

## Математические модели киральных метаматериалов на основе многозаходных проводящих элементов

М.В. Аралкин<sup>1</sup>, А.Н. Дементьев<sup>2</sup>, О.В. Осипов<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Военная академия Ракетных войск стратегического назначения имени Петра Великого  
143900, Россия, Московская обл., г. Балашиха  
ул. Карбышева, 8

<sup>2</sup> МИРЭА – Российский технологический университет  
119454, Россия, г. Москва  
пр. Вернадского, 78

<sup>3</sup> Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Россия, г. Самара  
ул. Л. Толстого, 23

*Аннотация* – В работе рассмотрены математические модели метаматериалов на основе совокупности многозаходных проводящих элементов, таких как микроспирали и гаммадионы. Получены аналитические выражения для резонансных частот элементов, а также с использованием модели Максвелла Гарнетта определены соотношения для материальных параметров с учетом дисперсии метаматериалов. Выявлены постоянные распространения волн с круговыми поляризациями в указанных метаматериалах. В качестве примера использования построенных математических моделей рассмотрено решение задачи об отражении плоской линейно поляризованной электромагнитной волны от планарного слоя из метаматериала, который представляет собой матрицу из тонкопроволочных идеально проводящих элементов в виде  $N$  взаимно ортогональных спиралей. Задача решалась методом частичных областей, и ее решение было сведено к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов отражения и прохождения основной и кросс-поляризованной компонент поля. В результате проведения математического моделирования были выявлены частотно и поляризационно селективные свойства исследуемого метаматериала.

*Ключевые слова* – киральная среда, метаматериал, метаструктура, спиральный элемент, гаммадион, пространственная дисперсия, частотная селективность, поляризационная селективность, модель Максвелла Гарнетта.

### Введение

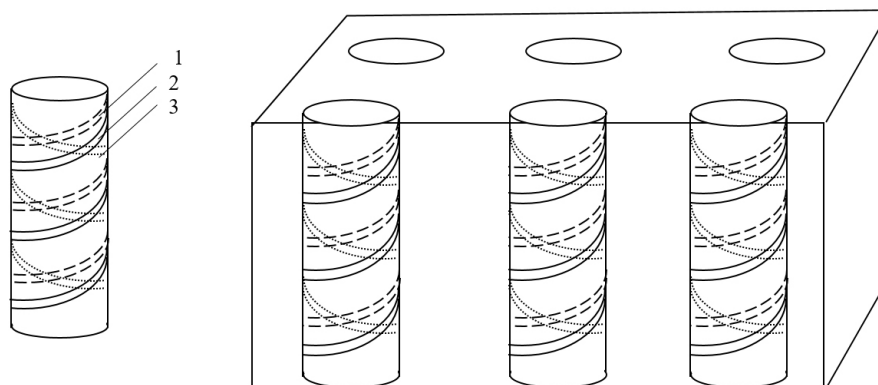
В настоящее время в электродинамике и оптике активно исследуются метаматериалы, то есть искусственно создаваемые структуры, обладающие нетрадиционными для естественных сред свойствами взаимодействия с электромагнитным полем [1; 2]. Метаматериалы имеют в своей основе искусственную периодическую структуру, за счет которой изменяются материальные параметры метаматериала в целом, что, в свою очередь, приводит к изменению дисперсионных, поляризационных характеристик и т. п. Любой метаматериал состоит из однородного контейнера, в котором периодически размещаются элементы, размеры которых соотносятся с длинами волн падающего электромагнитного излучения.

С другой стороны, начиная с конца XX века в электродинамике СВЧ значительно возрос интерес к исследованию и созданию композитных и искусственных сред, обладающих свойством киральности [3–7]. Киральная среда (метаматериал) представляет собой совокупность равномерно распределенных в изотропной диэлектрической среде проводящих зеркально-асимметричных

(киральных) элементов. Помимо материала, из которого изготовлен киральный элемент, важнейшую роль играет и его форма. Именно поэтому так важно исследование новых видов киральных элементов, а также определение электродинамических свойств киральных метаматериалов на их основе.

Основными свойствами киральных метаматериалов являются распространение волн с право- и левокруговыми поляризациями, а также кросс-поляризация падающего электромагнитного излучения, возникающая при прохождении и отражении от кирального метаматериала. В общем случае во всех окружающих киральный метаматериал областях электромагнитные волны будут иметь эллиптическую поляризацию.

Одной из наиболее известных киральных частиц является элемент Телледжена [8], представляющей собой совокупность разомкнутого тонкопроволочного кольца и выступающих прямолинейных концов. Любой киральный элемент представляет собой совокупность электрического и магнитного диполя, что, в свою очередь, приводит к возникновению дополнительной связи меж-



**Рис. 1.** Геометрия элемента и метаматериала  
**Fig. 1.** The geometry of the element and metamaterial

ду электрическими и магнитными индукциями и напряженностями, которая в материальных уравнениях описывается так называемым параметром киральности.

Данная работа посвящена построению математических моделей и исследованию отражения электромагнитных волн СВЧ-диапазона от метаматериалов, созданных на основе составных элементов с произвольным числом заходов – многозаходных спиралей и гаммадионов. В научной литературе подробно исследованы электромагнитные свойства классического (двухзаходного) гаммадиона [9]. Также изучены частотно и поляризационно-селективные свойства метаматериала на основе элементов Теллеждена и однозаходных тонкопроволочных спиральных элементов [10]. Доказано, что подобные структуры могут выполнять роль частотно-селективных преобразователей падающего электромагнитного излучения заданной частоты в рассеяние в азимутальной плоскости. В работе [11] рассмотрено решение задачи об отражении плоской электромагнитной волны СВЧ от метаматериала, состоящего из совокупности составных элементов, представляющих собой две ортогональные трехмерные тонкопроволочные спирали. Доказано, что эффекты киральности в таком метаматериале возникают только в случае, когда спирали в составе элемента не являются тождественными по геометрическим и электрофизическим параметрам.

В предлагаемой работе построены математические модели с учетом дисперсии метаматериалов на основе составных элементов двух типов:  $N$ -ортогональных спиралей и  $N$ -заходных гаммадионов, а также проведен анализ отражения плоской электромагнитной волны линейной поляризации от планарных слоев двух указанных типов метаматериала. Для структурного описания метаматериалов будет использоваться модель Максвелла Гарнетта [7].

### 1. Математическая модель метаматериала на основе составных спиральных элементов

Рассмотрим построение математической модели составного элемента на основе произвольного числа спиральных элементов, а также метаматериала на основе периодически распределенной матрицы таких элементов. Геометрия элемента и метаматериала показаны на рис. 1. Для простоты на рис. 1 показаны 3 спирали (1–3) в структуре составного элемента.

Спирали внутри составного элемента отличаются друг от друга своими геометрическими параметрами. Однако при создании метаматериала на их основе все составные элементы должны быть тождественными. Обозначим геометрические параметры  $i$ -й спирали в киральном элементе через  $N_i$  – число витков;  $R_i$  – радиус витка спирали;  $h_i$  – шаг спирали;  $l_i$  – длину спирали в расправленном состоянии;  $r_i$  – радиус проволоки;  $\alpha_i$  – угол накрутки спирали.

Для расчета резонансной частоты составного элемента воспользуемся формулой Томсона:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (1)$$

где  $L$  – общая индуктивность составного элемента;  $C$  – общая емкость составного элемента.

Индуктивность и емкость составного элемента определяются следующим образом:

$$C = \sum_{i=1}^N C_i; \quad L = \prod_{i=1}^N L_i \left( \sum_{i=1}^N L_i \right)^{-1}, \quad (2)$$

где  $L_i$  – индуктивность  $i$ -й спирали;  $C_i$  – емкость  $i$ -й спирали ( $i = 1, N$ );  $N$  – общее число спиралей в составном элементе.

Емкость одной спирали определяется следующим образом [11]:

$$C_i = C_{\text{пр } i} + C_{\text{мв } i} + C_{\text{мэ } i}, \quad (3)$$

то есть в виде суперпозиции емкостей тонкопроволочного проводника, межвитковой емкости  $i$ -й спирали и межэлементной емкости.

В результате выражение для общей емкости  $i$ -й спирали имеет вид:

$$C_i = \varepsilon_{c2} \left[ \frac{l_i}{18 \ln \left( \frac{2l_i}{r_i} \right) - 1} 10^{-11} + \frac{\pi \left[ (R_i + 2r_i)^2 - R_i^2 \right] (N_i - 1)}{h_i} + \frac{1}{d} \frac{N_i (R_i + r_i)}{\cos \alpha_i} r_i \right], \quad (4)$$

где  $\varepsilon_{c2}$  – относительная диэлектрическая проницаемость контейнера (цилиндрической основы, на которую намотана спираль).

Индуктивность  $i$ -й спирали определяется следующим соотношением:

$$L_i = \mu_{c2} \frac{\pi N_i^2 R_i^2}{l_i}, \quad (5)$$

где  $\mu_{c2}$  – относительная магнитная проницаемость контейнера.

Формула для резонансной частоты составного спирального элемента получается из соотношений (1), (2), (4) и (5):

$$\omega_0 = \left[ \prod_{i=1}^N L_i \left( \sum_{i=1}^N L_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^N C_i \right]^{-1/2}, \quad (6)$$

где  $C_i$  и  $L_i$  определяются соотношениями (4) и (5).

После вычисления резонансной частоты составного спирального элемента воспользуемся формулой Максвелла Гарнетта с учетом дисперсии [12]:

$$\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_{s2}}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_{s2}} = \alpha \frac{\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{s2}}{\varepsilon_{c2} + 2\varepsilon_{s2}}; \quad (7)$$

$$\varepsilon_{s2}(\omega) = \varepsilon_{c2} + \frac{\beta_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2};$$

$$\chi_2(\omega) = \frac{A\beta_0^2\omega}{c(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

где  $\varepsilon_2$  – относительная эффективная диэлектрическая проницаемость метаматериала;  $\varepsilon_{s2}$  – относительная диэлектрическая проницаемость кирального элемента на цилиндрической основе;  $\alpha$  – объемная концентрация составных спиралей;  $\chi_2$  – относительный параметр киральности мета-

материала;  $c$  – скорость электромагнитной волны в вакууме;  $A$  – параметр, имеющий размерность длины и связанный с расстоянием между элементами;  $\beta_0$  – параметр, имеющий размерность частоты и связанный с внутренними процессами в среде.

Из первого соотношения (7) получается формула для относительной эффективной диэлектрической проницаемости метаматериала:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{s2} \frac{1 + 2\alpha\varepsilon_{x2}}{1 - \alpha\varepsilon_{x2}}; \quad \varepsilon_{x2} = \frac{\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{s2}}{\varepsilon_{c2} + 2\varepsilon_{s2}}. \quad (8)$$

В результате выражения для эффективной диэлектрической проницаемости и параметра киральности метаматериала на основе составных спиральных элементов имеют следующий вид:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{s2} \frac{1 + 2\alpha\varepsilon_{x2}}{1 - \alpha\varepsilon_{x2}}; \quad \varepsilon_{x2} = \frac{\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{s2}}{\varepsilon_{c2} + 2\varepsilon_{s2}}; \quad (9)$$

$$\varepsilon_{s2}(\omega) = \varepsilon_{c2} + \frac{\beta_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad \chi_2(\omega) = \frac{A\beta_0^2\omega}{c(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Как известно, в киральных метаматериалах имеет место распространение двух волн с право- и левокруговыми поляризациями, волновые числа которых определяются следующим образом:

$$k_{R,L} = \frac{\omega}{c} \left( \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} \pm \chi_2 \right). \quad (10)$$

Подставляя в формулы (10) выражения (9), получаем соотношения для вычисления волновых чисел волн с право- и левокруговыми поляризациями в киральном метаматериале:

$$k_{R,L} = k_0 \left( \sqrt{\varepsilon_{s2} \frac{1 + 2\alpha\varepsilon_{x2}}{1 - \alpha\varepsilon_{x2}} \pm \frac{A\beta_0^2\omega}{c(\omega_0^2 - \omega^2)}} \right), \quad (11)$$

в которой резонансная частота  $\omega_0$  определяется формулой (6);  $k_0 = \omega/c$  – волновое число для плоской электромагнитной волны в вакууме.

## 2. Математическая модель метаматериала на основе N-заходных гаммадионов

Рассмотрим построение математической модели составного элемента на основе N-заходных гаммадионов, а также метаматериала на основе периодически распределенной матрицы таких элементов. Геометрия элемента и метаматериала показаны на рис. 2. Для простоты на рисунке изображены: 4-заходный гаммадион и метаматериал на основе двухзаходных гаммадионов.

Заходы (S-элементы) в структуре N-заходного гаммадиона отличаются друг от друга своими гео-

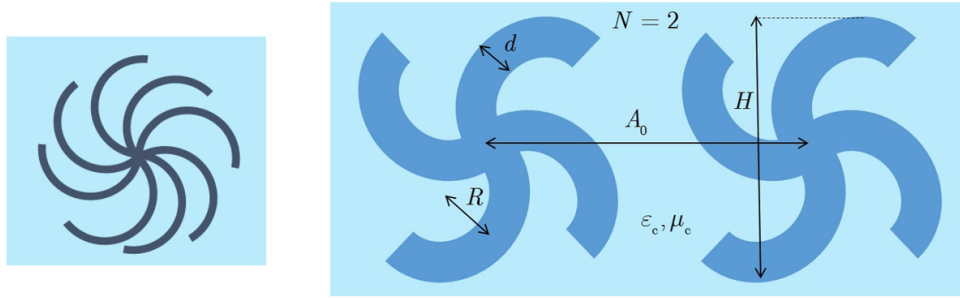


Рис. 2. Геометрия элемента и метаматериала  
 Fig. 2. The geometry of the element and metamaterial

метрическими параметрами. Однако при создании метаматериала на их основе все гаммадионы должны быть тождественными. Обозначим геометрические параметры  $i$ -го S-элемента в структуре гаммадиона через  $R_i$  – радиус;  $d_i$  – ширина металлической полоски;  $H_i$  – высота S-элемента.

Для расчета резонансной частоты составного элемента воспользуемся формулой Томсона (1), в которой теперь  $L$  – общая индуктивность N-заходного гаммадиона;  $C$  – общая емкость N-заходного гаммадиона.

Индуктивность и емкость N-заходного гаммадиона определяются следующим образом:

$$C = \sum_{i=1}^N C_i; \quad L = \prod_{i=1}^N L_i \left( \sum_{i=1}^N L_i \right)^{-1}, \quad (12)$$

где  $L_i$  – индуктивность  $i$ -го S-элемента;  $C_i$  – емкость  $i$ -го S-элемента ( $i = \overline{1, N}$ );  $N$  – общее число S-элементов в гаммадионе.

Емкость гаммадиона вычисляется как

$$C = C_9 + C_{мэ}, \quad (13)$$

то есть в виде суперпозиции емкостей самого гаммадиона и межэлементной емкости.

Собственная емкость гаммадиона рассчитывается как

$$C_9 = \epsilon_{c2} \frac{2\pi NRd}{h}, \quad (14)$$

где  $h$  – толщина контейнера метаматериала.

Межэлементная емкость определяется по формуле:

$$C_{мэ} = \epsilon_{c2} \frac{\pi NRd}{2A_0}, \quad (15)$$

где  $A_0$  – расстояние между центрами соседних гаммадионов.

В результате выражение для общей емкости N-заходного гаммадиона имеет вид:

$$C = 2\pi N \epsilon_{c2} R d \left( \frac{4A_0 + h}{4A_0 h} \right). \quad (16)$$

Индуктивность N-заходного гаммадиона определяется следующим соотношением:

$$L = \mu_{c2} \frac{2\sqrt{2}NR^2}{d}. \quad (17)$$

Формула для резонансной частоты N-заходного гаммадиона получается из соотношений (1), (16) и (17):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{c2}\mu_{c2}}} \frac{\sqrt{2A_0 h}}{NR\sqrt{\pi H(4A_0 + h)}}. \quad (18)$$

После вычисления резонансной частоты составного спирального элемента воспользуемся формулой Максвелла Гарнетта с учетом дисперсии (7), в которой  $\epsilon_2$  – относительная эффективная диэлектрическая проницаемость метаматериала на основе N-заходных гаммадионов;  $\epsilon_{s2}$  – относительная диэлектрическая проницаемость области, занятой гаммадионами;  $\alpha$  – объемная концентрация гаммадионов.

В результате выражения для эффективной диэлектрической проницаемости и параметра киральности метаматериала на основе N-заходных гаммадионов имеют следующий вид:

$$\epsilon_2 = \epsilon_{s2} \frac{1 + 2\alpha\epsilon_{x2}}{1 - \alpha\epsilon_{x2}}; \quad \epsilon_{x2} = \frac{\epsilon_{c2} - \epsilon_{s2}}{\epsilon_{c2} + 2\epsilon_{s2}}; \quad (19)$$

$$\epsilon_{s2}(\omega) = \epsilon_{c2} + \frac{\beta_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}; \quad \chi_2(\omega) = \frac{A\beta_0^2\omega}{c(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Волновые числа собственных волн метаматериала определяются формулой (10). Подставляя в соотношения (10) выражения (19), получаем соотношения для вычисления волновых чисел волн с право- и левокруговыми поляризациями в киральном метаматериале на основе N-заходных гаммадионов:

$$k_{R,L} = k_0 \left( \sqrt{\epsilon_{s2} \frac{1 + 2\alpha\epsilon_{x2}}{1 - \alpha\epsilon_{x2}} \pm \frac{A\beta_0^2\omega}{c(\omega_0^2 - \omega^2)}} \right). \quad (20)$$

Подставляя в формулу (20) выражение для резонансной частоты N-заходного гаммадиона (18),

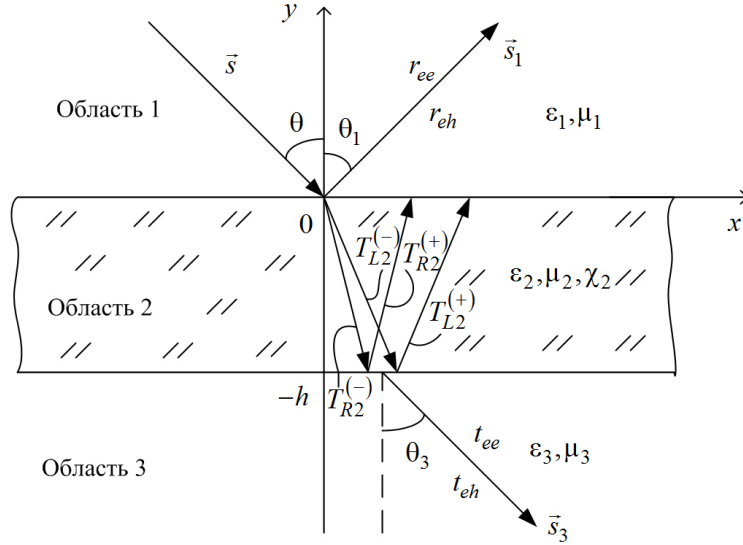


Рис. 3. Геометрия задачи  
Fig. 3. The geometry of the problem

получаем итоговые соотношения для волновых чисел волн с право- и левокруговыми поляризациями в метаматериале.

### 3. Задача об отражении волны от планарного слоя метаматериала

В качестве примера рассмотрим решение задачи о падении плоской электромагнитной волны Е-поляризации на планарный слой кирального метаматериала (на основе составных спиральных элементов или N-заходных гаммадионов), который является бесконечно протяженным вдоль оси Oz. Геометрия задачи приведена на рис. 3. На метаструктуру из диэлектрической области 1 ( $\epsilon_1$  и  $\mu_1$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости) под произвольным углом  $\theta$  падает плоская электромагнитная волна линейной перпендикулярной поляризации.

Область 2 представляет собой слой кирального метаматериала толщины  $h$  ( $\epsilon_2$  и  $\mu_2$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости;  $\chi_2$  – относительный параметр киральности). Область 3 представляет собой диэлектрик ( $\epsilon_3$  и  $\mu_3$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости).

Целью является получение выражений для коэффициентов отражения основной ( $r_{ee}$ ) и кросс-поляризованной ( $r_{eh}$ ) компонент поля в области 1, а также формул для коэффициентов прохождения основной ( $t_{ee}$ ) и кросс-поляризованной ( $t_{eh}$ ) компонент поля в области 3.

Киральная среда описывается следующими материальными уравнениями [3–6]:

$$\vec{D}^{(2)} = \epsilon_2(\omega) \vec{E}^{(2)} \mp i \chi_2(\omega) \vec{H}^{(2)}, \quad (21)$$

$$\vec{B}^{(2)} = \mu_2 \vec{H}^{(2)} \pm i \chi_2(\omega) \vec{E}^{(2)},$$

где верхние и нижние знаки определяют правую или левую форму киральных элементов. Соотношения (1) записаны в Гауссовой системе единиц.

Векторы напряженностей электрического и магнитного полей в слое из кирального метаматериала находятся из следующих дифференциальных уравнений [5]:

$$\nabla^2 \vec{E}^{(2)} + k_0^2 (\epsilon_2 \mu_2 + \chi_2^2) \vec{E}^{(2)} - 2ik_0^2 \mu_2 \chi_2 \vec{H}^{(2)} = 0; \quad (22)$$

$$\nabla^2 \vec{H}^{(2)} + k_0^2 (\epsilon_2 \mu_2 + \chi_2^2) \vec{H}^{(2)} + 2ik_0^2 \epsilon_2 \chi_2 \vec{E}^{(2)} = 0.$$

Векторы напряженностей электрического и магнитного полей в слое из кирального метаматериала представляются в виде суперпозиции полей волн с круговыми поляризациями [3]

$$\vec{E}^{(2)} = \vec{E}_R + \vec{E}_L; \quad \vec{H}^{(2)} = i \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} (\vec{E}_R - \vec{E}_L), \quad (23)$$

в результате чего получаются однородные уравнения Гельмгольца для циркулярнополяризованных волн:

$$\nabla^2 \vec{E}_{R,L} \pm k_{R,L}^2 \vec{E}_{R,L} = 0, \quad (24)$$

где  $\vec{E}_R$  – напряженность электрического поля волны с правой круговой поляризацией;  $\vec{E}_L$  – напряженность электрического поля волны с левой круговой поляризацией.

Решения уравнений (24) представляют собой совокупность двух волн, прошедших в киральный метаматериал, и двух волн, отраженных обратно в слой метаматериала от границы раздела с областью 3 [5; 11]:



$$E_z^{(2)} = T_R^{(-)} e^{-ik_R(\bar{s}_R, \bar{r})} + T_R^{(+)} e^{ik_R(\bar{s}_R, \bar{r})} + T_L^{(-)} e^{-ik_L(\bar{s}_L, \bar{r})} + T_L^{(+)} e^{ik_L(\bar{s}_L, \bar{r})}; \quad (25)$$

$$H_z^{(2)} = \frac{i}{\eta_2} \left[ T_R^{(-)} e^{-ik_R(\bar{s}_R, \bar{r})} + T_R^{(+)} e^{ik_R(\bar{s}_R, \bar{r})} - T_L^{(-)} e^{-ik_L(\bar{s}_L, \bar{r})} - T_L^{(+)} e^{ik_L(\bar{s}_L, \bar{r})} \right],$$

где  $\bar{s}_{R,L}^{(-)} = \{\sin \theta_{R,L}, -\cos \theta_{R,L}\}$  – орты, вдоль которых распространяются прошедшие в метаматериал волны;  $\bar{s}_{R,L}^{(+)} = \{\sin \theta_{R,L}, \cos \theta_{R,L}\}$  – орты, вдоль которых распространяются отраженные от области 3 волны;  $\theta_{R,L}$  – углы преломления волн с круговыми поляризациями;  $\eta^{(2)} = \sqrt{\mu_2/\epsilon_2}$  – импеданс кирального слоя;  $T_R^{(-)}$  и  $T_L^{(-)}$  – коэффициенты прохождения волн с круговыми поляризациями;  $T_R^{(+)}$  и  $T_L^{(+)}$  – коэффициенты отражения волн с круговыми поляризациями в слой метаматериала.

Составляющие векторов напряженностей электрического и магнитного полей в области 1 в случае падения плоской электромагнитной волны Е-поляризации имеют следующий вид:

$$E_z^{(1)} = e^{-ik_1(\bar{s}_r, \bar{r})} + r_{ee} e^{-ik_1(\bar{s}_r, \bar{r})};$$

$$H_x^{(1)} = -\frac{\cos \theta}{\eta^{(1)}} e^{-ik_1(\bar{s}_r, \bar{r})} + r_{ee} \frac{\cos \theta}{\eta^{(1)}} e^{-ik_1(\bar{s}_r, \bar{r})}; \quad (26)$$

$$H_z^{(1)} = r_{eh} e^{-ik_1(\bar{s}_r, \bar{r})};$$

$$E_x^{(1)} = -r_{eh} \eta^{(1)} \cos \theta e^{-ik_1(\bar{s}_r, \bar{r})},$$

где  $\bar{s}_r = \{\sin \theta, \cos \theta\}$  – орт, показывающий направление распространения отраженной волны в области 1;  $r_{ee}$  – коэффициент отражения основной компоненты;  $r_{eh}$  – коэффициент отражения кросс-поляризованной компоненты;  $k_1 = k_0 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$  – волновое число для плоской однородной волны в области 1;  $\eta^{(1)} = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$  – импеданс диэлектрической области 1.

Составляющие векторов напряженностей электрического и магнитного полей в области 3 в случае падения плоской электромагнитной волны Е-поляризации имеют следующий вид:

$$E_z^{(3)} = t_{ee} e^{-ik_3(\bar{s}_3, \bar{r})};$$

$$H_z^{(3)} = t_{eh} e^{-ik_3(\bar{s}_3, \bar{r})};$$

$$E_x^{(3)} = t_{eh} \eta^{(3)} \cos \theta_3 e^{-ik_3(\bar{s}_3, \bar{r})}; \quad (27)$$

$$H_x^{(3)} = -t_{ee} \frac{\cos \theta_3}{\eta^{(3)}} e^{-ik_3(\bar{s}_3, \bar{r})};$$

где  $\bar{s}_3 = \{\sin \theta_3, -\cos \theta_3\}$  – орт, показывающий направление распространения прошедшей волны в области 3;  $t_{ee}$  – коэффициент прохождения ос-

новной компоненты;  $t_{eh}$  – коэффициент прохождения кросс-поляризованной компоненты;  $\eta^{(3)} = \sqrt{\mu_3/\epsilon_3}$  – импеданс области 3;  $k_3 = k_0 \sqrt{\epsilon_3 \mu_3}$  – волновое число для плоской однородной волны в области 3.

На границах раздела выполняются следующие граничные условия для тангенциальных составляющих векторов напряженностей электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned} \bar{E}_\tau^{(1)}(y=0) &= \bar{E}_\tau^{(2)}(y=0); \\ \bar{H}_\tau^{(1)}(y=0) &= \bar{H}_\tau^{(1)}(y=0); \\ \bar{E}_\tau^{(2)}(y=-h) &= \bar{E}_\tau^{(3)}(y=-h); \\ \bar{H}_\tau^{(2)}(y=-h) &= \bar{H}_\tau^{(3)}(y=-h). \end{aligned} \quad (28)$$

После подстановки соотношений (25), (26) и (27) в граничные условия (28) получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\bar{A} \bar{T} = \bar{P}, \quad (29)$$

где  $\bar{A}$  – матрица  $8 \times 8$ , явный вид элементов которой не приводится в силу их значительного объема;

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} r_{ee} & r_{eh} & T_R^{(+)} & T_R^{(-)} & T_L^{(+)} & T_L^{(-)} & t_{ee} & t_{eh} \end{bmatrix};$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \cos \theta_1 / \eta^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из решения системы линейных алгебраических уравнений (29) определяются неизвестные коэффициенты отражения и прохождения основных и кросс-поляризованных компонент поля.

## 4. Численные результаты

### 4.1. Метаматериал на основе составных спиральных элементов

В качестве примера была рассмотрена структура на основе составного элемента, состоящего из 3 тонкопроволочных спиралей. Толщина слоя метаматериала – 0,05 м. Материал контейнера имеет относительную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_{c2} = 1,5$ . Параметры двух тонкопроволочных спиралей в составном элементе были идентичными:  $R_{1,2} = 0,01$  м,  $N_{1,2} = 3$ ,  $r_{1,2} = 0,002$  м,  $H_{1,2} = 0,05$  м,  $d_{1,2} = 0,05$  м; третья спираль отличалась от первых двух числом витков:  $R_3 = 0,01$  м,  $N_3 = 2$ ,  $r_3 = 0,002$  м,  $H_3 = 0,05$  м,  $d_3 = 0,05$  м. Области 1 и 3 представляли собой вакуум с  $\epsilon_{1,3} = \mu_{1,3} = 1$ . Падение волны на метаструктуру происходило по нормали:  $\theta = 0$ .

На рис. 4 представлены частотные зависимости модулей коэффициентов отражения основной ( $|r_{ee}|$  – сплошная линия) и кросс-поляризованной

компонент ( $|r_{eh}|$  – штриховая линия), а также коэффициентов прохождения основной ( $|t_{ee}|$  – сплошная линия) и кросс-поляризованной компонент ( $|t_{eh}|$  – штрихпунктирная линия) для метаматериала на основе составных элементов из 3 спиралей.

Как видно из рис. 4, уровень прохождения основной компоненты поля уменьшается с ростом частоты; уровни отражения и прохождения кросс-поляризованной компонент практически не изменяются во всем частотном интервале исследования. На частотах 3,8 и 6,9 ГГц имеются резкие минимумы модуля коэффициента прохождения основной компоненты.

На рис. 5 представлены частотные зависимости отраженной мощности основной ( $10\lg|r_{ee}|^2$  – сплошная линия) и кросс-поляризованной компонент ( $10\lg|r_{eh}|^2$  – штриховая линия), а также прошедшей мощности основной ( $10\lg|t_{ee}|$  – сплошная линия) и кросс-поляризованной компонент ( $10\lg|t_{eh}|^2$  – штрихпунктирная линия) для метаматериала на основе составных элементов из 3 спиралей.

Как видно из рис. 5, на частоте 6,9 ГГц структура не пропускает основную (падающую) компоненту электромагнитного поля при низких уровнях отражения основной компоненты, а также отражения и прохождения кросс-поляризованной компоненты. Такая ситуация соответствует преобразованию нормально падающего СВЧ-излучения в азимутальное рассеяние. Также можно заметить, что практически на всем частотном интервале исследования уровни отражения основной и прохождения кросс-поляризованной компоненты практически одинаковые, что связано с ярко выраженными поляризационно-селективными свойствами кирального метаматериала. На частоте 4,2 ГГц имеет место небольшой локальный максимум отражения кросс-поляризованной компоненты поля, а также ее прохождения.

Таким образом, как и для случая составного элемента из двух взаимортогональных спиралей [11], доказано, что существуют дискретные частоты, на которых происходит преобразование нормально падающего СВЧ-излучения линейной поляризации в азимутальное рассеяние. Как показали дополнительные исследования, для того, чтобы возникли подобные эффекты необходимо, чтобы либо число спиралей в составном элементе было нечетным, либо при четном числе спиралей необходимо, чтобы они отличались друг от друга геометрическими параметрами.

## 4.2. Метаматериал на основе N-заходных гаммадионов

В этом случае была рассмотрена структура на основе трехзаходного гаммадиона. Толщина слоя метаматериала – 0,05 м. Материал контейнера имеет относительную диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_{c2} = 1,5$ . Параметры гаммадиона:  $R = 0,01$  м,  $N = 3$ ,  $d = 0,02$  м,  $H = 0,05$  м. Области 1 и 3 представляли собой вакуум с  $\epsilon_{1,3} = \mu_{1,3} = 1$ . Падение волны на метаструктуру происходило по нормали:  $\theta = 0$ .

На рис. 6 представлены частотные зависимости модулей коэффициентов отражения основной ( $|r_{ee}|$  – сплошная линия) и кросс-поляризованной компонент ( $|r_{eh}|$  – штриховая линия), а также коэффициентов прохождения основной ( $|t_{ee}|$  – сплошная линия) и кросс-поляризованной компонент ( $|t_{eh}|$  – штрихпунктирная линия) для метаматериала на основе совокупности 3-заходных гаммадионов.

Как видно из рис. 6, уровень прохождения основной компоненты поля уменьшается с ростом частоты; уровни отражения и прохождения кросс-поляризованной компонент практически не изменяются во всем частотном интервале исследования, аналогично как и для случая составного спирального элемента. На частотах 3,4 и 3,9 ГГц имеются резкие минимумы модуля коэффициента прохождения основной компоненты, по величине более «глубокие», чем в случае метаматериала на основе составных спиральных элементов.

На рис. 7 представлены частотные зависимости отраженной мощности основной ( $10\lg|r_{ee}|^2$  – сплошная линия) и кросс-поляризованной компонент ( $10\lg|r_{eh}|^2$  – штриховая линия), а также прошедшей мощности основной ( $10\lg|t_{ee}|^2$  – сплошная линия) и кросс-поляризованной компонент ( $10\lg|t_{eh}|^2$  – штрихпунктирная линия) для метаматериала на основе совокупности 3-заходных гаммадионов.

Как видно из рис. 7, на частоте 3,4 ГГц структура не пропускает основную (падающую) компоненту электромагнитного поля при низких уровнях отражения и прохождения кросс-поляризованной компоненты. Однако степень преобразования мощности падающей СВЧ-волны в азимутальное рассеяние меньше, чем для случая метаматериала на основе составных спиральных элементов, так как на этой частоте возрастает уровень отражения основной компоненты поля.

Такая ситуация соответствует преобразованию нормально падающего СВЧ-излучения в азимутальное рассеяние. Также можно заметить, что

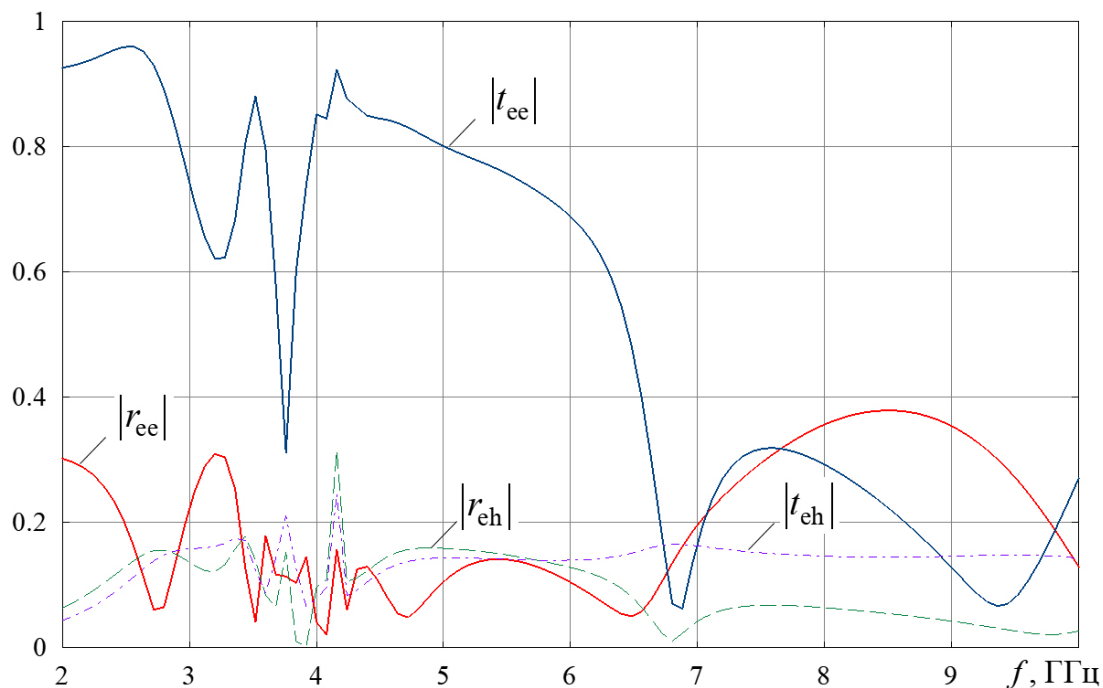


Рис. 4. Частотные зависимости модулей коэффициентов отражения и прохождения для метаматериала на основе составных элементов из 3 спиралей

Fig. 4. Frequency dependences of the moduli of reflection and transmission coefficients for a metamaterial based on constituent elements of 3 spirals

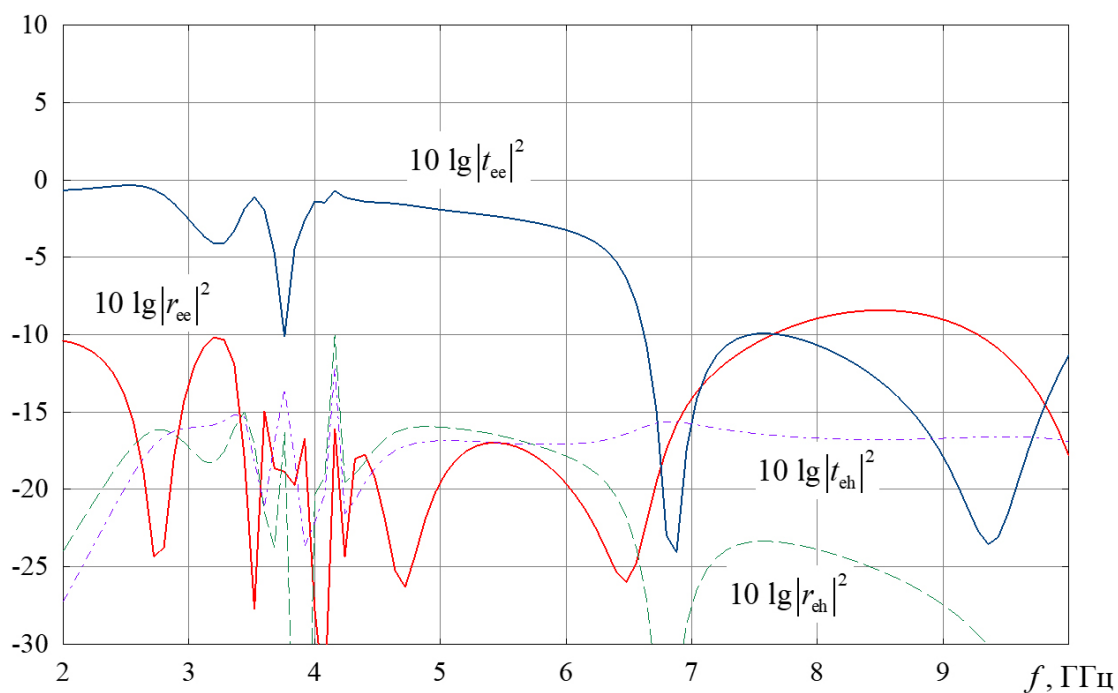
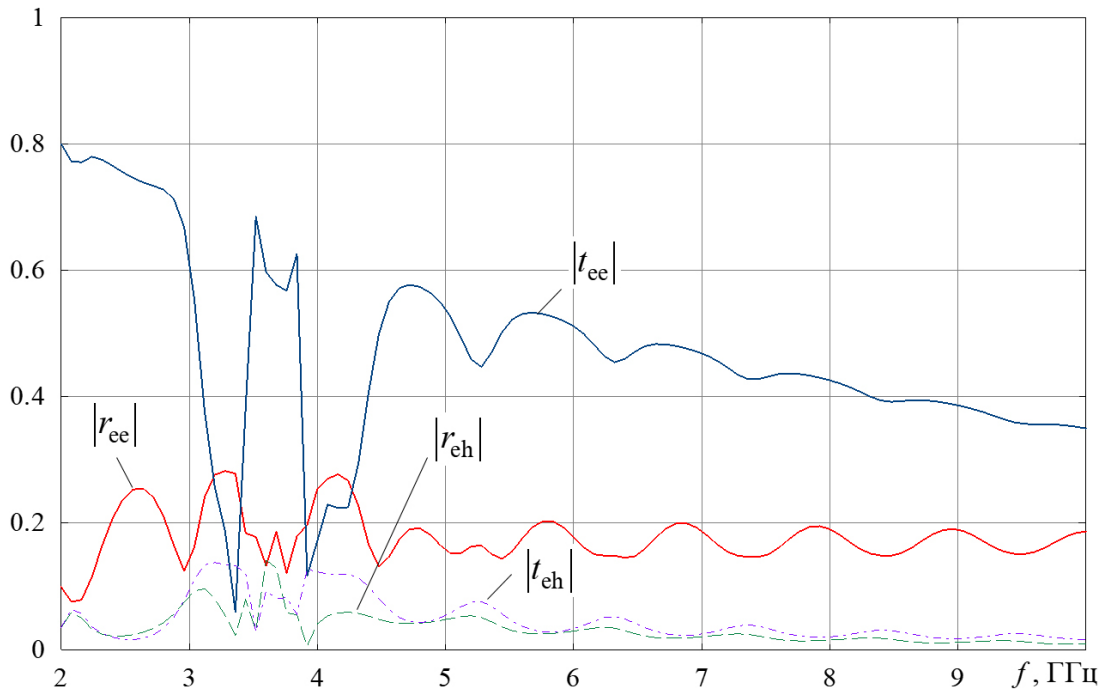


Рис. 5. Частотные зависимости прошедшей и отраженной мощностей для метаматериала на основе составных элементов из 3 спиралей

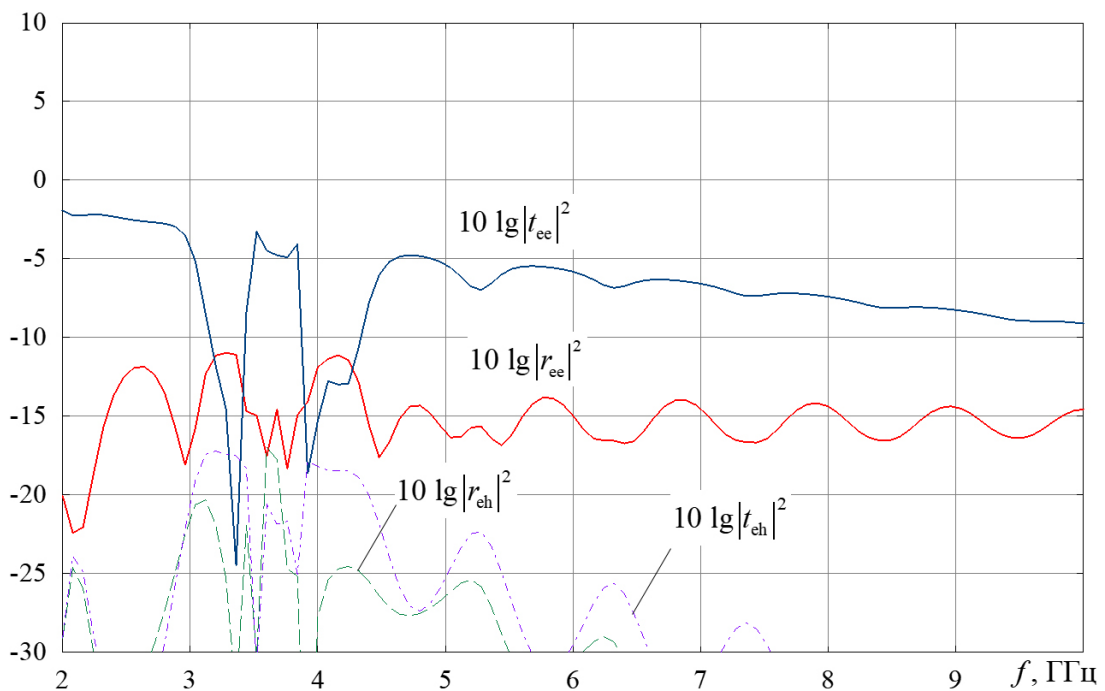
Fig. 5. Frequency dependences of the transmitted and reflected powers for a metamaterial based on constituent elements of 3 spirals





**Рис. 6.** Частотные зависимости модулей коэффициентов отражения и прохождения для метаматериала на основе 3-заходных гаммадионов

**Fig. 6.** Frequency dependences of the reflection and transmission coefficient modules for metamaterial based on 3 input gamadions



**Рис. 7.** Частотные зависимости прошедшей и отраженной мощностей для метаматериала на основе 3-заходных гаммадионов

**Fig. 7.** Frequency dependences of past and reflected powers for metamaterial based on 3 input gamadions

вблизи резонансной частоты в диапазоне от 3 до 4 ГГц уровни отражения и прохождения кросс-поляризованной компоненты поля сравнимы по величине с основной компонентой. С ростом частоты уровень прохождения основной компоненты снижается, но значительно меньше, чем в случае метаматериала на основе составных спиральных элементов. Также с ростом частоты уменьшаются уровни отражения и прохождения кросс-поляризованной компоненты поля. Таким образом, для случая метаматериала на основе N-заходных гаммадионов на частотах вдали от резонанса уровень кросс-поляризации значительно меньше, чем для метаматериала на основе составных спиральных элементов. Этот факт объясняется тем, что спирали относятся к трехмерным киральным элементам, в то время как гаммадионы – к двумерным, в которых, как известно, степень киральности на порядок ниже. Однако интересным, на наш взгляд, является тот факт, что даже в метаматериале на основе двумерных гаммадионов удалось получить частотно-селективный эффект преобразования нормально падающего СВЧ-излучения в азимутальное рассеяние в плоскости слоя.

Также было доказано, что метаструктура на основе N-заходных гаммадионов является искус-

ственной брэгговской решеткой в оптическом диапазоне, так как длины волн резонансных минимумов ослабления прошедшей мощности основной компоненты поля подчиняются условию Вульфа – Брэгга:

$$2d\sqrt{(\varepsilon_2\mu_2 - \chi_2^2) - \cos^2\theta} = v\lambda, \quad (20)$$

где  $v$  – порядок резонанса;  $\lambda$  – длина волны;  $\theta$  – угол падения волны.

## Заключение

В работе были построены математические модели метаматериалов на основе равномерно распределенной совокупности составных спиральных элементов и многозаходных гаммадионов с учетом дисперсии их материальных параметров. В результате решения задачи об отражении плоской электромагнитной волны линейной поляризации от планарных слоев из указанных метаматериалов показано, что структуры обладают ярко выраженными частотно-селективными свойствами. Обнаружены частотные режимы, в которых метаматериалы позволяют преобразовывать нормально падающее электромагнитное излучение СВЧ в азимутальное рассеяние.

## Список литературы

1. Capolino F. *Theory and Phenomena of Metamaterials*. Boca Raton: Taylor & Francis – CRC Press, 2009. 992 p.
2. Engheta N., Ziolkowski R.W. *Metamaterials: Physics and Engineering Explorations*. Hoboken: Wiley, 2006. 414 p.
3. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media* / I.V. Lindell [et al.]. London: Artech House, 1994. 291 p.
4. Lakhtakia A., Varadan V.K., Varadan V.V. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields in Chiral Media*. Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 121 p.
5. Неганов В.А., Осипов О.В. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами. М.: Радио и связь, 2006. 280 с.
6. Третьяков С.А. Электродинамика сложных сред: киральные, биизотропные и некоторые бианизотропные материалы // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39. № 10. С. 1457–1470.
7. Lakhtakia A. On the Maxwell-Garnett model of chiral composites // *Journal of Materials Research*. 1993. Vol. 8. № 4. P. 917–922. DOI: <https://doi.org/10.1557/JMR.1993.0917>.
8. Artificial Tellegen particle / S.A. Tretyakov [et al.] // *Electromagnetics*. 2003. Vol. 23. № 8. P. 665–680. DOI: <https://doi.org/10.1080/02726340390244789>.
9. Prosvirnin S., Zheludev N. Polarization effects in diffraction of light on a planar chiral structure // *Phys. Rev. E*. 2005. Vol. 71. № 3. P. 037603. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.037603>.
10. Осипов О.В., Плотников А.М., Салимова Н.Р. Использование эффекта азимутального рассеяния электромагнитных волн метаструктурой на основе элементов Телледжена в прикладных задачах электродинамики // *Инфокоммуникационные технологии*. 2012. Т. 10. № 1. С. 8–15.
11. Исследование электромагнитных характеристик кирального метаматериала на основе тонкопроволочных идеально проводящих элементов в виде взаимно ортогональных спиралей / Д.С. Клюев [и др.] // *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*. 2017. Т. 20. № 1. С. 4–10. URL: <https://journals.ssau.ru/index.php/pwp/article/view/7101>.
12. Semchenko I.V., Tretyakov S.A., Serdyukov A.N. Research on chiral and bianisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years // *Progress in Electromagnetics Research*. 1996. Vol. 12. P. 335–370. URL: <http://www.jpier.org/PIER/pier.php?paper=941128>.

## References

1. Capolino F. *Theory and Phenomena of Metamaterials*. Boca Raton: Taylor & Francis – CRC Press, 2009, 992 p.
2. Engheta N., Ziolkowski R.W. *Metamaterials: Physics and Engineering Explorations*. Hoboken: Wiley, 2006, 414 p.

3. Lindell I.V. et al. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media*. London: Artech House, 1994, 291 p.
4. Lakhtakia A., Varadan V.K., Varadan V.V. *Time-Harmonic Electromagnetic Fields in Chiral Media. Lecture Notes in Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1989, 121 p.
5. Neganov V.A., Osipov O.V. *Reflective, Waveguide and Radiating Elements with Chiral Structure*. Moscow: Radio i svjaz', 2006, 280 p. [In Russian].
6. Tret'jakov S.A. Electrodynamics complex media: chiral, biizotropnye and some materials bianisotropic. *Radiotekhnika i elektronika*, 1994, vol. 39, no. 10, pp. 1457–1470. (In Russ.)
7. Lakhtakia A. On the Maxwell-Garnett model of chiral composites. *Journal of Materials Research*, 1993, vol. 8, no. 4, pp. 917–922. DOI: <https://doi.org/10.1557/JMR.1993.0917>.
8. Tretyakov S.A. et al. Artificial Tellegen particle. *Electromagnetics*, 2003, vol. 23, no. 8, pp. 665–680. DOI: <https://doi.org/10.1080/02726340390244789>.
9. Prosvirnin S., Zheludev N. Polarization effects in diffraction of light on a planar chiral structure. *Phys. Rev. E*, 2005, vol. 71, no. 3, pp. 037603. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.037603>.
10. Osipov O.V., Plotnikov A.M., Salimova N.R. Using the azimuthal scattering effect of electromagnetic waves on the basis of meta-elements in Telledzhena application problems of electrodynamics. *Infokommunikatsionnye tehnologii*, 2012, vol. 10, no. 1, pp. 8–15. [In Russian].
11. Kljuev D.S. et al. Investigation electromagnetic characteristics chiral metamaterial-based thin-wire perfectly conducting elements in the form of mutually orthogonal coils. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*, 2017, vol. 20, no. 1, pp. 4–10. URL: <https://journals.ssau.ru/index.php/pwp/article/view/7101>. (In Russ.)
12. Semchenko I.V., Tretyakov S.A., Serdyukov A.N. Research on chiral and bianisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years. *Progress in Electromagnetics Research*, 1996, vol. 12, pp. 335–370. URL: <http://www.jpier.org/PIER/pier.php?paper=941128>.

---

## Physics of Wave Processes and Radio Systems

2020, vol. 23, no. 1, pp. 8–19

DOI 10.18469/1810-3189.2020.23.1.8-19

Received 10 January 2020  
Accepted 14 February 2020

### Mathematical models of chiral metamaterials based on multi-turned conductive elements

M.V. Aralkin<sup>1</sup>, A.N. Dement'ev<sup>2</sup>, O.V. Osipov<sup>3</sup>

<sup>1</sup> The Military Academy of Strategic Rocket Troops after Peter the Great  
8, Karbysheva Street,  
Balashiha, Moscow Region, 143900, Russia

<sup>2</sup> MIREA – Russian Technological University  
78, Vernadsky Avenue,  
Moscow, 119454, Russia

<sup>3</sup> Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics  
23, L. Tolstoy Street,  
Samara, 443010, Russia

*Abstract* – The paper considers mathematical models of metamaterials based on a combination of multi-turned conductive elements, such as helices and gammadions. Analytical expressions are obtained for the resonant frequencies of these elements and relations for material parameters are determined using by the Maxwell Garnett model taking into account the metamaterials dispersion. The propagation constants of circular polarizations waves in these metamaterials are determined. As an example of the constructed mathematical models using, the solution of the problem of reflection of a plane linearly polarized electromagnetic wave from a planar layer of metamaterial, which is a matrix of fine-wire perfectly conducting elements in the form of N mutually orthogonal spirals is considered. The problem was solved by the partial domains method and its solution was reduced to a system of linear algebraic equations for unknown reflection and transmission coefficients of the main and cross-polarized field components. As a result of mathematical modeling, the frequency and polarization-selective properties of investigated metamaterials were revealed.

*Keywords* – chiral media, metamaterial, metastructure, helix element, gammadion, spatial dispersion, frequency selectivity, polarization selectivity, Maxwell Garnett model.

---

## Информация об авторах

**Аралкин Михаил Вячеславович**, 1974 г. р., техник кафедры № 28 Военной академии Ракетных войск стратегического назначения имени Петра Великого. Окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 1999 г., инженер-разработчик по специальности «ракетостроение».

*Область научных интересов:* электродинамика метаматериалов, антенны и устройства СВЧ, нелинейная оптика.

*E-mail:* aralkin\_mv@inbox.ru

**Дементьев Андрей Николаевич**, 1975 г. р., доктор технических наук, доцент кафедры радиоволновых процессов и технологий Института радиотехнических и телекоммуникационных систем МИРЭА – Российский технологический университет.

*Область научных интересов:* электродинамика метаматериалов, антенны и устройства СВЧ, нелинейная оптика.

*E-mail:* dementev\_2001@mail.ru

**Осипов Олег Владимирович**, доктор физико-математических наук, проректор по науке и инновациям Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики (г. Самара).

*Область научных интересов:* электродинамика метаматериалов, антенны и устройства СВЧ, нелинейная оптика.

*E-mail:* o.osipov@psuti.ru

## Information about the Authors

**Mikhail V. Aralkin** was born in 1974, Technician of the Department No. 28, the Military Academy of Strategic Rocket Troops after Peter the Great, Balashiha, Moscow Region, Russia. He graduated from Moscow State Technical University N.E. Bauman in 1999 as a development engineer specializing in rocket science.

*Research interests:* electrodynamics of metamaterials, antennas and microwave devices, nonlinear optics.

*E-mail:* aralkin\_mv@inbox.ru

**Andrei N. Dement'ev** was born in 1975, Doctor of Sciences in Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Radio Wave Processes and Technologies, Institute of Radio Engineering and Telecommunication Systems, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia.

*Research interests:* electrodynamics of metamaterials, antennas and microwave devices, nonlinear optics.

*E-mail:* dementev\_2001@mail.ru

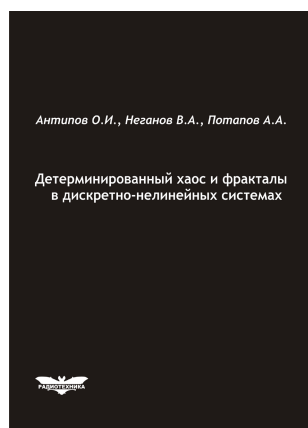
**Oleg V. Osipov**, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Vice-Rector for Science and Innovations of the Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

*Research interests:* electrodynamics of metamaterials, antennas and microwave devices, nonlinear optics.

*E-mail:* o.osipov@psuti.ru

**Антипов, О.И.**

**Детерминированный хаос и фракталы в дискретно-нелинейных системах** / О.И. Антипов, В.А. Неганов, А.А. Потапов. – М.: Радиотехника, 2009. – 235 с., ил.



ISBN 978-5-88070-237-4

УДК 530.1:621.372+621.396

ББК 32.96

В монографии рассмотрены явления детерминированного хаоса и фрактальности в дискретно-нелинейных системах на примере устройств импульсной силовой электроники, приведены некоторые основные определения современной нелинейной динамики и некоторые математические методы целочисленных и дробных мер.

Представленные явления стохастической работы могут наблюдаться в широком классе систем с переменной структурой, действие которых может быть описано системами дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, скачкообразно меняющими свои значения с течением времени в зависимости от состояния системы. Объектами исследования явились импульсные стабилизаторы напряжения различных типов и структур. Научной новизной является применение как фрактальных, так и мультифрактальных мер детерминированного хаоса к анализу стохастической работы импульсных стабилизаторов.

*Для специалистов, интересующихся проблемами детерминированного хаоса, численным моделированием дискретно-нелинейных систем.*