2019 г. *Том 22, № 3*

Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 621.391.1: 621.395
DOI 10.18469/1810-3189.2019.22.3.49-54

Дата поступления: 18.09.2019
Дата принятия: 25.09.2019

Анализ системы с экспоненциальным и гиперэрланговским распределениями методом спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли

В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, О. Када

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Российская Федерация, г. Самара
ул. Л. Толстого, 23

В работе получено спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для системы массового обслуживания с пуассоновским входным потоком требований и гиперэрланговским распределением времени обслуживания. На его основе выведена расчетная формула для среднего времени ожидания в очереди для этой системы в замкнутой форме. Как известно, все остальные характеристики системы массового обслуживания являются производными от среднего времени ожидания. Полученная расчетная формула дополняет и расширяет известную формулу Полячека – Хинчина в теории массового обслуживания для систем M/G/1. В теории массового обслуживания исследования частных систем типа M/G/1 актуальны в связи с тем, что они до сих пор активно используются в современной теории телетрафика.

Ключевые слова: гиперэрланговский закон распределения, интегральное уравнение Линдли, метод спектрального разложения, преобразование Лапласа.

Введение

Данная работа посвящена анализу системы массового обслуживания (СМО) $M/HE_2/1$ с пуассоновским входным потоком требований и гиперэрланговским распределением 2-го порядка времени обслуживания в системе. Как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания является основной характеристикой для любых СМО. По этой характеристике оценивают задержки пакетов в сетях пакетной коммутации при моделировании телетрафика с помощью СМО. Рассматриваемая СМО $M/HE_2/1$ по трехпозиционной символике Кендалла для их классификации A/B/K относится к типу M/G/1.

В теории массового обслуживания исследования систем M/G/1 актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика, хотя необходимо заметить, что при моделировании активного сетевого оборудования с ограниченным буфером системы с неограниченным временем ожидания могут быть использованы только в первом приближении.

Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) в исследовании систем M/G/1 и G/G/1 играет важную роль, и большинство результатов в теории массового обслуживания получены именно с помощью данного метода. Одна из форм ИУЛ выглядит так [1]:

$$W(y)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{y} W(y-u)\,dC(u), & y\ge 0;\\ 0, & y<0,\end{cases}$$

где $W(y)$ – функция распределения вероятностей (ФРВ) времени ожидания требования в очереди; $C(u)=P(\tilde{u}<u)$ – ФРВ случайной величины $\tilde{u}=\tilde{x}-\tilde{t}$, где, в свою очередь, $\tilde{x}$ – случайное время обслуживания требования; $\tilde{t}$ – случайная величина – интервал времени между поступлениями требований.

При кратком изложении метода решения уравнения Линдли будем придерживаться подхода и символики автора [1]. Для этого через $A^*(s)$ и $B^*(s)$ обозначим преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов между поступлениями и времени обслуживания соответственно. Суть решения интегрального уравнения Линдли методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения $A^*(-s)B^*(s)-1$ представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от s. Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо следующее спектральное разложе-

✉ tarasov-vn@psuti.ru (*Тарасов Вениамин Николаевич*)

ние: $A^*(-s)B^*(s)-1=\psi_+(s)/\psi_-(s)$, где $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ – некоторые рациональные функции от s, которые можно разложить на множители. Функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны удовлетворять следующим условиям, согласно [1]:

1. Для $\mathrm{Re}(s)>0$ функция $\psi_+(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости;
2. Для $\mathrm{Re}(s)<D$ функция $\psi_-(s)$ является аналитической без нулей в этой полуплоскости, где D – некоторая положительная константа, определяемая из условия: $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{a(t)}{e^{-Dt}}<\infty$. (1)

Кроме того, функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ должны обладать следующими свойствами:

$$\lim_{|s|\to\infty,\mathrm{Re}(s)>0}\frac{\psi_+(s)}{s}=1;\qquad \lim_{|s|\to\infty,\mathrm{Re}(s)<D}\frac{\psi_-(s)}{s}=-1. \tag{2}$$

1. Постановка задачи

В работе ставится задача нахождения решения для среднего времени ожидания требований в очереди в СМО M/HE$_2$/1 с экспоненциальным (M) и гиперэрланговским (HE$_2$) входными распределениями с использованием классического метода спектрального разложения решения ИУЛ. Для других систем применение этого метода рассмотрено в [3–7]. Вопросы аппроксимации законов распределений подробно освещены в [8–10], а новые исследования по системам массового обслуживания приведены в [11–14].

2. Решение задачи для системы M/HE$_2$/1

Рассмотрим СМО M/HE$_2$/1, для которой законы распределения входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности:

$$a(t)=\lambda e^{-\lambda t}, \tag{3}$$

$$b(t)=4q\mu_1^2te^{-2\mu_1t}+4(1-q)\mu_2^2te^{-2\mu_2t}. \tag{4}$$

Запишем преобразования Лапласа функций (3) и (4):

$$A^*(s)=\frac{\lambda}{s+\lambda};$$

$$B^*(s)=q\left(\frac{2\mu_1}{s+2\mu_1}\right)^2+(1-q)\left(\frac{2\mu_2}{s+2\mu_2}\right)^2.$$

В этом случае выражение для спектрального разложения решения ИУЛ примет следующий вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=\left(\frac{\lambda}{\lambda-s}\right)\times \left[q\left(\frac{2\mu_1}{s+2\mu_1}\right)^2+(1-q)\left(\frac{2\mu_2}{s+2\mu_2}\right)\right]-1. \tag{5}$$

Представив выражение, стоящее в квадратных скобках, в виде:

$$\left[q\left(\frac{2\mu_1}{s+2\mu_1}\right)^2+(1-q)\left(\frac{2\mu_2}{s+2\mu_2}\right)^2\right]= =\frac{b_0+b_1s+b_2s^2}{(s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2},$$

где промежуточные параметры $b_0=16\mu_1^2\mu_2^2$; $b_1= =16\mu_1\mu_2[q\mu_1+(1-q)\mu_2]$; $b_2=4[q\mu_1^2+(1-q)\mu_2^2]$, продолжая спектральное разложение (5), получим

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=\frac{1}{(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2(\lambda-s)}\times \left(\lambda(b_0+b_1s+b_2s^2)-(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2(\lambda-s)\right)=$$
$$=\frac{s(s^4+d_3s^3+d_2s^2+d_1s+d_0)}{(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2(\lambda-s)}=\frac{s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}{(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2(\lambda-s)}.$$

Коэффициенты многочлена четвертой степени в числителе разложения, найденные с помощью символьных операций Mathcad, имеют вид:

$$d_0=b_1\lambda+16\mu_1\mu_2[\mu_1\mu_2-\lambda(\mu_1+\mu_2)],$$
$$d_1=16\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)- -4\lambda(\mu_1^2+4\mu_1\mu_2+\mu_2^2)+b_2\lambda,$$
$$d_2=4(\mu_1^2+\mu_2^2)+16\mu_1\mu_2-4\lambda(\mu_1+\mu_2),$$
$$d_3=4(\mu_1+\mu_2)-\lambda,$$

и положительны в случае стабильной системы. Многочлен четвертой степени

$$s^4+d_3s^3+d_2s^2+d_1s+d_0 \tag{6}$$

с положительными коэффициентами имеет четыре действительных отрицательных корня либо два действительных отрицательных корня и два комплексно сопряженных корня с отрицательными вещественными частями. Тогда окончательно спектральное разложение решения ИУЛ для системы M/HE$_2$/1 имеет вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=\frac{s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}{(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2(\lambda-s)}, \tag{7}$$

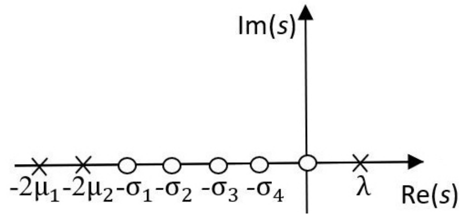

Рис. Нули и полюсы функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$ для системы M/HE$_2$/1

где через $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_4$ обозначены для удобства отрицательные корни многочлена (6). На рисунке показана комплексная s – плоскость с нулями и полюсами функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$, где полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками. Нули и полюсы нужны для построения функций $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ в отдельности.

Далее с учетом условий спектрального разложения (1), (2) строим функции $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$:

$$\psi_+(s) = \frac{s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}{(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2},$$

$$\psi_-(s) = \lambda - s.$$

Константа спектрального разложения

$$K = \lim_{s\to 0}\frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}{(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2} = \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}{16\mu_1^2\mu_2^2}.$$

Эта константа определяет вероятность того, что поступающее в систему требование застает ее свободной.

Далее по методике спектрального разложения строим функцию

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}{16\mu_1^2\mu_2^2 s(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}.$$

Отсюда преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания $W^*(s) = s\Phi_+(s)$ будет:

$$W^*(s) = \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4(2\mu_1+s)^2(2\mu_2+s)^2}{16\mu_1^2\mu_2^2(s+\sigma_1)(s+\sigma_2)(s+\sigma_3)(s+\sigma_4)}, \qquad (8)$$

а среднее время ожидания $\overline{W} = -\dfrac{dW^*(s)}{ds}$ будет равно

$$\overline{W} = \frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_2}+\frac{1}{\sigma_3}+\frac{1}{\sigma_4}-\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}. \qquad (9)$$

Преобразование Лапласа (8) позволяет кроме среднего времени ожидания находить также и моменты высшего порядка времени ожидания. С учетом определения вариации задержки – джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения [15], тем самым получим возможность определения джиттера через дисперсию времени ожидания.

Для того чтобы воспользоваться формулой (9) для расчетов среднего времени ожидания, необходимо задать входные параметры, в качестве которых используем значения начальных моментов первого порядка интервалов поступлений и времени обслуживания, а также их коэффициентов вариаций $\overline{\tau}_\lambda,\ \overline{\tau}_\mu,\ c_\lambda,\ c_\mu$. С помощью этих входных параметров необходимо определить методом моментов неизвестные параметры распределений (3) и (4) $\lambda,\ q,\ \mu_1,\ \mu_2$, а затем коэффициенты многочлена (6).

Для этого воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем начальные моменты до второго порядка для распределения (4):

$$\overline{\tau}_\mu = \frac{q}{\mu_1}+\frac{(1-q)}{\mu_2}, \quad \overline{\tau_\mu^2} = \frac{3}{2}\left[\frac{q}{\mu_1}+\frac{(1-q)}{\mu_2}\right]. \qquad (10)$$

Рассматривая равенства (10) как форму записи метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (3) $\mu_1,\ \mu_2,\ q$. Система двух уравнений (10) при этом является не доопределенной, поэтому к ней добавим выражение для квадрата коэффициента вариации:

$$c^2 = \frac{\overline{\tau_\mu^2}-(\overline{\tau}_\mu)^2}{(\overline{\tau}_\mu)^2}, \qquad (11)$$

как связующее условие между (10). Кроме того, коэффициент вариации будем использовать в расчетах в качестве входного параметра системы. Исходя из вида уравнений (10), положим

$$\mu_1 = 2q/\overline{\tau}_\mu, \quad \mu_2 = 2(1-q)/\overline{\tau}_\mu. \qquad (12)$$

Подставив выражения (10) вместе с частным решением (12) в (11), получим уравнение четвертой степени относительно параметра q:

$$q(1-q)[8(1+c_\mu^2)q^2 - 8(1+c_\mu^2)q + 3] = 0.$$

Отбросив тривиальные решения $q = 0$ и $q = 1$, получим квадратное уравнение $8(1+c_\mu^2)q^2 - 8(1+c_\mu^2)q + 3 = 0$, корни которого равны

$$q = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{2(1+c_\mu^2)-3}{8(1+c_\mu^2)}}.$$

Для однозначности выберем больший корень

$$q=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2(1+c_\mu^2)-3}{8(1+c_\mu^2)}}. \qquad (13)$$

Подставив значение вероятности q, определенное (13) в (12), найдем параметры μ_1, μ_2. Остается определить коэффициенты многочлена (6), найти его корни и воспользоваться расчетной формулой (9) для среднего времени ожидания. Теперь полученный результат (9) необходимо сопоставить с известной формулой Полячека – Хинчина.

В связи с тем что данная система M/HE$_2$/1 относится к классу систем M/G/1, рассмотрим известный результат для данной системы.

Среднее время ожидания в системе M/G/1 дается формулой Полячека – Хинчина [1]:

$$\bar{W}=\frac{\lambda\overline{\tau_м^2}}{2(1-\rho)},$$

где коэффициент загрузки $0<\rho=\lambda/\mu<1$.

Для распределения HE$_2$ $\overline{\tau_\mu^2}=\frac{3}{2}\left[\frac{q}{\mu_1^2}+\frac{(1-q)}{\mu_2^2}\right]$ (см. выражение (10)), подставив сюда значения параметров q, μ_1, μ_2, полученные по выражениям (12), (13), получим среднее время ожидания в системе M/HE$_2$/1 по формуле Полячека – Хинчина.

Многочисленные эксперименты с выражением (9) подтверждают полную идентичность двух разных результатов по системе M/HE$_2$/1.

3. Результаты вычислительных экспериментов

Ниже в таблице приведены данные расчетов для системы M/HE$_2$/1 для случаев малой, средней и высокой нагрузки $\rho=0.1$; 0.5; 0.9. Коэффициент загрузки ρ в обеих таблицах определяется отношением средних интервалов $\rho=\bar{\tau}_\mu/\bar{\tau}_\lambda$. Расчеты, приведенные в таблице, проведены для нормированного времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu=1$. Данные таблицы хорошо согласуются с результатами двухмоментной аппроксимации [16] в той области изменения параметров, в которой рассмотренная система применимы.

Таблица
Результаты экспериментов для СМО M/HE$_2$/1

Входные параметры		Среднее время ожидания
ρ	c_μ	для системы M/HE$_2$/1
0.1	0.71	0.09
	2	0.28
	4	0.94
	8	3.61
0.5	0.71	0.75
	2	2.50
	4	8.50
	8	32.50
0.9	0.71	6.77
	2	22.50
	4	76.50
	8	292.50

Заключение

Таким образом, по результатам работы можно сделать следующие выводы:

Научная новизна результатов заключается в том, что получено спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемой системы и с его помощью выведена расчетная формула для среднего времени ожидания в очереди для этой системы в замкнутой форме. Данные численных экспериментов подтверждают полную адекватность полученных теоретических результатов.

Практическое значение работы заключается в том, что полученные результаты с успехом могут быть применены в современной теории телетрафика, где задержки пакетов входящего трафика играют первостепенную роль. Для этого необходимо знать числовые характеристики интервалов входящего трафика и времени обслуживания на уровне двух первых моментов, что не вызывает трудностей при использовании современных анализаторов трафика [9; 10].

Список литературы

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / пер. с англ. под ред. В.И. Неймана. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
2. Brännström N. A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems: master's thesis applied to HS-DSCH. Lulea University of Technology, 2004. 79 p.
3. Тарасов В.Н. Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями // Проблемы передачи информации. 2016. № 1. С. 16–26.
4. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Липилина Л.В. Математическая модель телетрафика на основе системы G/M/1 и результаты вычислительных экспериментов // Информационные технологии. 2016. Т. 22. № 2. С. 121–126.

5. Тарасов В.Н., Карташевский И.В. Способы аппроксимации входных распределений для системы G/G/1 и анализ полученных результатов // Системы управления и информационные технологии. 2015. № 3. С. 182–185.

6. Тарасов В.Н., Горелов Г.А., Ушаков Ю.А. Восстановление моментных характеристик распределения интервалов между пакетами входящего трафика // Инфокоммуникационные технологии. 2014. № 2. С. 40–44.

7. Тарасов В.Н. Вероятностное компьютерное моделирование сложных систем. Самара: СНЦ РАН, 2002. 194 с.

8. Алиев Т.И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 2 (84). С. 88–93.

9. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress. Copenhagen, Denmark. 19–26 June 1991. P. 683–688.

10. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods // Operation Research. 1982. Vol. 30. № 1. P. 125–147.

11. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues // Queueing Systems. 2016. Vol. 84. № 1–2. P. 145–202.

12. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times // Queueing Systems. 2018. Vol. 89. № 3–4. P. 213–241.

13. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates // Queueing Systems. 2018. Vol. 89. № 3–4. P. 269–301.

14. Demichelis C., Chimento P. IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics. URL: https://tools.ietf.org/html/rfc3393 (дата обращения: 26.02.2019).

15. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Обобщенная двумерная диффузионная модель массового обслуживания типа GI/G/1 // Телекоммуникации. 2009. № 7. С. 2–8.

16. Тарасов В.Н., Малахов С.В., Карташевский И.В. Теоретическое и экспериментальное исследование задержки в программно-конфигурируемых сетях // Инфокоммуникационные технологии. 2015. Т. 13. № 4. С. 409–413.

References

1. Klejnrok L. *Teorija massovogo obsluzhivanija*; per. s angl. pod red. V.I. Nejman [Queuing theory; trans. from English. ed. by V.I. Neumann]. M.: Mashinostroenie, 1979, 432 p. [in Russian].

2. Brännström N. A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems: master's thesis applied to HS-DSCH. Lulea University of Technology, 2004, 79 p. [in English].

3. Tarasov V.N. Issledovanie sistem massovogo obsluzhivanija s giperieksponentsial'nymi vhodnymi raspredelenijami [A study of queuing systems with input distributions Hyperexponential]. *Problemy peredachi informatsii* [Information Transmission Problems], 2016, no. 1, pp. 16–26 [in Russian].

4. Tarasov V.N., Bahapeva N.F., Lipilina L.V. Matematicheskaja model' teletrafika na osnove sistemy G/M/1 i rezul'taty vychislitel'nyh eksperimentov [Teletraffic mathematical model based on the system G/M/1 and the results of computational experiments]. *Informatsionnye tehnologii* [Information Technology], 2016, vol. 22, no. 2, pp. 121–126 [in Russian].

5. Tarasov V.N., Kartashevskij I.V. Sposoby approksimatsii vhodnyh raspredelenij dlja sistemy G/G/1 i analiz poluchennyh rezul'tatov [Methods approximation input distributions for the system G/G/1 and analysis of the results]. *Sistemy upravlenija i informatsionnye tehnologii* [Control Systems and Information Technology], 2015, no. 3, pp. 182–185 [in Russian].

6. Tarasov V.N., Gorelov G.A., Ushakov Ju.A. Vosstanovlenie momentnyh harakteristik raspredelenija intervalov mezhdu paketami vhodjaschego trafika [Recovery characteristics of the torque distribution of intervals between the packets of incoming traffic]. *Infokommunikatsionnye tehnologii* [Information and Communication technologies], 2014, no. 2, pp. 40–44 [in Russian].

7. Tarasov V.N. *Verojatnostnoe komp'juternoe modelirovanie slozhnyh sistem* [Probabilistic computer simulation of complex systems]. Samara: SNTs RAN, 2002, 194 p. [in Russian].

8. Aliev T.I. Approksimatsija verojatnostnyh raspredelenij v modeljah massovogo obsluzhivanija [Approximation of probability distributions in queuing models]. *Nauchno-tehnicheskij vestnik informatsionnyh tehnologij, mehaniki i optiki* [Scientific and Technical Gazette Information Technologies, Mechanics and Optics], 2013, no. 2 (84), pp. 88–93 [in Russian].

9. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress, Copenhagen, Denmark, 19–26 Jun 1991, pp. 683–688 [in English].

10. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods. *Operation Research*, 1982, vol. 30, no. 1, pp. 125–147 [in English].

11. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*, 2016, vol. 84, no. 1–2, pp. 145–202 [in English].

12. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3–4, pp. 213–241 [in English].

13. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3–4, pp. 269–301 [in English].

14. Demichelis C., Chimento P. IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics. URL: https://tools.ietf.org/html/rfc3393 [in English].

15. Tarasov V.N., Bahareva N.F. Obobschennaja dvumernaja diffuzionnaja model' massovogo obsluzhivanija tipa GI/G/1 [Generalized two-dimensional diffusion queuing model type GI/G/1]. *Telekommunikatsii* [Telecommunications], 2009, no. 7, pp. 2–8 [in Russian].

16. Tarasov V.N., Malahov S.V., Kartashevskij I.V. Teoreticheskoe i eksperimental'noe issledovanie zaderzhki v programmno-konfiguriruemyh setjah [Theoretical and experimental study of delays in software-configurable network]. *Infokommunikatsionnye tehnologii* [Information and Communication Technologies], 2015, vol. 13, no. 4, pp. 409–413 [in Russian].

UDC 621.391.1: 621.395
DOI 10.18469/1810-3189.2019.22.3.49-54

Received: 18.09.2019
Accepted: 25.09.2019

Analysis of a system with exponential and hyper-Erlang distributions by the method of spectral decomposition of the solution the Lindley integral equation

V.N. Tarasov, N.F. Bahareva, O. Kada

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics
23, L. Tolstoy Street
Samara, 443010, Russian Federation

In this work, we obtain the spectral decomposition of the solution of the Lindley integral equation for a queuing system with a Poisson input flow of requirements and a hyper-Erlang distribution of the service time. Based on it, a calculation formula is derived for the average queue waiting time for this system in a closed form. As you know, all other characteristics of the queuing systems are derived from the average waiting time. The resulting calculation formula complements and extends the well-known Polyachek-Khinchin formula in queuing theory for M/G/1 systems. In the queueing theory, studies of private systems of the M/G/1 type are relevant due to the fact that they are still actively used in the modern theory of teletraffic.

Keywords: hyper-Erlang distribution law, Lindley integral equation, spectral decomposition method, Laplace transform.