




Особенности расчета киральной среды в зависимости от концентрации киральных элементов

А.Н. Волобуев , Т.А. Антипова , К.А. Адыширин-Заде 

Самарский государственный медицинский университет
443099, Россия, г. Самара,
ул. Чапаевская, 89

Аннотация – Проведено исследование киральной среды при различных концентрациях киральных включений. Показано, что взаимодействие киральной среды и электромагнитной волны подчиняется единому нелинейному уравнению. При большой концентрации киральных включений задача носит линейный характер и может решаться с помощью введения параметра киральности. При малой концентрации киральных элементов невозможен переход к рассмотрению линейной задачи. Задача становится существенно нелинейной, требующей нахождения многоволнового решения нелинейного уравнения взаимодействия киральной среды и электромагнитной волны. На примере киральной среды с индуктивными включениями показан переход от линейного расчета киральной среды при большой концентрации киральных включений к нелинейному расчету при малой концентрации киральных включений.

Ключевые слова – метаматериал; параметр киральности; индуктивные включения; многоволновое решение; стоячая волна.

Введение

В настоящее время метаматериалы (греч. meta – «вне, за пределами»), т. е. композитные материалы с различными включениями, распределенными как хаотически, так и периодически, широко применяются, в частности, в радиотехнике, при конструировании космических аппаратов, в медицине и т. д. [1–4]. Благодаря этим включениям полученные материалы имеют многие полезные физические, электрические, оптические и другие свойства, которых нет у природных веществ. Среди метаматериалов выделяются вещества с киральными свойствами [5], которые способны вращать плоскость поляризации электромагнитных волн. В оптике аналогом подобных веществ служат оптически активные вещества, например кварц, раствор глюкозы и др. [6].

Однако методы расчета метаматериалов довольно ограничены [7]. В основном все расчеты базируются на решении уравнений Максвелла и подобранных в соответствии с задачей материальных уравнений.

Существующий подход обладает ограничениями, т. к. обычно используется при большой концентрации киральных включений, причем вводятся осредненные характеристики метаматериалов, например параметр киральности.

В настоящей работе сделана попытка более детального подхода к свойствам киральных метаматериалов. В частности, проведен анализ влияния этих свойств на взаимодействие киральных

элементов индуктивного типа с электромагнитной волной, падающей на пластинку из метаматериала.

1. Линейный метод расчета взаимодействия метаматериала с электромагнитной волной

При исследовании метаматериалов с киральными включениями на основе уравнений Максвелла обычно используют материальные уравнения, включающие т. н. параметр киральности χ . В [8] предложены материальные уравнения в следующем виде:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E} \mp i \frac{\chi}{V} \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H} \pm i \frac{\chi}{V} \mathbf{E}, \quad (2)$$

где \mathbf{D} и \mathbf{B} – индукции электрического и магнитного полей в электромагнитной волне, взаимодействующей с киральной средой; \mathbf{E} и \mathbf{H} – напряженности электрической и магнитной составляющей волны; ε_a и μ_a – абсолютные электрическая и магнитная проницаемости киральной среды; V – скорость электромагнитной волны в киральной среде; χ – параметр киральности, в данном случае безразмерная величина.

В [8] показано, что материальные уравнения (1) и (2) можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{D} = (1 \pm \chi) \varepsilon_a \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\mathbf{B} = (1 \pm \chi) \mu_a \mathbf{H}. \quad (4)$$

В формулах (1)–(4) верхние знаки относятся к правовращающему киральному элементу, нижние – к левовращающему.

Используя (3) и (4), можно показать [8], что, если киральная среда обладает только реактивными сопротивлениями, электромагнитная волна в ней подчиняется волновым уравнениям:

$$\Delta \mathbf{D} = \left(\frac{1 \pm \chi}{V} \right)^2 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$\Delta \mathbf{B} = \left(\frac{1 \pm \chi}{V} \right)^2 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \quad (6)$$

где t – время.

В дальнейшем нас будет интересовать только уравнение (5). Подставляя (3) в (5) и переходя к скалярному потенциалу φ [9], найдем:

$$\Delta \varphi = \left(\frac{1 \pm \chi}{V} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Будем искать решение уравнения (7) в виде

$$\varphi - \varphi_0 = \varphi(\mathbf{r}) \exp(i\omega t), \quad (8)$$

где φ_0 – начальный уровень отсчета потенциала; \mathbf{r} – совокупность пространственных координат; ω – циклическая частота падающей электромагнитной волны.

Подставляя (8) в (7), имеем:

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) + (1 \pm \chi)^2 k^2 \varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad (9)$$

где $k = \frac{\omega}{V}$ – модуль волнового вектора электромагнитной волны.

Решая уравнение (9), с использованием начальных и граничных условий можно исследовать процессы отражения, преломления, дифракции электромагнитной волны в метаматериале.

2. Уравнение взаимодействия метаматериала с киральными включениями индуктивного типа и электромагнитной волны

Рассмотрим пластинку из метаматериала с киральными включениями индуктивного типа, состоящую из диэлектрика, в который включены токопроводящие киральные элементы в виде спиралей, ось которых направлена поперек пластинки. Киральные элементы распределены периодически.

На рис. 1 показано облучение пластинки электромагнитной волной. Предполагаем, что киральные включения не имеют активного сопротивления. Киральный элемент полностью пронизывает пластинку.

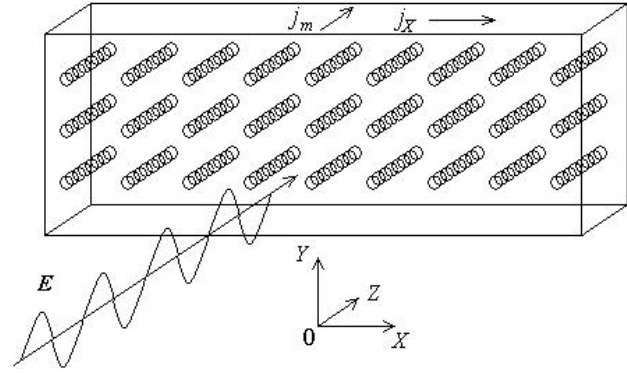


Рис. 1. Пластинка из метаматериала, облучаемая электромагнитной волной

Fig. 1. A plate of metamaterial irradiated by an electromagnetic wave

Особенностью пластинки является распределенная по ее поверхностям емкость при точечных индуктивных включениях. Поэтому рассматривать взаимодействие отдельного кирального элемента, имеющего индуктивность и емкость, с электромагнитной волной некорректно.

При облучении на пластинке возникает разность потенциалов, подчиняющаяся уравнению (7). Плотность тока через пластику будет иметь вид

$$j_m = C_m \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\varphi - \varphi_0) g_m, \quad (10)$$

где C_m – емкость единицы площади пластинки; φ – потенциал на пластинке относительно исходного уровня φ_0 ; g_m – электропроводность единицы площади пластинки за счет индуктивной составляющей.

Первое слагаемое (10) отражает емкостный ток смещения, второе слагаемое – индуктивный ток через киральные элементы.

Для спирального кирального элемента можно записать уравнение баланса напряжений:

$$-L_i S_i \frac{\partial j_i}{\partial t} = (\varphi - \varphi_0), \quad (11)$$

где j_i – плотность тока через i -й киральный элемент; L_i – индуктивность i -го кирального элемента; S_i – площадь пластинки, приходящаяся на один киральный элемент, имеющий индуктивную электропроводность g_i .

Плотность тока j_i через киральный элемент связана с разностью потенциалов на пластинке и электропроводностью этого кирального элемента g_i по формуле закона Ома:

$$j_i S_i = g_i (\varphi - \varphi_0). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), найдем:

$$g_i = - \frac{(\varphi - \varphi_0)}{L_i \frac{\partial \varphi}{\partial t}}. \quad (13)$$

Электропроводность, приходящаяся на единицу площади пластинки, равна:

$$g_m = -\frac{(\varphi - \varphi_0)}{S_i L_i} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (14)$$

где учтено $g_i = g_m S_i$.

Подставив (14) в (10), найдем:

$$j_m = C_m \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{S_i L_i} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (15)$$

Используя $C_i = C_m S_i$ – емкость пластинки, приходящуюся на один киральный элемент, и обозначая $\omega_0^2 = \frac{1}{C_i L_i}$ – собственную частоту киральной системы, найдем:

$$\frac{j_m}{C_m} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - (\varphi - \varphi_0)^2 \omega_0^2. \quad (16)$$

Рассмотрим пластинку, состоящую из одного ряда киральных элементов, рис. 2.

Вдоль этой пластинки течет индуктивный ток.

Закон электромагнитной индукции для этого тока имеет вид

$$-L \frac{\partial I_X}{\partial t} = \varphi - \varphi_0, \quad (17)$$

где $I_X = \gamma_X \frac{S}{l} (\varphi - \varphi_0)$ – продольный индуктивный ток; γ_X – удельная индуктивная электропроводность однорядной пластинки; L – ее индуктивность; S – площадь поперечного сечения однорядной пластинки; l – ее длина.

Следовательно:

$$-\gamma_X S L_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi - \varphi_0, \quad (18)$$

где $L_1 = \frac{L}{l}$ – индуктивность единицы длины однорядной пластинки.

По закону Ома для плотности продольного тока имеем:

$$j_X = -\gamma_X \frac{\partial \varphi}{\partial X}. \quad (19)$$

Следовательно:

$$dj_X = -\gamma_X \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} dX. \quad (20)$$

Поделив (20) на (18) и сократив на γ_X , найдем:

$$dj_X = \frac{\varphi - \varphi_0}{S L_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} dX. \quad (21)$$

Однако, учитывая, что продольный ток определяется только наличием поперечного тока (или наоборот), имеем:

$$S dj_X = j_m b dX, \quad (22)$$

где b – ширина однорядной пластинки.

Подставляя (21) в (22), имеем:

$$j_m = \frac{\varphi - \varphi_0}{L_1 b} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}. \quad (23)$$

Далее, подставляя (23) в (16), найдем:

$$\frac{\varphi - \varphi_0}{C_m L_1 b} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - (\varphi - \varphi_0)^2 \omega_0^2. \quad (24)$$

Учитывая $C_1 = C_m b$ – емкость единицы длины однорядной пластинки и $V^2 = \frac{1}{C_1 L_1}$ – квадрат скорости электромагнитного поля вдоль пластинки, имеем:

$$V^2 (\varphi - \varphi_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - (\varphi - \varphi_0)^2 \omega_0^2. \quad (25)$$

Нелинейное уравнение (25) можно преобразовать к виду, справедливому для пространственной геометрии:

$$V^2 \Delta \varphi + \omega_0^2 (\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{\varphi - \varphi_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2. \quad (26)$$

Линеаризацию уравнения (26) можно осуществить соотношением (8):

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) + k_S^2 \varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad (27)$$

где

$$k_S^2 = \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{V^2} = k_0^2 + k^2,$$

где k_S – волновое число электромагнитной волны в киральной среде.

Заметим, что нелинейное уравнение, аналогичное (25) и (26), возникает при исследовании самоиндуцированной прозрачности вещества [10], при распространении нервного импульса (последовательности потенциалов действия) по нервному волокну [11].

3. Различные виды решений уравнения взаимодействия метаматериала и электромагнитной волны

Линейные уравнения (9) и (27) отражают один и тот же физический процесс – распространение электромагнитных колебаний по киральной пластинке. Различие заключается в том, что при вы-

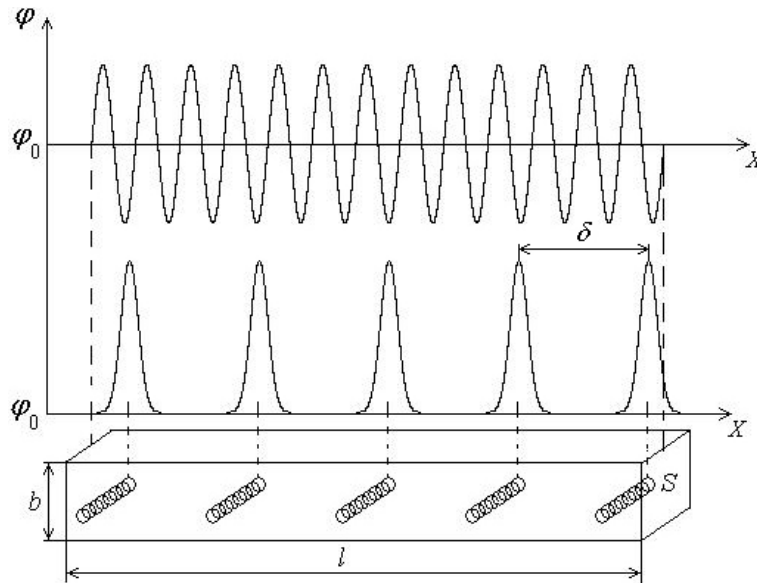


Рис. 2. Однорядная киральная пластинка
 Fig. 2. Single row chiral plate

воде (27), в отличие от (9), не было необходимости использовать материальные уравнения (1)–(4), т. е. параметр киральности не вводился.

На основе тождества уравнений (27) и (9) можно положить:

$$k_S^2 = k_0^2 + k^2 = (1 + \chi)^2 k^2. \quad (28)$$

В дальнейшем для определенности предполагаются правовращающие киральные элементы.

Следовательно, параметр киральности можно записать в виде

$$\chi = \sqrt{1 + \frac{k_0^2}{k^2}} - 1. \quad (29)$$

Если $k_0 \ll k$ или $\omega_0 \ll \omega$ (собственная частота киральной среды много меньше частоты падающей электромагнитной волны), то формула (29) упрощается:

$$\chi = \frac{k_0^2}{2k^2} = \frac{\omega_0^2}{2\omega^2}. \quad (30)$$

Заметим, что квантово-механический расчет оптически активного вещества [12] приводит к формуле для параметра киральности:

$$\chi = \frac{2V\eta}{3\hbar} \frac{\omega_0 j}{\omega_0^2 j - \omega^2}, \quad (31)$$

где \hbar – приведенная постоянная Планка; η – величина, пропорциональная произведению действительных частей электрического и магнитного дипольных моментов энергетического перехода оптически активной молекулы, возбуждаемого светом данной длины волны; $\omega_0 j$ – в данном слу-

чае частота, соответствующая энергетическому переходу $0 \rightarrow j$ [13].

Увеличение степени частотной зависимости ω_0 до квадратичной в формуле (30) по сравнению с (31) является характерным при переходе из квантовой области в классическую.

На рис. 2 показан иллюстративный график колебаний потенциала на киральной пластинке в соответствии с колебательными решениями, удовлетворяющими уравнениям (9) и (27). Характер колебаний будет исследован ниже.

3.1. Многоволновое решение уравнения взаимодействия метаматериала и электромагнитной волны

Нелинейное уравнение (25) имеет по крайней мере еще одно решение в виде последовательности уединенных бегущих волн типа

$$\varphi - \varphi_0 = \varphi_{\max} \exp \left[-\frac{(k_0(X - X_0) \pm \omega_0(t - t_0))^2}{2} \right], \quad (32)$$

где $k_0 = \frac{\omega_0}{V}$ – волновое число собственной бегущей по киральной среде волны; φ_{\max} – амплитудное значение потенциала $\varphi - \varphi_0$; X_0 – координата центра кирального элемента и, соответственно, максимума (центра) волнового импульса; t_0 – время достижения этого максимума. Знак минус относится к волне, распространяющейся слева направо, знак плюс – справа налево.

Рост потенциала над киральными включениями, рис. 2, обусловлен пропорциональностью реактивного сопротивления киральных включений их индуктивностям $\varphi - \varphi_0 \sim X_{Li} = \omega L_i$.

Из анализа обоих графиков можно заключить, что верхний график рис. 2 относится к достаточно частым включениям киральных элементов в пластинке, а нижний – к более редким. Поэтому вводить параметр киральности в решение (32) не рационально.

Очевидно, для нелинейных уравнений (25) или (26) должно существовать многоволновое решение. Многоволновые решения найдены для очень ограниченного круга нелинейных волновых уравнений [14; 15]. Многоволновое решение должно зависеть от концентрации киральных элементов в пластинке. Только с его помощью можно понять, при каких условиях можно обоснованно вводить параметр киральности, т. е. понять границы применимости материальных уравнений (1)–(4).

Уравнение (25) допускает многоволновое решение в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_{\max} \times \sum_{n=1}^N \exp \left[-\frac{(k_0(X - X_{0n}) - \omega_0(t - t_{0n}))^2}{2} \right], \quad (33)$$

где N – количество волн-импульсов, укладываемых на длине l пластинки, рис. 2, равное количеству киральных элементов; n – текущий номер импульса; X_{0n} – координаты максимумов волн-импульсов, t_{0n} – времена достижения этих максимумов.

Подставляя (33) в (25), найдем:

$$V^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \right) \sum_{n=1}^N \varphi_n + \omega_0^2 \left(\sum_{n=1}^N \varphi_n \right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2, \quad (34)$$

где обозначено:

$$\varphi_n = \exp \left[-\frac{(k_0(X - X_{0n}) - \omega_0(t - t_{0n}))^2}{2} \right]. \quad (35)$$

Находя производные по координате X

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} &= \sum_{n=1}^N \varphi_n (k_0(X - X_{0n}) - \\ &- \omega_0(t - t_{0n}))^2 k_0^2 + \varphi_n k_0^2 = \\ &= k_0^2 \sum_{n=1}^N \varphi_n (k_0(X - X_{0n}) - \end{aligned} \quad (36)$$

$$- \omega_0(t - t_{0n}))^2 + k_0^2 \sum_{n=1}^N \varphi_n$$

и по времени t

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega_0 \sum_{n=1}^N \varphi_n (k_0(X - X_{0n}) - \omega_0(t - t_{0n})), \quad (37)$$

подставим (36) и (37) в уравнение (34). Учитывая $k_0 V = \omega_0$, получим:

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{n=1}^N \varphi_n (k_0(X - X_{0n}) - \right. \\ &- \omega_0(t - t_{0n}))^2 + \sum_{n=1}^N \varphi_n \left. \right) \sum_{n=1}^N \varphi_n = \\ &= \left(\sum_{n=1}^N \varphi_n \right)^2 + \\ &+ \left(\sum_{n=1}^N \varphi_n (k_0(X - X_{0n}) - \omega_0(t - t_{0n})) \right)^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Сокращая в левой и правой частях (38) одинаковые слагаемые $\left(\sum_{n=1}^N \varphi_n \right)^2$, найдем:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^N \varphi_n \sum_{n=1}^N \varphi_n (k_0(X - X_{0n}) - \omega_0(t - t_{0n}))^2 = \\ &= \left(\sum_{n=1}^N \varphi_n (k_0(X - X_{0n}) - \omega_0(t - t_{0n})) \right)^2, \end{aligned} \quad (39)$$

Рассмотрим два подряд идущих одинаковых импульса $n = 1, 2$. Записывая для этого случая формулу (39), найдем:

$$\begin{aligned} &(\varphi_1 + \varphi_2) \left(\varphi_1 (k_0(X - X_{01}) - \omega_0(t - t_{01}))^2 + \right. \\ &+ \varphi_2 (k_0(X - X_{02}) - \omega_0(t - t_{02}))^2 \left. \right) = \\ &= (\varphi_1 (k_0(X - X_{01}) - \omega_0(t - t_{01})) + \\ &+ \varphi_2 (k_0(X - X_{02}) - \omega_0(t - t_{02})))^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Преобразовывая формулу (40), получим:

$$k_0(X_{02} - X_{01}) - \omega_0(t_{02} - t_{01}) = 0. \quad (41)$$

Формула (41) указывает, что расстояние между киральными элементами $\delta = (X_{02} - X_{01})$, рис. 2, электромагнитный импульс проходит за время $(t_{02} - t_{01})$ со скоростью $V = \omega_0 / k_0$. Величина $1/\delta$ характеризует линейную концентрацию киральных элементов в пластинке.

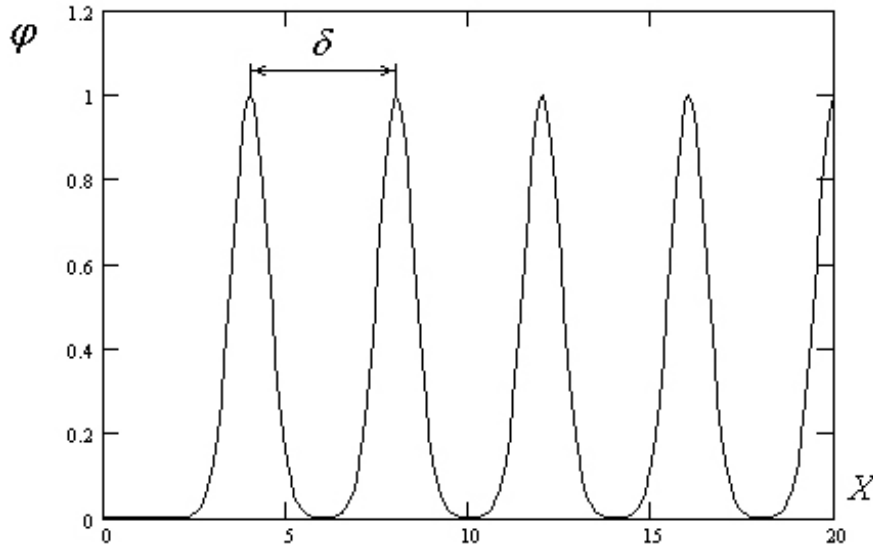


Рис. 3. Следующие друг за другом импульсы в многоволновом решении
 Fig. 3. Consecutive impulses in a multiwave solution

Используя в (39) $t_{0n} = X_{0n} / V = k_0 X_{0n} / \omega_0$, получаем, что выражения в скобках

$$(k_0(X - X_{0n}) - \omega_0(t - t_{0n}))^2 = (k_0(X) - (\omega_0 t))^2$$

не зависят от n , их можно вынести за знак суммы и сократить. В результате (39) превращается в тождество.

Следовательно, (33) является многоволновым решением нелинейного уравнения (25).

Наиболее простой вид многоволновое решение (33) приобретает в случае одинакового расстояния между всеми импульсами и, соответственно, между киральными элементами. В этом случае координаты максимумов импульсов $X_{0n} = n\delta$, а времена достижения максимумов $t_{0n} = k_0 X_{0n} / \omega_0 = k_0 n\delta / \omega_0$.

На рис. 3 для иллюстрации показаны несколько следующих друг за другом импульсов, построенных по формуле (33) при условиях: $V = 0$ – отсутствие зависимости от времени (фиксированная во времени картина), $\varphi_0 = 0$, $\varphi_{\max} = 1$, $k_0 = 2$, $\delta = 4$.

Таким образом, формула (33) при условии равномерного распределения одинаковых импульсов является многоволновым периодическим решением нелинейного уравнения (25).

3.2. Решение уравнения взаимодействия метаматериала и электромагнитной волны в виде стоячих волн

Рассмотрим более подробно другой вид волны, возникающей на однорядной киральной пластинке при падении на нее электромагнитной волны.

Стоячие волны чаще всего образуются в линейных системах в результате суперпозиции (интер-

ференции) прямых и отраженных бегущих волн. Однако известно, что стоячие волны могут возникать и в нелинейных системах [16]. Многие физические процессы носят принципиально нелинейный характер, и процесс возникновения стоячих волн в таких системах нетривиален. Рассмотрим возможность возникновения стоячих волн в исследуемой киральной среде.

Нелинейные уравнения (25) и (26) можно решить методом Фурье разделения переменных [17]. Рассмотрим решение уравнения (25) в виде

$$\varphi - \varphi_0 = \varphi(X)T(t). \quad (42)$$

где $\varphi(X)$ – функция только координаты X ; $T(t)$ – функция только времени t .

Подставив (42) в (25), найдем:

$$V^2 \varphi(X)T^2(t) \frac{\partial^2 \varphi(X)}{\partial X^2} = \left(\varphi(X) \frac{\partial T(t)}{\partial t} \right)^2 - \varphi^2(X)T^2(t)\omega_0^2. \quad (43)$$

Разделим обе части уравнения на $\varphi^2(X)T^2(t)$. В результате получим:

$$V^2 \frac{1}{\varphi(X)} \frac{\partial^2 \varphi(X)}{\partial X^2} + \omega_0^2 = \left(\frac{1}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t} \right)^2 = -\alpha^2. \quad (44)$$

где α – постоянная величина.

Уравнение (44) распадается на два независимых уравнения. Уравнение, зависящее от X , имеет вид

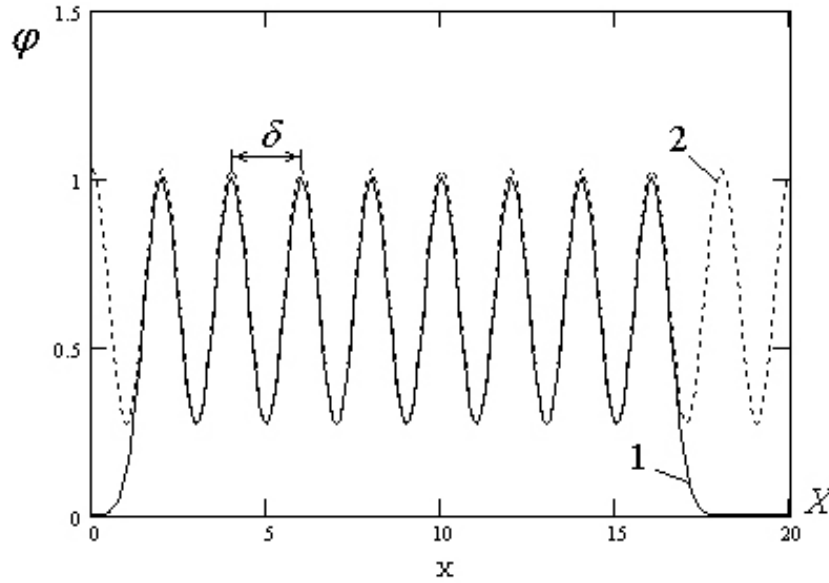


Рис. 4. Переход многоволнового решения в решение в виде стоячей волны: 1 – многоволновое решение; 2 – стоячая волна
 Fig. 4. Transition of a multiwave solution to a standing wave solution: 1 – multiwave solution, 2 – standing wave

$$\frac{\partial^2 \varphi(X)}{\partial X^2} + \left(k_0^2 + \frac{\alpha^2}{V^2} \right) \varphi(X) = 0. \quad (45)$$

Сравнивая (45) и (27), замечаем, что $k_S^2 = k_0^2 + \frac{\alpha^2}{V^2}$.
 Следовательно, $k^2 = \frac{\alpha^2}{V^2}$, и, значит, $\alpha = \omega$.

Решение уравнения (45) запишем в виде

$$\varphi(X) = \varphi(0) \exp(ik_S X), \quad (46)$$

где $\varphi(0)$ – значение функции $\varphi(X)$ в начале координат.

Второе уравнение равенства (44) имеет вид

$$\frac{\partial T(t)}{\partial t} = i\omega T(t). \quad (47)$$

Решая это уравнение, найдем:

$$T(t) = T(0) \exp(i\omega t), \quad (48)$$

где $T(0)$ – начальное значение функции $T(t)$.

Используя (42), (46) и (48), найдем решение уравнения (25) в виде

$$\varphi - \varphi_0 = \varphi_A \exp(i\omega t) \exp(ik_S X), \quad (49)$$

где обозначено $\varphi_A = T(0)\varphi(0)$ – амплитудное значение потенциала $\varphi - \varphi_0$ на пластинке

Функция $\varphi - \varphi_0$ не должна иметь мнимых слагаемых, потенциал – величина действительная. Использование экспонент с мнимыми показателями вводится для удобства преобразований. Реально в этих экспонентах нужно учитывать только действительные слагаемые. Поэтому формула (49) описывает решение уравнения (25) в виде стоячих волн:

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \varphi_A \cos \omega t \cos k_S X = \\ &= \varphi_A \cos \omega t \cos \frac{2\pi X}{\delta}, \end{aligned} \quad (50)$$

где φ_A – амплитудное значение стоячих волн; δ – длина волны.

Условие возникновения узлов в стоячей волне – $X_{уз} = \pm(2n+1)\delta/4$, где $n = 0, 1, 2, \dots$

На концах однорядной киральной пластинки, рис. 2, должны быть узлы стоячей волны. Если возбуждение волны происходит в центре пластинки, то номер максимально удаленного от центра пластинки узла можно найти по формуле

$$\pm \frac{l}{2} = \pm(2n_{\max} + 1) \frac{\delta}{4} \quad \text{или} \quad n_{\max} = \left(\frac{l}{\delta} - \frac{1}{2} \right).$$

Нужно отметить, что бегущие волны $\varphi - \varphi_0 = \frac{\varphi_A}{2} \cos(k_S X \pm \omega t)$ с учетом $k_S^2 = \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{V^2}$ не являются решением уравнения (25), поэтому формулу (50) с физической точки зрения нельзя представить как сумму прямой и отраженной от границ пластинки волн, хотя математически эту процедуру несложно сделать. Это следствие нелинейности уравнения (25).

В заключение интересно проследить графически переход многоволнового решения (33) в решение в виде стоячих волн (50). Этот переход осуществляется при сближении импульсов, рис. 2, 3, т. е. при уменьшении величины δ .

На рис. 4 показаны два графика. График 1 построен по формуле (33) при условиях: $V = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_{\max} = 1$, $k_0 = 2$, $\delta = 2$ для $N = 8$ импульсов.

График 2 (пунктиром) построен по формуле (50) при условиях $\varphi_0 = 0,65$ и $\varphi_A \cos \omega t = 0,38$ для некоторого момента времени t .

Заключение

Распределение потенциала на пластинке из метаматериала с индуктивными киральными включениями исследовано как с использованием материальных уравнений совместно с уравнениями Максвелла, так и на основе детального метода расчета взаимодействия киральных элементов и электромагнитной волны. Сравнение двух подходов позволило выяснить, что введение параметра киральности корректно только при достаточно

высокой концентрации киральных включений. На основе сравнения результатов двух методов найдена частотная зависимость параметра киральности. При использовании детального метода расчета взаимодействия киральных элементов и электромагнитной волны получено нелинейное уравнение для потенциала на пластинке из метаматериала, имеющее решения в виде стоячих волн и уединенных волн. Бегущие синусоидальные волны не являются решением этого уравнения. Показано существование многоволнового решения нелинейного уравнения. При уменьшении расстояния между киральными элементами исследован процесс перехода многоволнового решения нелинейного уравнения в решение в виде стоячей волны.

Список литературы

1. Слюсар В. Метаматериалы в антенной технике: история и основные принципы // *Электроника: наука, технология, бизнес*. 2009. № 7. С. 70–79. URL: https://www.electronics.ru/files/article_pdf/0/article_287_909.pdf
2. Capolino F. *Theory and Phenomena of Metamaterials*. Boca Raton: Taylor & Francis, 2009. 992 p.
3. Вендик И.Б., Вендик О.Г. Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот // *ЖТФ*. 2013. Т. 83, Вып. 1. С. 3–28. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/41403>
4. Давидович М.В. Гиперболические метаматериалы: получение, свойства, применения, перспективы // *УФН*. 2019. Т. 189, № 12. С. 1249–1284. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2019.08.038643>
5. Неганов В.А., Осипов О.В. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами. М.: Радио и связь, 2006. 280 с.
6. Осипов О.В., Волобуев А.Н. К вопросу о физическом смысле материальных уравнений киральной среды // *Письма в ЖТФ*. 2009. Т. 35, Вып. 16. С. 28–33. URL: <http://journals.ioffe.ru/articles/13948>
7. Киральные электродинамические объекты / Б.З. Каценеленбаум [и др.] // *УФН*. 1997. Т. 167, № 11. С. 1201–1212. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199711c.1201>
8. Волобуев А.Н. Электродинамика кругового дихроизма и возможность создания на его основе кругового поляроида // *ЖТФ*. 2016. Т. 86, Вып. 3. С. 20–24. URL: <http://journals.ioffe.ru/articles/42904>
9. Левич В.Г. *Курс теоретической физики*. Т. 1. М.: Физматлит, 1962. 696 с.
10. Волобуев А.Н. Распространение импульса электромагнитного поля в диэлектрике в условиях самоиндуцированной прозрачности // *Математическое моделирование*. 2006. Т. 18, № 3. С. 93–102. URL: <http://mi.mathnet.ru/mm92>
11. Волобуев А.Н. Индуктивно-емкостная модель возбудимой биоткани // *Успехи современной радиоэлектроники*. 2006. № 3. С. 33–60.
12. Кондон Е. Теория оптической вращающей способности // *УФН*. 1938. Т. 19, № 3. С. 380–430. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0019.193803d.0380>
13. Волькенштейн М.В. *Биофизика*. СПб.: Лань, 2008. 596 с.
14. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи* / пер. с англ. М.: Мир, 1987. 480 с.
15. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения* / Р. Додд [и др.]; пер. с англ. М.: Мир, 1988. 696 с.
16. Красильников В.А., Крылов В.В. *Введение в физическую акустику*. М.: Наука, 1984. 403 с.
17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1972. 736 с.

References

1. Sljusar V. Metamaterials in antenna technology: history and basic principles. *Electronics: science, technology, business*, 2009, no. 7, pp. 70–79. URL: https://www.electronics.ru/files/article_pdf/0/article_287_909.pdf
2. Capolino F. *Theory and Phenomena of Metamaterials*. Boca Raton: Taylor & Francis, 2009, 992 p.
3. Vendik I.B., Vendik O.G. Metamaterials and their application in microwave technology. *ZhTF*, 2013, vol. 83, no. 1, pp. 3–28. URL: <https://journals.ioffe.ru/articles/41403> (In Russ.)
4. Davidovich M.V. Hyperbolic metamaterials: preparation, properties, applications, prospects. *UFN*, 2019, vol. 189, no. 12, pp. 1249–1284. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2019.08.038643> (In Russ.)
5. Neganov V.A., Osipov O.V. *Reflective, Waveguiding and Radiating Structures with Chiral Elements*. Moscow: Radio i svjaz', 2006, 280 p. (In Russ.)

6. Osipov O.V., Volobuev A.N. On the question of the physical meaning of the material equations of a chiral medium. *Pis'ma v ZhTF*, 2009, vol. 35, no. 16, pp. 28–33. URL: <http://journals.ioffe.ru/articles/13948> (In Russ.)
7. Katsenelenbaum B.Z. et al. Chiral electrodynamic objects. *UFN*, 1997, vol. 167, no. 11, pp. 1201–1212. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199711c.1201> (In Russ.)
8. Volobuev A.N. Electrodynamics of circular dichroism and the possibility of creating a circular polaroid on its basis. *ZhTF*, 2016, vol. 86, no. 3, pp. 20–24. URL: <http://journals.ioffe.ru/articles/42904> (In Russ.)
9. Levich V.G. *A Course in Theoretical Physics*. Vol. 1. Moscow: Fizmatlit, 1962, 696 p. (In Russ.)
10. Volobuev A.N. Propagation of an electromagnetic field pulse in a dielectric under conditions of self-induced transparency. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2006, vol. 18, no. 3, pp. 93–102. URL: <http://mi.mathnet.ru/mm92> (In Russ.)
11. Volobuev A.N. Inductive-capacitive model of excitable biological tissue. *Uspehi sovremennoj radioelektroniki*, 2006, no. 3, pp. 33–60. (In Russ.)
12. Kondon E. Optical rotation theory. *UFN*, 1938, vol. 19, no. 3, pp. 380–430. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0019.193803d.0380> (In Russ.)
13. Vol'kenshtejn M.V. *Biophysics*. Saint Petersburg: Lan', 2008, 596 p. (In Russ.)
14. Ablowitz M., Sigur H. *Solitons and the Method of the Inverse Problem* / trans. from English. Moscow: Mir, 1987, 480 p. (In Russ.)
15. Dodd R. et al. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. Moscow: Mir, 1988, 696 p. (In Russ.)
16. Krasil'nikov V.A., Krylov V.V. *Introduction to Physical Acoustics*. Moscow: Nauka, 1984, 403 p. (In Russ.)
17. Tihonov A.N., Samarskij A.A. *Equations of Mathematical Physics*. Moscow: Nauka, 1972, 736 p. (In Russ.)

Physics of Wave Processes and Radio Systems

2021, vol. 24, no. 2, pp. 22–31

DOI 10.18469/1810-3189.2021.24.2.22-31

Received 14 May 2021
Accepted 15 June 2021

Interaction of electromagnetic wave and metamaterial with inductive type chiral inclusions

Andrey N. Volobuev , Tatyana A. Antipova , Kaira A. Adyshirin-Zade 

Samara State Medical University
89, Chapayevskaya Street,
Samara, 443099, Russia

Abstract – The principle of calculation of a plate from a metamaterial with inductive type chiral inclusions is submitted. It is shown that distribution of an electromagnetic wave to such substance can be investigated with the help of introduction of a chiral parameter and on the basis of a detailed method of calculation. By comparison of two methods the dependence of chiral parameter from frequency of electromagnetic radiation falling on a plate is found. With the help of a detailed method the nonlinear differential equation for potential on the chiral plate is found. It is shown that this equation has solutions as traveling solitary and standing waves but not traveling sine waves. The analysis of the received solutions of the nonlinear equation is carried out. Transition from the multiwave solution to the solution as standing waves is graphically shown at reduction of distance between the chiral elements.

Keywords – metamaterial; chiral parameter; inductive inclusions; multiwave solution; standing waves.

Информация об авторах

Волобуев Андрей Николаевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой медицинской физики, математики и информатики Самарского государственного медицинского университета, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: волновые процессы в биофизике, нелинейная радиофизика.

E-mail: volobuev47@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8624-6981>

Антипова Татьяна Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры медицинской физики, математики и информатики Самарского государственного медицинского университета, г. Самара, Россия. Окончила Поволжскую государственную академию телекоммуникаций и информатики по специальности «Многоканальные телекоммуникационные системы».

Information about the Authors

Andrey N. Volobuev, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Medical Physics, Mathematics and Informatics, Samara State Medical University, Samara, Russia.

Research interests: wave processes in biophysics, nonlinear radio-physics.

E-mail: volobuev47@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8624-6981>

Tatyana A. Antipova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Medical Physics, Mathematics and Informatics, Samara State Medical University, Samara, Russia. Graduated from the Povolzhskiy State Academy of Telecommunications and Informatics with a degree in «Multi-Channel telecommunications systems».

Research interests: information technologies in medicine.

Область научных интересов: информационные технологии в медицине.

E-mail: antipovata81@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7003-5909>

Адыширин-Заде Каира Алимовна, кандидат педагогических наук, доцент, завуч кафедры медицинской физики, математики и информатики Самарского государственного медицинского университета, г. Самара, Россия. Окончила Самарский государственный университет по специальности «Преподаватель физики».

Область научных интересов: методика преподавания физики в медицинских вузах.

E-mail: adysirinzade67@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3641-3678>

E-mail: antipovata81@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7003-5909>

Kaira A. Adyshirin-Zade, Candidate of Pedagogical Sciences, associate professor, head teacher of the Department of Medical Physics, Mathematics and Informatics, Samara State Medical University, Samara, Russia. Graduated from Samara State University with a degree in «Physics teacher».

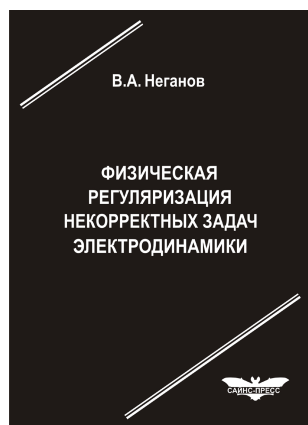
Research interests: methods of teaching physics in medical universities.

E-mail: adysirinzade67@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3641-3678>

Неганов, В.А.

Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики: линии передачи, антенны, дифракция электромагнитных волн / В.А. Неганов. – М.: САЙНС-ПРЕСС, 2008. – 432 с., 122 ил.



ISBN 978-5-88070-161-2

УДК 537.87

ББК 32.84

Н 41

Изложены основы физической регуляризации некорректных задач электродинамики, связанной с особенностями физических и математических моделей задач (физические допущения, некорректные математические выкладки, отсутствие предельного перехода). Подход, по мнению автора, обладает большими возможностями, чем метод регуляризации Тихонова А.Н. интегральных уравнений Фредгольма первого рода, названный в книге методом математической регуляризации. Метод физической регуляризации (МФР) применен к анализу волноведущих и излучающих структур, а также задачам дифракции электромагнитных волн на некоторых телах. МФР позволил впервые корректно осуществить анализ полей в ближних зонах некоторых антенн, устранить несамосогласованное приближение Кирхгофа в задачах дифракции, установить связь поверхностной плотности тока проводимости с напряженностями электрического и магнитного полей для диполя Герца и т. п.

Для специалистов в области радиотехники и радиофизики СВЧ, электромагнитной совместимости РТС, математической теории дифракции и математического моделирования электродинамических структур самого широкого назначения. Может быть полезна преподавателям вузов, докторантам, аспирантам и студентам старших курсов соответствующих специальностей.