *A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems: master's thesis applied to HS-DSCH*. Lulea University of Technology, 2004, 79 p. URL: <http://tu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1016709/FULLTEXT01>
3. Aliev T.I. Approximation of probability distributions in queuing models. *Nauchno-tehnicheskij vestnik informatsionnyh tehnologij, mehaniki i optiki*, 2013, no. 2 (84), pp. 88–93. URL: https://ntv.ifmo.ru/ru/article/4127/approksimaciya_veroyatnostnyh_raspredeleniy_v_modelyah_massovogo_obslyuzhivaniya.htm (In Russ.)
4. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress, Copenhagen, Denmark, 19–26 June 1991*, pp. 683–688. URL: <https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true>
5. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods. *Operation Research*, 1982, vol. 30, no. 1, pp. 125–147. DOI: <https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125>
6. Malahov S.V., Kartashevskij I.V., Tarasov V.N. Theoretical and experimental study of delay in software defined networks. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2015, vol. 13, no. 4, pp. 409–413. DOI: <https://doi.org/10.18469/ikt.2015.13.4.08> (In Russ.)
7. Malahov S.V., Tarasov V.N. Experimental studies of the performance of the SDN segment. *Intellekt. Innovatsii. Investitsii*, 2013, no. 2, pp. 81–85. (In Russ.)
8. Tarasov V.N., Lipilina L.V., Bahareva N.F. Automation of calculating the characteristics of queuing systems for a wide range of changes in their parameters. *Informatsionnye tehnologii*, 2016, vol. 22, no. 12, pp. 952–957. URL: http://novtex.ru/IT/it2016/it1216_web-952-957.pdf (In Russ.)
9. Tarasov V.N. *Probabilistic Computer Modeling of Complex Systems*. Samara: SNTs RAN, 2002, 194 p. (In Russ.)
10. Tarasov V.N., Konnov A.L., Ushakov Yu.A. Analysis and optimization of local networks and communication networks using the OPNET Modeler software system. *Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2006, no. 6-2 (56), pp. 197–204. URL: <http://vestnik.osu.ru/doc/1033/article/2762/lang/0> (In Russ.)
11. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*, 2016, vol. 84, no. 1–2, pp. 145–202. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
12. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3–4, pp. 213–241. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
13. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3–4, pp. 269–301. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
14. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, no. 1–2, pp. 139–152. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09606-1>
15. Demichelis C., Chimento P. IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics. URL: <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>

Physics of Wave Processes and Radio Systems 2021, vol. 24, no. 2, pp. 55–61

Spectral expansion method for analysis of a system with shifted Erlang and hyper-Erlang distributions

Veniamin N. Tarasov, Nadezhda F. Bakhareva

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics
23, L. Tolstoy Street,
Samara, 443010, Russia

Abstract – In this paper, we obtained a spectral expansion of the solution to the Lindley integral equation for a queuing system with a shifted Erlang input flow of customers and a hyper-Erlang distribution of the service time. On its basis, a calculation formula is derived for the average waiting time in the queue for this system in a closed form. As you know, all other characteristics of the queuing system are derivatives of the average waiting time. The resulting calculation formula complements and expands the well-known unfinished formula for the average waiting time in queue in queuing theory for G/G/1 systems. In the theory of queuing, studies of private systems of the G/G/1 type are relevant due to the fact that they are actively used in the modern theory of teletraffic, as well as in the design and modeling of various data transmission systems.

Keywords – shifted Erlang and hyper-Erlang distribution laws; Lindley integral equation; spectral decomposition method; Laplace transform.

Информация об авторах

Тарасов Вениамин Николаевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: информационные технологии, проектирование и моделирование компьютерных сетей, методы и модели исследования вычислительных систем и сетей, теория массового обслуживания.

E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Бахарева Надежда Федоровна, доктор технических наук, профессор, заведующая кафедрой информатики и вычислительной техники Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: анализ производительности компьютерных сетей.

E-mail: bakhareva-nf@psuti.ru

Information about the Authors

Veniamin N. Tarasov, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Software and Management in Technical Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

Research interests: information technology, design and modeling of computer networks, methods and models for the study of computing systems and networks, queuing theory.

E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Nadezhda F. Bakhareva, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Informatics and Computer Engineering, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

Research interests: analysis of the performance of computer networks.

E-mail: bakhareva-nf@psuti.ru