

## К вопросу сходимости барицентрического метода в решении задач дифракции на проводящих тонких экранах

А.С. Ильинский<sup>1</sup>, И.С. Полянский<sup>2</sup> , Д.Е. Степанов<sup>2</sup>, Н.И. Кузнецов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
119991, Россия, г. Москва,  
Ленинские горы, 1

<sup>2</sup> Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации  
302015, Россия, г. Орёл,  
ул. Приборостроительная, 35

**Аннотация** – В статье авторы для численного решения задач дифракции электромагнитных волн на бесконечно тонких идеально проводящих экранах произвольной формы предлагают применение барицентрического метода. Численное решение формируется в проекционной постановке метода Галеркина. Суть барицентрического метода состоит в порядке формирования глобальной системы базисных функций для раскрытия экрана при определении аппроксимации искомой функции плоскости тока на его поверхности. Базисные функции задаются полиномами типа Бернштейна через барицентрические координаты, вводимые для раскрытия экрана при его представлении в виде замкнутой односвязной многоугольной области. Рассмотрены особенности алгоритмической реализации барицентрического метода в решении задач дифракции на проводящих тонких экранах. Определена оценка скорости сходимости. Представлены сравнительные результаты расчетов, выполненные при равнозначных условиях барицентрическим методом и методом RWG.

**Ключевые слова** – барицентрический метод, зеркальная антенна, дифракция электромагнитной волны, система бесконечно тонких идеально проводящих экранов, глобальные базисные функции.

### Введение

Численному решению задач дифракции стороннего монохроматического электромагнитного поля  $E^0$ ,  $H^0$  на бесконечно тонком идеально проводящем экране  $S = \bar{S} \setminus \partial S$  в среде с постоянными электромагнитными параметрами ( $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость,  $\mu$  – магнитная проницаемость, удельная проводимость) посвящено значительное число работ [1–5]. Они сводятся к определению рассеянного электромагнитного поля [6]

$$E, H \in C^2\left(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{S}\right) \bigcap_{\delta > 0} C\left(\overline{\mathcal{M}_+} \setminus \partial S_\delta\right) \bigcap_{\delta > 0} C\left(\overline{\mathcal{M}_-} \setminus \partial S_\delta\right), \quad (1)$$

удовлетворяющего

$$\begin{aligned} \nabla \times H &= -i\beta E, \quad \nabla \times E = i\beta H, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{S}; \\ E_\tau|_S &= E_\tau^0|_S, \quad E_\tau^0|_S \in C^\infty(\bar{S}); \quad E, H \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^3); \\ E, H &= o(r^{-1}), \quad r := |x| \rightarrow \infty \text{ при } \text{Im} \beta > 0; \\ H \times e_r - E &= o(r^{-1}), \quad E \times e_r + H = o(r^{-1}), \\ E, H &= O(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty \text{ при } \text{Im} \beta = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mathcal{M}_+$  и  $\mathcal{M}_-$  – внешность и внутренность  $\mathcal{M}$ ;  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^3$  – замкнутая связная ориентированная поверхность класса  $C^\infty$  при  $\bar{S} \subset \mathcal{M}$ ;  $e_r = x/|x|$ ;  $\beta^2 = \omega^2 \mu [\epsilon + i\sigma\omega^{-1}]$ ,  $\text{Im} \beta \geq 0$ ,  $\beta \neq 0$ ;

$S_\delta := \{x : |x - y| < \delta, y \in S\}$ ;  $\delta > 0$ ; индекс  $\tau$  обозначает тангенциальную составляющую поля на  $S$ .

Как правило [1–5] задача (1), (2) при определении  $E$ ,  $H$  через векторный потенциал сводится к интегро-дифференциальному уравнению вида:

$$\mathcal{L}u = f, \quad (3)$$

где  $\mathcal{L}u = \nabla A(\nabla \cdot u) + \beta^2 Au$ ;  $f = i\beta E_\tau^0|_S$ ;  $u$  имеет смысл плотности тока на  $S$ ;

$$Au = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{e^{i\beta|x-y|}}{|x-y|} u(y) dy, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in S.$$

Доказательство существования и единственности решения (1), (2) в представлении (3) известно из [6].

В последующем уравнение (3) относительно неизвестной  $u$  решается численно

$$u^{\mathcal{M}}(x) = \sum_{j=1}^{\mathcal{M}} c_j \psi_j(x)$$

( $c_j$  – коэффициенты разложения) с выбором набора базисных функций  $\psi_j(x)$  ( $j = 1, \mathcal{M}$ ) для  $S$  в представлении проекционных методов (метод Б.Г. Галеркина и его модификации). Эффективность реализуемой вычислительной схемы главным образом определяется рациональностью выбора  $\psi_j(x)$  относительно  $S$ . Первым возможным шагом к формированию наилучшего базиса является задание глобальной для  $S$  полной системы

базисных функций  $\psi_j(x) \in C(S)$ . Для задания подобной системы в работах [2; 7] предложен барицентрический метод (БМ).

Цель настоящей статьи состоит в наглядном определении особенностей применения БМ в численном решении задачи (3) с уточнением его схожимости при априорном и апостериорном исследовании в сравнении с методом RWG [8; 9].

## 1. Решение задач дифракции на проводящих тонких экранах барицентрическим методом

Пусть  $\partial S$  лежит в плоскости  $x_3 = 0$ . Основное допущение БМ состоит в том, что  $\partial S$  представляется замкнутой несамопересекающейся ломаной линией, которая ограничивает область  $\Omega$  – проекция  $S$  на  $x_3 = 0$ . Для точки  $\{x_1, x_2, 0\} \in \Omega$  кривизна  $S$  характеризуется орт-вектором нормали  $v^0(x)$ .

Зададим параметризацию

$$\partial S = \partial \Omega = \bigcup_{n=0}^{N-1} \Gamma_n,$$

где  $\Gamma_n = \{e_n t + P_n, t \in [0, 1]\}$ ,  $e_n = P_{n+1 \bmod N} - P_n$ ,  $\{P_0, P_1, \dots, P_{N-1}\}$  – множество неповторяющихся вершин  $\Omega$  ( $P_n = (x_1^n, x_2^n)$ ).

Выбор базиса  $\psi_j(x)$  в БМ производится на плоскости  $x_3 = 0$ . При этом  $\psi_j(x)$  формируются через барицентрические координаты (БК)  $\zeta_n$ .

**Определение 1** [10]. *Барицентрическими координатами  $\zeta_n$  назовем набор  $\bar{\zeta} = (\zeta_n)_N$  функций  $\zeta_n(x) \in [0, 1]$  ( $x \in \Omega$ ), которые удовлетворяют условиям*

$$\begin{aligned} \Delta \zeta_n(x), \quad x \in \Omega; \quad \zeta_n(x) = t, \\ x \in \Gamma_{n-1}; \quad \zeta_n(x) = 1 - t, \quad x \in \Gamma_n; \\ \zeta_n(x) = 0, \quad x \in \partial \Omega \setminus \{\Gamma_{n-1}, \Gamma_n\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Правило определения БК в постановке (4) разработано в [10]. Также соотношения для задания  $\zeta_n$  на основе [10] уточнены в [1].

Определим множество мультииндексов [7]:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_p = \left\{ j = (\tilde{j}_0, \tilde{j}_1, \dots, \tilde{j}_n, \dots, \tilde{j}_{N-1}) : \tilde{j}_n \in \mathbb{Z}_+, \right. \\ \left. \sum_{n \in [0; N-1]} \tilde{j}_n = p \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $p \in \mathbb{N}$ ;  $|\tilde{M}_p| = \binom{N+p-1}{p}$ ;  $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Для (4) и представления  $\Omega$  зададим дискретное множество точек  $x^{\bar{j}} \in \bar{X}_p$ ,  $x^{\bar{j}} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{j}_n P_n$ . Обозначим

$\bar{X}_p \subset \tilde{X}_p$ , притом что  $x^{\bar{j}} \in \bar{X}_p$ , если  $x^{\bar{j}} \in \bar{\Omega}$  ( $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial \Omega$ ) и  $x^{\bar{j}} \neq x^{\bar{j}'}$  для  $\bar{j} \neq \bar{j}'$ , где  $\bar{j}, \bar{j}' \in \bar{M}_p$ ;  $\bar{M}_p \subset \tilde{M}_p$ . Также введем в рассмотрение  $X_p \subset \bar{X}_p$  так, что  $x^j \in X_p$  при  $x^j \notin \partial \Omega$ , где  $j \in M_p$ ;  $M_p \subset \bar{M}_p$ .

По сути, введение множеств  $\bar{X}_p$ ,  $X_p$  при исходной ассоциации дискретного множества точек  $x^{\bar{j}} \in \tilde{X}_p$  с элементами  $\tilde{j} \in \tilde{M}_p$  необходимо для формирования множеств мультииндексов  $\bar{M}_p$  и  $M_p$ . Особенности алгоритмического составления  $\bar{M}_p$  по правилу (4) рассмотрены в [11]. Для формирования  $\bar{M}_p$  производится составление множества  $\bar{X}_p$  при последовательном добавлении элементов  $x^{\bar{j}}$  из  $\tilde{X}_p$  в том случае, если  $x^{\bar{j}} \notin \bar{X}_p$ . С учетом исходно определенного соответствия элементов множеств  $\tilde{X}_p$  и  $\tilde{M}_p$  относительно заданного  $\bar{X}_p$  составляется  $\bar{M}_p$  с элементами  $\bar{j}$ . Множество мультииндексов  $M_p$  формируется при добавлении в  $X_p$  элементов  $x^j$  из  $\bar{X}_p$ , для которых выполняются условия:

$$x^{\bar{j}} \neq P_n, \quad \left| e_n \wedge (x^{\bar{j}} - P_n) \right| > 0$$

при

$$0 \leq 1 - \left| x^{\bar{j}} - P_n \right| |e_n|^{-1} \leq 1$$

$$\text{и } 0 \leq 1 - \left| x^{\bar{j}} - P_{n+1 \bmod N} \right| |e_n|^{-1} \leq 1,$$

где  $\wedge$  – внешнее произведение векторов в  $\mathbb{R}^2$  [7]. С учетом соответствия элементов множеств  $\bar{X}_p$  и  $\bar{M}_p$  относительно заданного  $X_p$  составляется  $M_p$  с элементами  $j$ . Примеры геометрического представления изложенных задач приведены на рис. 1.

Учитывая заданные представления, базис  $\psi_j(x)$  для

$$u^M(x) = \sum_{j=1}^M c_j \psi_j(x)$$

в (3) формируется из двух типов функций  $\psi_j^h(x)$ ,  $\psi_j^e(x)$  ( $j \in \bar{M}_p, j \in M_p$ ):

$$\begin{aligned} \psi_j^h(x) &= -v^0(x) \times \sum_{\bar{j}' \in \bar{M}_p} a_{\bar{j}\bar{j}'}^h \nabla_2' \phi_{\bar{j}'}(x); \\ \psi_j^e(x) &= v^0(x) \times \sum_{j' \in M_p} a_{jj'}^e \nabla_2 \phi_{j'}(x), \end{aligned} \quad (6)$$

где

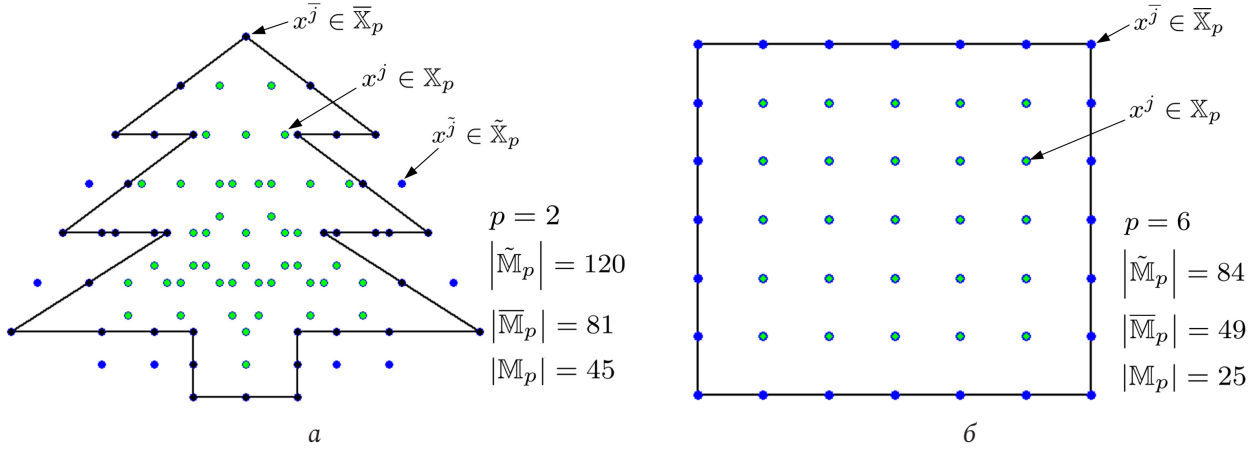


Рис. 1. Геометрическое представление задач формирования  $\tilde{\mathbb{X}}_p$ ,  $\bar{\mathbb{X}}_p$ ,  $\mathbb{X}_p$  для выпуклого (а) и вогнутого (б) многоугольников  
Fig. 1. Geometric representation of the problems of forming  $\tilde{\mathbb{X}}_p$ ,  $\bar{\mathbb{X}}_p$ ,  $\mathbb{X}_p$  for convex (a) and concave (b) polygons

$$\nabla'_2 = \left\{ -\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1}, 0 \right\}; \quad \nabla_2 = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, 0 \right\};$$

$$\phi_{\bar{j}}(x) = p! \prod_{n=0}^{N-1} \frac{[\zeta(x)]^{\bar{j}_n}}{\bar{j}_n!};$$

$a_{\bar{j}\bar{j}}^h$  -  $\bar{j}$ -е элементы  $\bar{j}$ -го собственного вектора матрицы

$$\hat{\mathbf{A}}^h = [\mathbf{C}^h]^{-1} \mathbf{h}$$

при

$$\mathbf{B}^h = \left( B_{\bar{j}\bar{j}}^h \right)_{|\bar{\mathbb{M}}_p| \times |\bar{\mathbb{M}}_p|}, \quad \mathbf{C}^h = \left( C_{\bar{j}\bar{j}}^h \right)_{|\bar{\mathbb{M}}_p| \times |\bar{\mathbb{M}}_p|}$$

для

$$B_{\bar{j}\bar{j}}^h = \int_{\Omega} \phi_{\bar{j}}(x) \phi_{\bar{j}}(x) dx, \quad C_{\bar{j}\bar{j}}^h = - \int_{\Omega} \nabla \phi_{\bar{j}}(x) \nabla \phi_{\bar{j}}(x) dx;$$

$a_{j j'}^e$  -  $j$ -е элементы  $j$ -го собственного вектора матрицы

$$\mathbf{A}^e = [\mathbf{B}^e]^{-1} \mathbf{C}^e$$

при

$$\mathbf{B}^e = \left( B_{j j'}^e \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}, \quad \mathbf{C}^e = \left( C_{j j'}^e \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$$

для

$$B_{j j'}^e = \int_{\Omega} \phi_j(x) \phi_{j'}(x) dx, \quad C_{j j'}^e = - \int_{\Omega} \nabla \phi_j(x) \nabla \phi_{j'}(x) dx.$$

Здесь и далее предполагается, что нумерация  $j$ -х ( $\bar{j}$ -х) собственных векторов выполняется в порядке возрастания соответствующих им собственных чисел матриц  $\mathbf{A}^{(h,e)}$ .

Поскольку форма  $S$  для заданной системы базисных функций характеризуется  $v^0(x)$ , далее для удобства представления будем рассматривать функции

$$\psi_j^h(x) = \sum_{\bar{j} \in \bar{\mathbb{M}}_p} a_{\bar{j}\bar{j}}^h \nabla_2 \phi_{\bar{j}}(x),$$

$$\psi_j^e(x) = \sum_{j' \in \mathbb{M}_p} a_{j j'}^e \nabla_2 \phi_{j'}(x)$$

для плоского экрана ( $\Omega = S$ ). Как следует из определения (6), коэффициенты  $a_{\bar{j}\bar{j}}^h$ ,  $a_{j j'}^e$  формируются при решении соответствующих задач Неймана и Дирихле для однородного уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases} \Delta \varphi^h + \chi \varphi^h = 0; \\ \left. \frac{\partial \varphi^h}{\partial \zeta} \right|_{\partial \Omega} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \varphi^e + \chi \varphi^e = 0; \\ \left. \varphi^e \right|_{\partial \Omega} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\zeta$  - внешняя единичная нормаль к  $\partial \Omega$ .

Решение (7) выполняется БМ в проекционной постановке метода Галеркина [7] при определении приближений

$$\phi_j^h(x) = \sum_{\bar{j} \in \bar{\mathbb{M}}_p} a_{\bar{j}\bar{j}}^h \phi_{\bar{j}}(x), \quad \phi_j^e(x) = \sum_{j' \in \mathbb{M}_p} a_{j j'}^e \phi_{j'}(x),$$

советующих собственных функций. Интегральное представление в функции невязки при определении значений  $C_{j j'}^{(h,e)}$  упрощается до ранее заданного с применением первой формулы Грина.

Подобное правило формирования базисных функций позволяет обеспечить выполнение граничных условий для  $u$  в задаче дифракции (3). Вычисление интегралов для определения  $B_{j j'}^{(h,e)}$ ,  $C_{j j'}^{(h,e)}$  выполняется численно при исходном разбиении  $\Omega$  на  $M$  треугольных элементов при построении триангуляции Делоне [12]. Примеры базисных функций  $\psi_j^h(x)$ ,  $\psi_j^e(x)$  для вогнутого многоугольника приведены на рис. 2, 3 соответственно.

Для заданных правил определения базисных функций в проекционной постановке Галеркина при аппроксимации

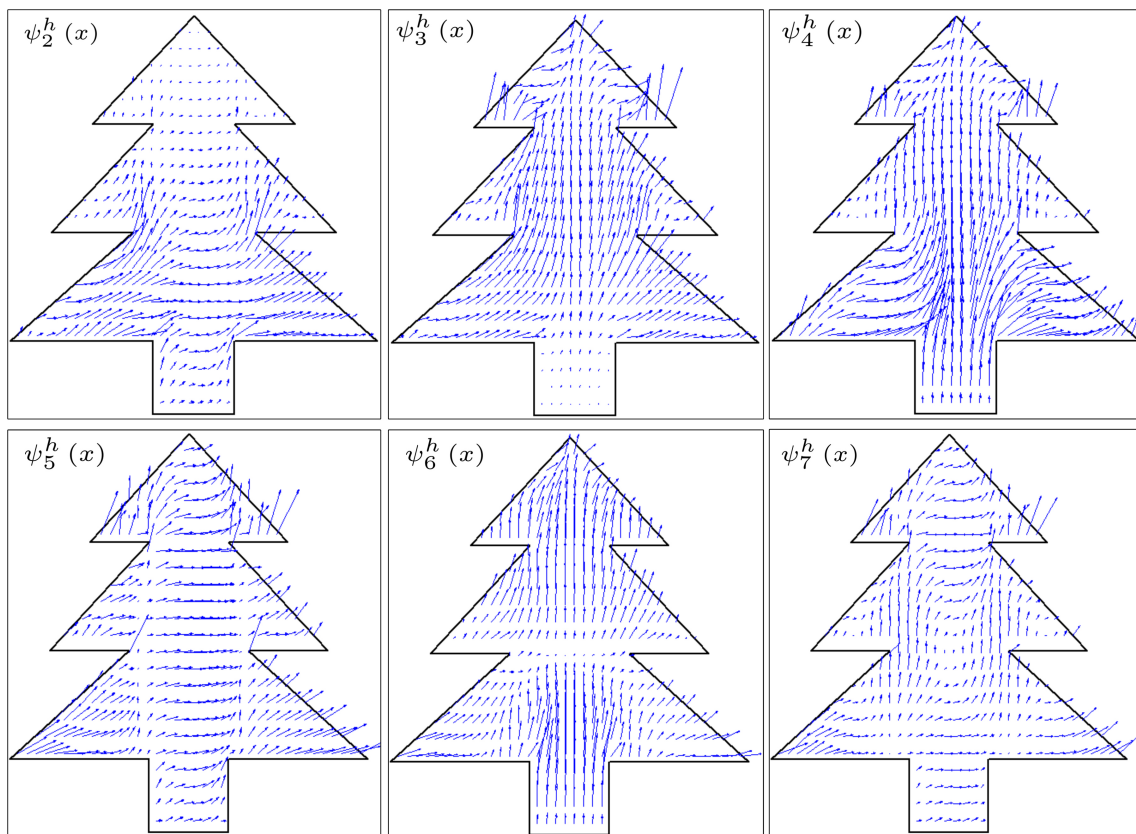


Рис. 2. Примеры базисных функций  $\psi_j^h(x)$  для вогнутого многоугольника  
Fig. 2. Examples of basis functions  $\psi_j^h(x)$  for a concave polygon

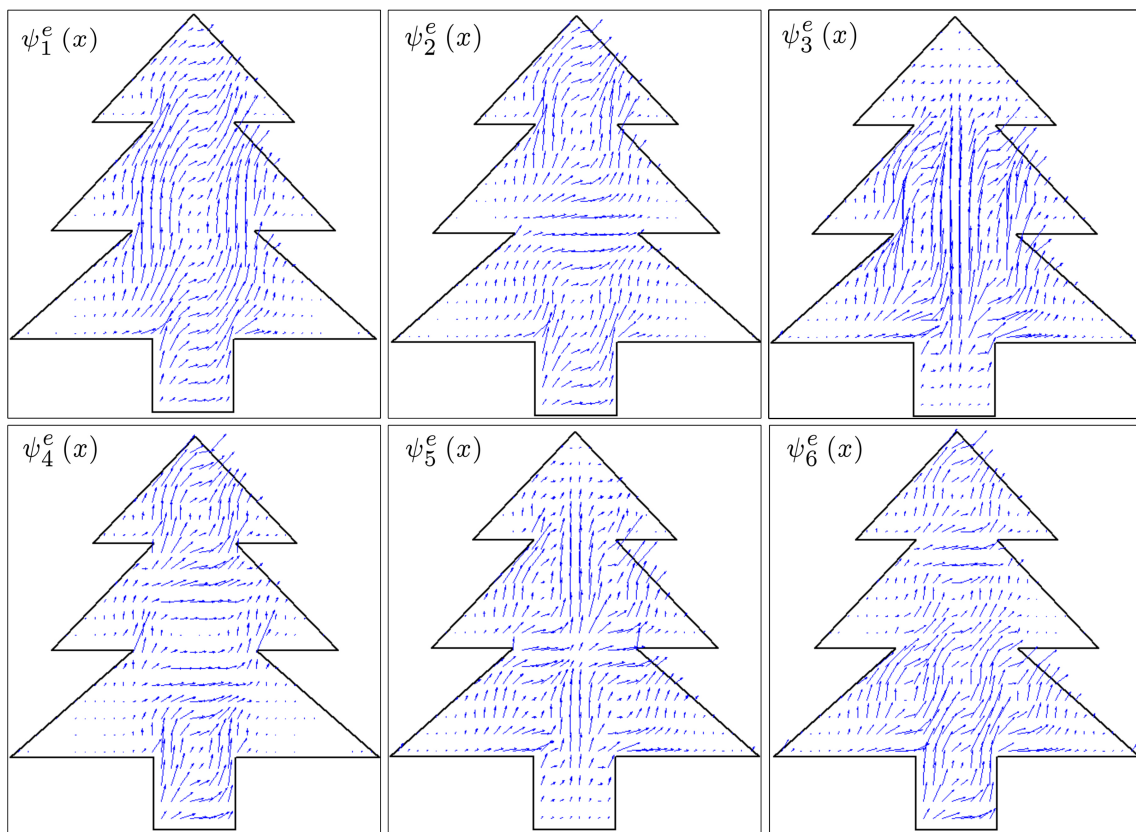


Рис. 3. Примеры базисных функций  $\psi_j^e(x)$  для вогнутого многоугольника  
Fig. 3. Examples of basis functions  $\psi_j^e(x)$  for a concave polygon

$$u^{\mathcal{M}}(x) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} c_j^h \psi_j^h(x) + \sum_{j \in \mathbb{M}_p} c_j^e \psi_j^e(x)$$

искомого распределения тока  $u(x)$  на  $S$  требования ортогональности невязки

$$\mathcal{N}(x) = \mathcal{L}[u^{\mathcal{M}}(x)] - f(x)$$

к  $\psi_j^h(x)$ ,  $\psi_j^e(x)$  с учетом первой формулы Грина, свойств дифференциальных операторов и граничных условий  $u(x)$  вблизи  $\partial S$  сводят задачу (3) к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных коэффициентов разложения  $c_j^h$ ,  $c_j^e$ . Устранение особенности при формировании СЛАУ, которая возникает при вычислении двойного интеграла вида

$$\int_S \psi_j^{(h,e)}(x) \int_S \frac{e^{i\beta|x-y|}}{|x-y|} \psi_j^{(h,e)}(y) dy dx$$

в случае  $|x-y| \rightarrow 0$ , выполняется следующим образом. Интегрирование реализуется численно с учетом предшествующего разбиения  $\Omega$  на треугольные области. Далее для каждого треугольника составляются два массива узловых точек и весовых коэффициентов. Первый массив формируется через нули многочлена Лежандра, второй – через нули многочлена Чебышева. В случаях, когда треугольники по координате источника  $x$  (треугольники источника) не совпадают с треугольниками по координате точке наблюдения  $y$  (треугольники наблюдения), то суммирование по  $y$  выполняется через первый массив узловых точек, а по  $x$  – через второй. Подобное разделение точек интегрирования позволяет исключить появление сингулярности в случаях, когда треугольники источника и наблюдения являются смежными. Если треугольник источника совпадает с треугольником наблюдения, то для исключения ситуации деления на нуль интеграл по  $du$  преобразуется в локальную относительно интегрируемой треугольной области полярную систему координат с центром в  $x$  [8].

## 2. Оценка сходимости

Основу оценки сходимости для БМ составляет исследование аппроксимаций

$$\Psi_p(x) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} f(x^j) \phi_j(x) \text{ и}$$

$$\Psi_p^{1,2}(x) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} f(x^j) \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x_{1,2}}$$

липшицевой функции  $f(x)$  и ее первых частных производных  $\partial f(x)/\partial x_{1,2}$  внутри произвольного

многоугольника  $x \in \Omega$ . Их результат определяют следующие утверждения.

**Лемма 1.** Если  $f(x)$  удовлетворяет на  $\Omega$  условию Липшица с константой  $L_0$ , то  $\limsup_{p \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} |\Psi_p(x) - f(x)| < \infty$  и справедлива оценка

$$\sup_{x \in \Omega} |\Psi_p(x) - f(x)| \leq L^0 C_1 h p^{-1/2}, \quad (8)$$

где  $C_1$  – некоторая постоянная, не зависящая от  $p$ ;  $h = 0,5 \max_{n_1, n_2 \in [0; N-1]} |P_{n_1} - P_{n_2}|$ .

**Лемма 2.** Если частные производные  $\frac{\partial f(x)}{\partial x_{1,2}}$  непрерывной функции  $f(x)$  удовлетворяют на  $\Omega$  условию Липшица с константой  $L_0$ , то

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} \left| \Psi_p^{1,2}(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x_{1,2}} \right| < \infty \text{ и справедлива оценка}$$

$$\sup_{x \in \Omega} \left| \Psi_p^{1,2}(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x_{1,2}} \right| \leq L^0 \left( C_1 h (p-1)^{-1/2} + p^{-1} \right), \quad (9)$$

где  $C_1$  – некоторая постоянная, не зависящая от  $p$ .

Итоговая оценка сходимости БМ выполняется на основе результатов [4; 6; 9] при введении следующих представлений.

Следуя [6], определим пространства Соболева  $H^s(\mathcal{A})$  как пополнение  $C^\infty(\mathcal{A})$  по норме  $\|\cdot\|_s$ , положив  $\forall s \in \mathbb{R}$ :

$$H^s(S) := \left\{ u|_S : u \in H^s(\mathcal{A}) \right\}; \quad (10)$$

$$\tilde{H}^s(\bar{S}) := \left\{ u \in H^s(\mathcal{A}) : \text{supp } u \subset \bar{S} \right\}.$$

Также в соответствии с [4; 6] определим гильбертово пространство

$$W = W(\bar{S}) := \left\{ u \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{S}) : \nabla \cdot u \in \tilde{H}^{-1/2}(\bar{S}) \right\}$$

как пополнение  $C_0^\infty(S)$  по норме  $\|\cdot\|_W$  [6]:

$$\|u\|_W^2 = \|u\|_{-1/2}^2 + \|\nabla \cdot u\|_{-1/2}^2. \quad (11)$$

Для заданной нормы с учетом (8), (9) итоговая апостериорная оценка сходимости БМ в решении задач дифракции на проводящих тонких экранах будет представлена в следующем виде.

**Теорема 1.** Пусть

$$u^{\mathcal{M}}(x) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} c_j^h \psi_j^h(x) + \sum_{j \in \mathbb{M}_p} c_j^e \psi_j^e(x), \quad (12)$$

тогда метод Галеркина для уравнения (3) сходится и справедлива оценка

$$\|u^{\mathcal{M}} - u\|_W = C_2 \left( C_1 h (p-1)^{-1/2} + p^{-1} \right), \quad (13)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  – не зависящие от  $p$  положительные постоянные.

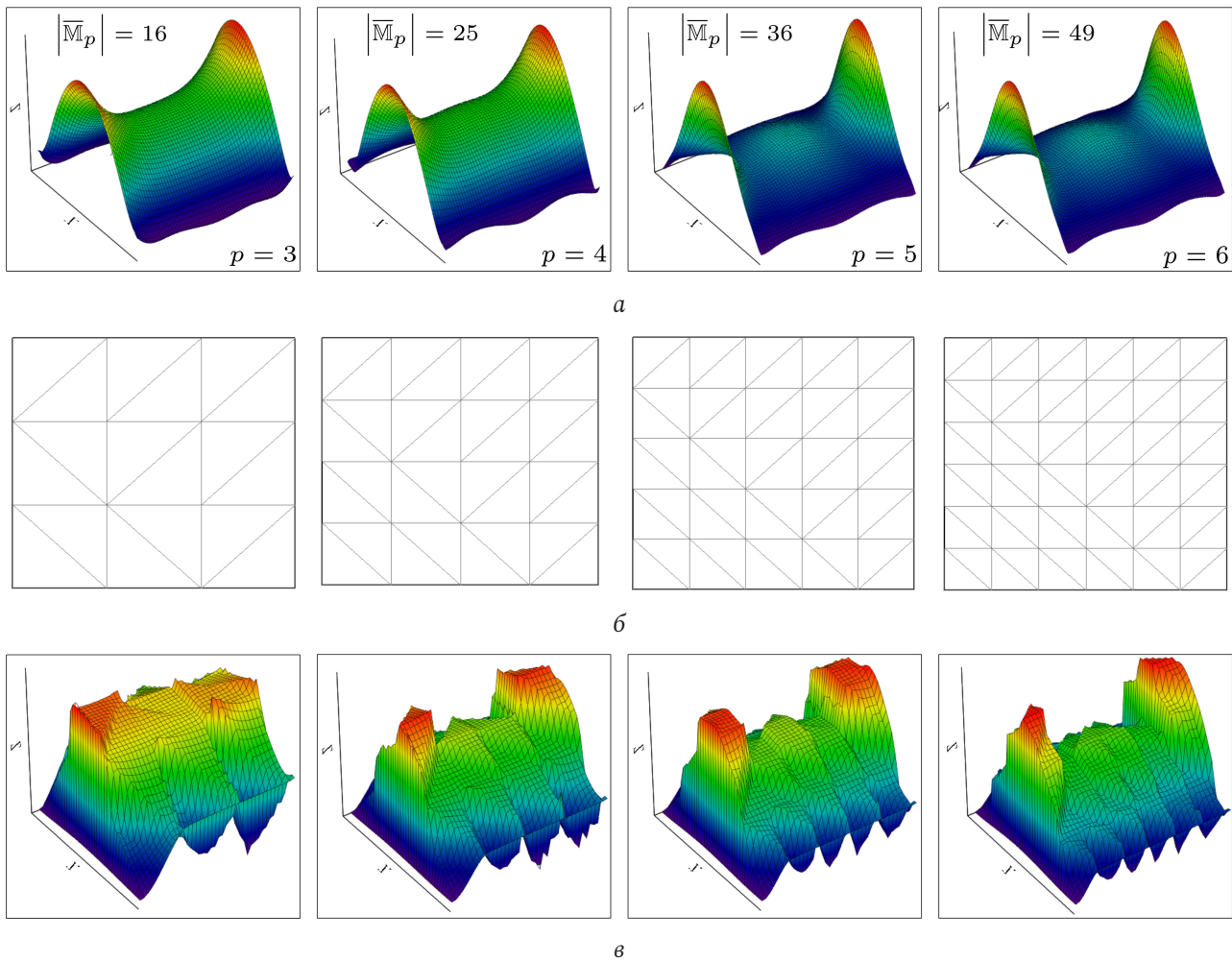


Рис. 4. Результаты расчета  $u^M$  для экрана  $\lambda \times \lambda$ : а – барицентрический метод; б – эквивалентная по числу базисных функций сетка RWG; в – метод RWG  
 Fig. 4. Results of calculating  $u^M$  for a  $\lambda \times \lambda$  screen: a – barycentric method; b – RWG grid equivalent in the number of basis functions; c – RWG method

Для сравнительной априорной оценки сходимости БМ относительно известных решений [8; 9] (предполагают аппроксимацию  $u$  базисными функциями RWG) в САПР Mathcad приведены расчеты  $u$  на прямоугольных плоских экранах размера  $\lambda \times \lambda$  и  $3\lambda \times 3\lambda$  ( $\lambda$  – длина волны). Возбуждение  $u$  осуществлялось плоской электромагнитной волной ( $E^0 = (1, 0, 0)$ ).

Для корректности сравнения число базисных функций RWG для фиксированного  $p$  задавалось равным  $|\overline{M}_p|$ . На рис. 4, 5 приведены результаты расчета  $u^M$  для экранов  $\lambda \times \lambda$ ,  $3\lambda \times 3\lambda$  соответственно.

На рис. 6 представлены результаты сравнительного расчета  $u^M$  для экрана  $\lambda \times \lambda$ , выполненного для  $p = 6$  ( $|\overline{M}_p| = 49$ ) БМ и в САПР Ansoft HFSS при построении адаптивной расчетной сетки эквивалентными по числу базисными функциями (БФ) нулевого, первого, второго и смешанного порядков.

## Заключение

В целом, предложенное правило (6) определения глобальной для  $S$  полной системы базисных функций с учетом априорной (12) и апостериорных (рис. 4–6) результатов позволяет существенно повысить сходимость численного решения (11) задачи (3) дифракции электромагнитной волны (1), (2) на бесконечно тонком идеально проводящем экране произвольной формы в сравнении с известными сеточными схемами, которые, например, основываются на методе RWG [8; 9]. При этом, сравнивая результат (12) с известным [9], справедливо заметить, что выигрыш по точности существенно растет при соизмеримости вычислительных затрат. Как следует из результатов (рис. 6), алгоритмы адаптации расчетной сетки позволяют при росте вычисленных затрат несколько повысить точность, однако она все же остается ниже, чем у БМ.

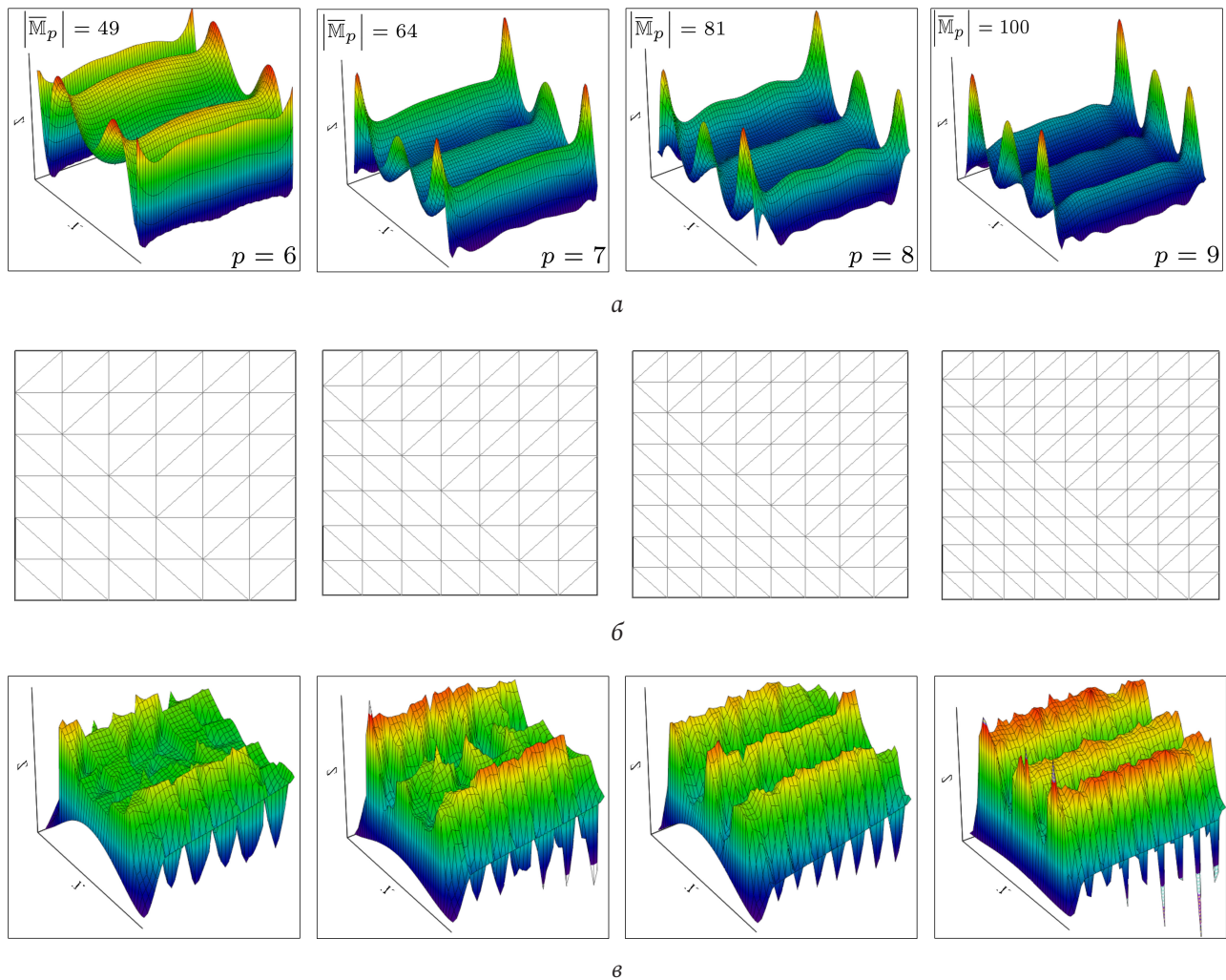


Рис. 5. Результаты расчета  $u^M$  для экрана  $3\lambda \times 3\lambda$ : а - барицентрический метод; б - эквивалентная по числу базисных функций сетка RWG; в - метод RWG

Fig. 5. Results of calculating  $u^M$  for a  $3\lambda \times 3\lambda$  а - barycentric method; б - RWG grid equivalent in the number of basis functions; в - RWG method

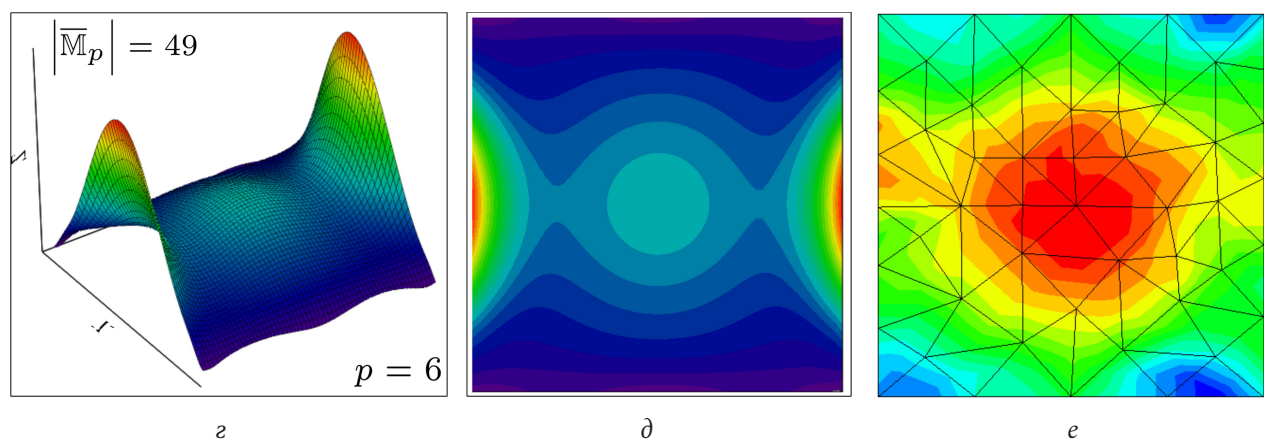


Рис. 6. Результаты расчета  $u^M$  при  $p=6$  для экрана  $\lambda \times \lambda$ : а, б - барицентрический метод; в - HFSS БФ нулевого порядка; г - HFSS БФ первого порядка; д - HFSS БФ второго порядка; е - HFSS БФ смешанного порядка

Fig. 6. Results of calculating  $u^M$  at  $p=6$  for a  $\lambda \times \lambda$  screen: а, б - barycentric method; в - HFSS BF of the zero order; г - HFSS BF of the first order; д - HFSS BF of the second order; е - HFSS BF of the mixed order

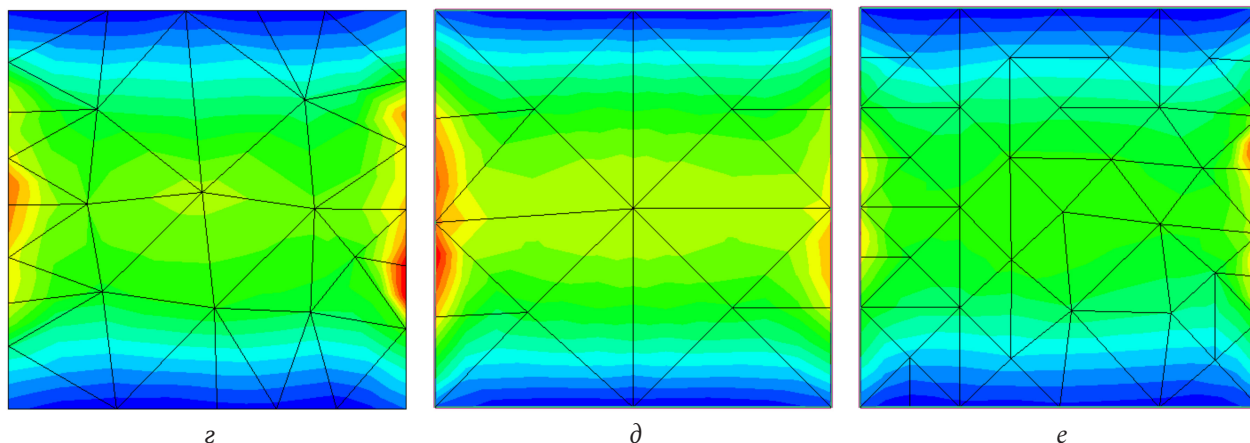


Рис. 6 (продолжение). Результаты расчета  $u^M$  при  $p=6$  для экрана  $\lambda \times \lambda$ : а, б – барицентрический метод; в – HFSS БФ нулевого порядка; г – HFSS БФ первого порядка; д – HFSS БФ второго порядка; е – HFSS БФ смешанного порядка

Fig. 6 (continued). Results of calculating  $u^M$  at  $p=6$  for a  $\lambda \times \lambda$  screen: а, б – barycentric method; в – HFSS BF of the zero order; г – HFSS BF of the first order; д – HFSS BF of the second order; е – HFSS BF of the mixed order

### Список литературы

1. Полянский И.С. О применении барицентрического метода в численном решении внутренней задачи электродинамики // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21, № 3. С. 36–42. URL: <https://journals.ssau.ru/index.php/rwp/article/view/7016>.
2. Полянский И.С., Пехов Ю.С. Барицентрический метод в решении сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн // Труды СПИИРАН. 2017. Т. 54, № 5. С. 244–262. DOI: <https://doi.org/10.15622/sp.54.11>.
3. Ключев Д.С. Расчет характеристик зеркальной антенны с плоским зеркалом методом двумерных сингулярных интегральных уравнений // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2010. Т. 13, № 1. С. 21–26.
4. Смирнов Ю.Г., Медведик М.Ю., Максимова М.А. Решение задачи дифракции электромагнитной волны на экранах сложной формы // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2012. Т. 24, № 4. С. 59–72.
5. Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения в теории зеркальных и полосковых антенн / под ред. Д.С. Ключева. М.: Радиотехника, 2015. 216 с.
6. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах: псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции. М.: ИПРЖР, 1996. 176 с.
7. Полянский И.С. Барицентрический метод в вычислительной электродинамике. Орёл: Академия ФСО России, 2017. 148 с.
8. Cai W., Yijun Yu., Yuan X.C. Singularity treatment and high-order RWG basis functions for integral equations of electromagnetic scattering // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2002. Vol. 53, No. 1. P. 31–47. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.390>.
9. Медведик М.Ю., Смирнов Ю.Г. Эллиптичность интегрального уравнения электрического поля для поглощающих сред и сходимость метода Рао – Уилтона – Глиссона // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 1. С. 105–113. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466914010104>.
10. Ильинский А.С., Полянский И.С. Приближенный метод определения гармонических барицентрических координат для произвольных многоугольников // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 3. С. 391–408. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0044466919030098>.
11. Полянский И.С., Степанов Д.Е. Особенности алгоритмической реализации барицентрического метода в вычислительной электродинамике // Материалы XVII Международной научно-технической конференции. Казань, 2019. С. 83–87.
12. Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. Представление отражающих поверхностей антенной системы в задачах анализа и синтеза зеркальных антенн методами физической оптики // Телекоммуникации. 2014. № 7. С. 15–21.

### References

1. Polyanskii I.S. On the application of the barycentric method in the numerical solution of an internal problem of electrodynamics. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2018, vol. 21, no. 3, pp. 36–42. URL: <https://journals.ssau.ru/index.php/rwp/article/view/7016>. (In Russ.)
2. Polyanskii I.S., Pehov Yu.S. Barycentric method in solving singular integral equations of the electrodynamic theory of reflector antennas. *Trudy SPIIRAN*, 2017, vol. 54, no. 5, pp. 244–262. DOI: <https://doi.org/10.15622/sp.54.11>. (In Russ.)
3. Klyuev D.S. Calculation of the characteristics of a reflector antenna with a flat mirror by the method of two-dimensional singular integral equations. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2010, vol. 13, no. 1, pp. 21–26. (In Russ.)
4. Smirnov Yu.G., Medvedik M.Yu., Maksimova M.A. Solution of the problem of diffraction of an electromagnetic wave on complex screens. *Izvestija vuzov. Povolzhskij region. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2012, vol. 24, no. 4, pp. 59–72. (In Russ.)



5. *Singular and Hypersingular Integral Equations in the Theory of Mirror and Strip Antennas*. Ed. by D.S. Klyuev. Moscow: Radiotekhnika, 2015, 216 p. (In Russ.)
6. Il'inskii A.S., Smirnov Yu.G. *Diffraction of Electromagnetic Waves on Thin Conductive Screens: Pseudodifferential Operators in Diffraction Problems*. Moscow: IPRZhR, 1996, 176 p. (In Russ.)
7. Polyanskii I.S. *Barycentric Method in Computational Electrodynamics*. Orel: Akademija FSO Rossii, 2017, 148 p. (In Russ.)
8. Cai W., Yijun Yu., Yuan X.C. Singularity treatment and high-order RWG basis functions for integral equations of electromagnetic scattering. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, vol. 53, no. 1, pp. 31–47. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.390>.
9. Medvedik M.Ju., Smirnov Ju.G. Ellipticity of the integral equation of the electric field for absorbing media and convergence of the Rao–Wilton–Glisson method. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2014, vol. 54, no. 1, pp. 105–113. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466914010104>. (In Russ.)
10. Il'inskii A.S., Polyanskii I.S. Approximate method for determining harmonic barycentric coordinates for arbitrary polygons. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2019, vol. 59, no. 3, pp. 391–408. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0044466919030098>. (In Russ.)
11. Polyanskii I.S., Stepanov D.E. Features of algorithmic implementation of the barycentric method in computational electrodynamics. *Materialy XVII Mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferentsii. Kazan', 2019*, pp. 83–87. (In Russ.)
12. Arhipov N.S., Polyanskii I.S., Stepanov D.E. Representation of the reflecting surfaces of the antenna system in the problems of analysis and synthesis of reflector antennas using physical optics methods. *Telekommunikatsii*, 2014, no. 7, pp. 15–21. (In Russ.)

## Physics of Wave Processes and Radio Systems

2020, vol. 23, no. 3, pp. 34–43

DOI 10.18469/1810-3189.2020.23.3.34-43

Received 29 June 2020  
Accepted 28 July 2020

### On the convergence the barycentric method in solving diffraction problems on conductive thin screens

Anatolii S. Il'inskii<sup>1</sup>, Ivan S. Polyanskii<sup>2</sup> , Dmitry E. Stepanov<sup>2</sup>, Nikolay I. Kuznetsov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Lomonosov Moscow State University  
1, Leninskie Gory,  
Moscow, 119991, Russia

<sup>2</sup> The Academy of the Federal Guard Service of the Russian Federation  
35, Priborostroitel'naya Street,  
Oryol, 302015, Russia

*Annotation* – In this article, the use of the barycentric method is proposed for the numerical solution of problems of diffraction of electromagnetic waves on infinitely thin perfectly conducting screens of arbitrary shape. The numerical solution is formed in the projection formulation of the Galerkin method. The essence of the barycentric method is to form a global system of basic functions for opening the screen when determining the approximation of the desired function of the current plane on its surface. Basis functions are defined by Bernstein-type polynomials in terms of barycentric coordinates that are entered for opening the screen when it is represented as a closed simply connected polygonal region. The features of the algorithmic implementation of the barycentric method in solving diffraction problems on conducting thin screens are considered. The rate of convergence is estimated. Comparative results of calculations performed under equivalent conditions using the barycentric method and the RWG method are presented.

*Keywords* – electromagnetic field diffraction, infinitely thin ideally conducting screen, barycentric method, global basis functions, barycentric coordinates, convergence estimation.

#### Информация об авторах

Ильинский Анатолий Серафимович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики и заведующий лабораторией вычислительной электродинамики факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. Число научных публикаций – 440.

*Область научных интересов:* вычислительная математика, математическое моделирование, математическая физика, теория электромагнитных волн, радиофизика.

*E-mail:* celd@cs.msu.ru

Полянский Иван Сергеевич, доктор физико-математических наук, сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации. Число научных публикаций – 152.

#### Information about the Authors

Anatolii S. Il'inskii, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Mathematical Physics and head of the laboratory of computational electrodynamics of the faculty VMK, Lomonosov Moscow state University. The number of scientific publications – 440.

*Research interests:* computational mathematics, mathematical modeling, mathematical physics, theory of electromagnetic waves, radiophysics.

*E-mail:* celd@cs.msu.ru

Ivan S. Polyanskii, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, member of the Academy of the Federal Protective Service of the Russian Federation. Number of scientific publications – 152.

*Область научных интересов:* математическое моделирование, динамические системы, дифференциальные уравнения, методы оптимизации, оптимальное управление, конформные отображения, вычислительная электродинамика, цифровая обработка сигналов.

*E-mail:* van341@mail.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-1282-1522>

**Степанов Дмитрий Евгеньевич**, сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации. Число научных публикаций – 32.

*Область научных интересов:* математическое моделирование, методы оптимизации, вычислительная электродинамика, цифровая обработка сигналов, антенны и устройства СВЧ.

*E-mail:* stepbystep000@ya.ru

**Кузнецов Николай Игоревич**, кандидат военных наук, доцент, сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации. Число научных публикаций – 56.

*Область научных интересов:* радиотехника, антенные системы, цифровая обработка сигналов, военные системы связи, антенны и устройства СВЧ.

*E-mail:* kuznetsovfgs\_ni\_88@ya.ru

*Research interests:* mathematical modeling, dynamic systems, differential equations, optimization methods, optimal control, conformal mapping, computational electrodynamics, digital signal processing.

*E-mail:* van341@mail.ru

*ORCID:* <https://orcid.org/0000-0002-1282-1522>

**Dmitry E. Stepanov**, member of the Academy of the Federal Protective Service of the Russian Federation. Number of scientific publications – 32.

*Research interests:* mathematical modeling, optimization methods, computational electrodynamics, digital signal processing, antennas and microwave devices.

*E-mail:* stepbystep000@ya.ru

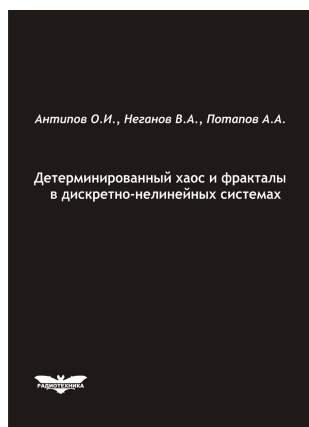
**Nikolay I. Kuznetsov**, Candidate of Military Sciences, associate professor, member of the Academy of the Federal Protective Service of the Russian Federation. Number of scientific publications – 56.

*Research interests:* radio engineering, antenna systems, digital signal processing, military communication systems, antennas and microwave devices.

*E-mail:* kuznetsovfgs\_ni\_88@ya.ru

**Антипов, О.И.**

**Детерминированный хаос и фракталы в дискретно-нелинейных системах** / О.И. Антипов, В.А. Неганов, А.А. Потапов. – М.: Радиотехника, 2009. – 235 с., ил.



ISBN 978-5-88070-237-4

УДК 530.1:621.372+621.396  
ББК 32.96

В монографии рассмотрены явления детерминированного хаоса и фрактальности в дискретно-нелинейных системах на примере устройств импульсной силовой электроники, приведены некоторые основные определения современной нелинейной динамики и некоторые математические методы целочисленных и дробных мер.

Представленные явления стохастической работы могут наблюдаться в широком классе систем с переменной структурой, действие которых может быть описано системами дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, скачкообразно меняющими свои значения с течением времени в зависимости от состояния системы. Объектами исследования явились импульсные стабилизаторы напряжения различных типов и структур. Научной новизной является применение как фрактальных, так и мультифрактальных мер детерминированного хаоса к анализу стохастической работы импульсных стабилизаторов.

*Для специалистов, интересующихся проблемами детерминированного хаоса, численным моделированием дискретно-нелинейных систем.*