

## Магнитное поле МПФС приборов О-типа: расчет на основе интегральных соотношений

Н.А. Бушуев<sup>1</sup>, М.В. Давидович<sup>2</sup>, Е.Ю. Альтшулер<sup>3</sup>

<sup>1</sup> ОАО «НПП «Алмаз»

410033, Российская Федерация, г. Саратов  
ул. Панфилова, 1

<sup>2</sup> Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
410012, Российская Федерация, г. Саратов  
ул. Астраханская, 83

<sup>3</sup> Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина  
410054, Российская Федерация, г. Саратов  
ул. Политехническая, 77

Рассмотрена магнитная периодическая фокусирующая система в виде совокупности кольцевых постоянных магнитов и кольцевых наконечников для приборов О-типа. Получены интегродифференциальные уравнения магнитостатики относительно магнитного поля и электрического вектор-потенциала для постоянных магнитов и полюсных наконечников. Методом последовательных приближений найдены их приближенные решения, приведены соответствующие уравнения и результаты.

*Ключевые слова:* интегральные уравнения, функции Грина, магнитная периодическая фокусирующая структура, магнитостатика, приборы О-типа.

### Введение

Расчет сложных магнитных полей обычно основан на численном решении дифференциальных уравнений магнитостатики. Интегральные и интегродифференциальные уравнения (ИДУ) для этого практически не используются. Важной задачей магнитостатики является расчет магнитной периодической фокусирующей системы (МПФС) для электронных приборов, который обычно производится на основе сеточных методов или методов конечных элементов. В данной работе приведены интегральные уравнения (ИУ) и ИДУ для магнитостатики, в частности для МПФС, в виде кольцевых постоянных магнитов и кольцевых наконечников. Для поля МПФС получен ряд аналитических результатов.

### 1. Интегродифференциальные уравнения магнитостатики

Макроскопические уравнения магнитостатики для магнитных тел с проницаемостью  $\mu$  описываются векторами магнитного поля  $\vec{H}$  и магнитной индукции  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}_P)$  [1–4]. Поля в электродинамике разделяют на силовые и потоковые [1; 2]. Для электрических величин это

соответственно  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ . Для магнитных же величин это  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ , поскольку именно  $\vec{B}$  входит в силу Лоренца. Однако принцип симметрии (перестановочной двойственности) электродинамики требует обратного определения, поскольку на магнитные заряды (если бы они были) должно действовать поле  $\vec{H}$  [5]. Вектор магнитной поляризации  $\vec{P}^m = \mu_0 \vec{M}_P$ , характеризующий магнитный дипольный момент единицы объема вещества, образованный под действием внешнего поля, пропорционален намагниченности  $\vec{M}_P$ . В изотропном случае она может быть записана через магнитную восприимчивость так:  $\vec{M}_P = \chi(\vec{H})\vec{H}$ . Последняя, вообще говоря, есть нелинейная и неоднозначная (в силу гистерезиса) функция  $\vec{H}$ . Далее будем рассматривать два предельных случая: магнитомягкие вещества (без такой неоднозначности), оставляя при рассмотрении нелинейность, и магнито жесткие вещества (идеальные магниты), не перемагничивающиеся во внешнем поле. Уравнение магнитостатики в вакууме имеет вид [1–4]

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}, \quad (1)$$

где полная соленоидальная плотность тока  $\vec{J}$  выступает как сторонний источник и характеризу-

ет полную намагниченность  $\vec{M}$ :  $\vec{J} = \nabla \times \vec{M}$ . Постоянное магнитное поле создается магнитами, поэтому целесообразно сначала рассмотреть этот вопрос.

### 1.1. Интегральные соотношения для магнитов

В отсутствие магнитных тел соленоидальная плотность тока  $\vec{J}$  есть источник магнитного поля, при этом  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ,  $\vec{H} = \vec{M}$ . Для такого поля в вакууме запишем уравнение (1) в виде (для величин магнита вводим индекс «0»).

$$\nabla \times \vec{H}_0 = \vec{J}_0 = \nabla \times \vec{M}_0, \quad (2)$$

В той области, где ток отсутствует,  $\nabla \times \vec{H}_0 = \nabla \times \vec{M}_0 = 0$ . Поскольку  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , то в вакууме ( $\mu = 1$ ) магнитное поле также соленоидально. Поле магнита можно описать намагниченностью  $\vec{M}_0$ , при этом считаем магнит бесконечно магнитожестким:

$$\vec{H}_0 = \vec{M}_0 - \nabla \psi_0, \quad (3)$$

причем поле (3) есть общее решение уравнения (2), при этом

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{H}_0 &= -\nabla^2 \vec{H}_0 = \nabla \times \vec{J}_0 = \\ &= \nabla \nabla \cdot \vec{M}_0 - \nabla^2 \vec{M}_0 = -\nabla^2 \vec{M}_0 + \nabla^2 \nabla \psi_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Мы наложили условие  $\nabla \cdot \vec{H}_0 = 0$ , поскольку здесь  $\mu = 1$ . Внутри магнита поле тоже соленоидальное. Тонкий однородный и длинный магнит можно описать двумя магнитными зарядами: северным и южным, т. е. магнитным диполем. Во внешнем пространстве силовые линии направлены от северного (положительного) полюса к южному, но внутри направление силовых линий обратное, поскольку они замкнуты. Это следствие того, что указанные полюса суть фиктивные заряды. Это коренное отличие от электрического диполя, для которого направление силовых линий между зарядами такое же, как и во внешнем пространстве (от плюса к минусу), т. е. его поле не соленоидальное. Для кольцевого тока  $\delta I$  вокруг бесконечно малого круга с площадью  $\delta S$  вводят элементарный момент  $\delta \vec{M}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) \delta I \delta S$ , где  $\vec{v}(\vec{r})$  – внешняя нормаль к кругу, со стороны которой ток циркулирует в положительном направлении. Плотность суммы всех таких точечных моментов и определяет момент  $\vec{M}_p$  единицы объема, который не обязан быть соленоидальным вектором. Поэтому внутри магнита  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}_0 = \mu_0 (\vec{M}_p - \nabla \psi)$ , где  $\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \vec{M}_p$ . Тогда (3), согласно теореме Гельмгольца, описывает вектор  $\vec{M}_0$  через соленоидальный вектор  $\vec{H}_0 = \mu_0^{-1} \vec{B}_0$  и потенциальный вектор  $\nabla \psi_0$ . Таким образом, имеем:

$$\nabla^2 \psi_0 = \nabla \cdot \vec{M}_0 = -\rho^m / \mu_0 \quad (5)$$

а интегрируя (4) и (5), мы получим (3) с точностью до постоянного значения потенциала  $\psi_0$ . В уравнение (5) введена плотность фиктивных связанных магнитных зарядов по аналогии с тем, как она вводится в магнитоэлектростатике [5]. Однако следует заметить, что это фиктивная плотность, а ее отличие от обычно вводимой плотности связанных магнитных зарядов в магнетике в том, что последнюю ассоциируют с дивергенцией магнитного поля:  $\rho^m = \mu_0 \nabla \cdot \vec{H} = -\mu_0 \mu^{-1} \vec{H} \cdot \nabla \mu$ . Скачок  $\mu$  на поверхности тела соответствует плотности поверхностного заряда  $\rho^m(\vec{r}) = \mu_0 (\mu^{-1} - 1) \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r}) \delta(x_v)$ , связанной с поверхностной дивергенцией. Здесь  $\vec{v}(\vec{r})$  – нормаль,  $x_v$  – отсчитываемая от поверхности нормальная координата. Рассмотрим цилиндр радиуса  $a$  с постоянной соленоидальной намагниченностью  $\vec{M}_p = \vec{z}_0 C_0$ , направленной вдоль оси. Единственная  $z$ -компонента этого вектора терпит скачок от  $C_0$  до нуля на поверхности цилиндра. Вычисляя ротор, имеем одну компоненту тока:  $J_\phi = -\partial M_{pz} / \partial \rho = C_0 \delta(\rho - a)$ . Соответствующий скачок от  $C_0$  до нуля претерпевает и  $H_z = B_z / \mu_0$ . Магнит эквивалентен соленоиду с бесконечно тонкой и плотной катушкой. Если его длина конечна, во внешнем пространстве появится соленоидальное поле. Для реальных магнитов  $\vec{M}_p$  может зависеть от координат. Из уравнения (4) по заданной плотности тока определяем магнитное поле магнита:

$$\begin{aligned} \vec{H}_0(\vec{r}) &= \int_{V_0} G(\vec{r} - \vec{r}') \nabla' \times \vec{J}_0(\vec{r}') d^3 r' = \\ &= \vec{M}_0(\vec{r}) + \int_{V_0} G(\vec{r} - \vec{r}') \nabla' \nabla' \cdot \vec{M}_0(\vec{r}') d^3 r' = \\ &= \vec{M}_0(\vec{r}) + \int_{S_0} \vec{v}(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') \nabla' \cdot \vec{M}_0(\vec{r}') d^2 r' + \\ &+ \nabla \int_{V_0} G(\vec{r} - \vec{r}') \nabla' \cdot \vec{M}_0(\vec{r}') d^3 r', \end{aligned} \quad (6)$$

где  $G(\vec{r}) = 4\pi r^{-1}$  – функция Грина (ФГ);  $r = |\vec{r}|$ . Интегрирование ведется по области магнита  $V_0$  и его поверхности  $S_0$ , или по проводнику с током и его поверхности. В силу замкнутости  $S_0$  оператор  $\nabla'$  в поверхностном интеграле в (6) можно переместить на точку наблюдения (контурные интегралы не возникают), т. е. представить (6) в виде (3). Из уравнения (3) и уравнения (5) также следует:

$$\psi_0(\vec{r}) = - \int_{V_0} G(\vec{r} - \vec{r}') \nabla' \cdot \vec{M}_0(\vec{r}') d^3 r'. \quad (7)$$

Намагниченность  $\vec{M}_0$  подчиняется уравнению

$$\begin{aligned} \vec{M}_0(\vec{r}) = & \int_{V_0} G(\vec{r} - \vec{r}') \nabla' \times \vec{J}_0(\vec{r}') d^3 r' - \\ & - \int_{V_0} G(\vec{r} - \vec{r}') \nabla' \nabla' \cdot \vec{M}_0(\vec{r}') d^3 r'. \end{aligned} \quad (8)$$

С условием (2) оно является тождеством, однако при заданном  $\vec{J}_0$  его можно модифицировать, перенося действие оператора  $\nabla$  на точку наблюдения

$$\begin{aligned} \vec{M}_0(\vec{r}) = & \int_{S_0} G(\vec{r} - \vec{r}') [\vec{v}(\vec{r}') \times \vec{J}_0(\vec{r}') - \\ & - \vec{v}(\vec{r}') \nabla' \cdot \vec{M}_0(\vec{r}')] d^2 r' + \\ & + \int_{V_0} [\nabla G(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{J}_0(\vec{r}') - \\ & - \nabla G(\vec{r} - \vec{r}') \nabla' \cdot \vec{M}_0(\vec{r}')] d^3 r' \end{aligned} \quad (9)$$

и рассматривать как ИДУ для  $\vec{M}_0(\vec{r})$ . Взяв дивергенцию от (9), найдем условие

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \nabla G(\vec{r} - \vec{r}') \cdot [\vec{v}(\vec{r}') \times \vec{J}_0(\vec{r}') + \\ + \vec{v}(\vec{r}') \rho^M(\vec{r}') / \mu_0] d^2 r' = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

которому должна подчиняться введенная поверхностная плотность заряда. Взяв градиент от (7), найдем магнитное поле

$$\begin{aligned} \vec{H}_0(\vec{r}) = & \\ = & \vec{M}_0(\vec{r}) + \nabla \int_{V_0} G(\vec{r} - \vec{r}') \nabla' \cdot \vec{M}_0(\vec{r}') d^3 r' = \\ = & \vec{M}_0(\vec{r}) + \int_{S_0} \vec{v}(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') \nabla' \cdot \vec{M}_0(\vec{r}') d^2 r' + \\ & + \int_{V_0} G(\vec{r} - \vec{r}') \nabla' \nabla' \cdot \vec{M}_0(\vec{r}') d^3 r'. \end{aligned} \quad (11)$$

Если на внешней поверхности магнита  $\rho^M = 0$ , то поверхностный интеграл в (11) и (6) обращается в нуль. Соответственно (10) превращается в условие для тока.

Вне магнита поле  $\vec{M}_0(\vec{r})$  соленоидальное. Если и внутри магнита  $\nabla \cdot \vec{M}_0 = 0$ , соотношения упрощаются, при этом  $\vec{M}_0 = \vec{H}_0$ . Здесь следует отметить, что из уравнения (2) определить  $\vec{M}_0$  без дополнительных условий (т. е. решить ИДУ (8), (9)) нельзя. Это есть следствие того, что оператор  $rot \equiv \nabla \times$  в свободном пространстве дефектный – для него не существует обратного опера-

тора, т. е. нельзя построить  $\Phi\Gamma$  для уравнения (2). Дополнительным условием здесь может служить задание плотности связанных магнитных зарядов  $\rho^M = -\mu_0 \nabla \cdot \vec{M}_0$ . Эта плотность определяется неоднородностью намагничивания. Для однородного магнита она равна нулю, так же как и на его внешней поверхности. Мы имеем явное отличие от электростатики, где на поверхности тела, создающего поле, могут быть электрические заряды. Но на поверхности тела с проникаемостью  $\mu$  в присутствии внешнего магнитного поля такие связанные (наведенные) магнитные заряды могут быть. При этом если внутри  $\mu$  постоянно, интеграл от них по поверхности равен нулю. Если же тело намагничено неоднородно, нулю должен быть равен полный магнитный заряд, т. е. сумма поверхностного и объемного интегралов. Для цилиндрического магнита поток  $\vec{M}_0$  через боковую поверхность равен нулю, а потоки через две торцевые поверхности равны и противоположны.

В силу соленоидальности магнитного поля магнита или системы замкнутых токов в вакууме можно ввести электрический вектор-потенциал [5]:

$$\begin{aligned} \vec{H}_0 = \nabla \times \vec{A}_0, \\ \nabla \times \vec{H}_0 = \nabla \times \nabla \times \vec{A}_0 = \vec{J}_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Оператор  $rot^2$  также дефектный, поэтому вектор-потенциал обычно подчиняют условию калибровки, которое в статике имеет вид  $\nabla \cdot \vec{A}_0 = 0$  [5], откуда

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \int_{V_0} G(\vec{r} - \vec{r}') \vec{J}_0(\vec{r}') d^3 r'. \quad (13)$$

Такое определение означает, что вектор-потенциал соленоидальный и в силу теоремы Гельмгольца может быть представлен только в виде ротора:  $\vec{A}_0(\vec{r}) = \nabla \times \vec{C}_0(\vec{r})$ . В соленоидальности  $\vec{A}_0(\vec{r})$  убеждаемся непосредственно, взяв дивергенцию от (13) и перенося операцию дифференцирования на точку истока. Из (13) уже следует соленоидальность потенциала. Необходимость калибровки связана с дефектностью оператора  $rot$  и невозможностью однозначного определения потенциала из (12). Его общее определение включает градиент некоего скалярного потенциала:  $\vec{A}_0(\vec{r}) = \nabla \times \vec{C}_0(\vec{r}) - \nabla \psi(\vec{r})$ . И только если  $\psi(\vec{r}) = const$ , имеем указанную калибровку. Вектор  $\vec{C}_0$  также целесообразно подчинить условию соленоидальности. Задав соленоидальный вектор  $\vec{J}_0$ , можно найти вектор-потенциал и магнитное поле. Задавая же намагниченность внут-

ри магнита, найдем  $\vec{J}_0 = \nabla \times \vec{M}_0$  и все остальные величины, связанные с полем.

Найдем магнитное поле для азимутально-симметричного цилиндрического магнита в виде кольца с радиусами  $a < \rho < b$  и длины  $2l$  ( $-l < z < l$ ) с различными зависимостями продольной намагниченности. Пусть намагниченность постоянна. Это приводит к плотности тока в виде  $J_{0\varphi}(\rho) = C_0 [\delta(\rho - b) - \delta(\rho - a)]$ . В этом случае имеем [5]

$$A_{0\varphi}(\rho, z) = \int_{V_0} G(\vec{r} - \vec{r}') J_{0\varphi}(\rho', z') \cos(\varphi - \varphi') \rho' d\rho' d\varphi' dz'. \quad (14)$$

Используя представление ФГ в цилиндрической системе координат [5], получим

$$A_{0\varphi}(\rho, z) = C_0 \int_0^\infty \frac{\sin(\gamma l) \cos(\gamma z) [ag(\gamma\rho, \gamma a) - bg(\gamma\rho, \gamma b)]}{\gamma} d\gamma, \quad (15)$$

$$g(\gamma\rho, \gamma\rho') = \frac{2}{\pi} \begin{cases} I_1(\gamma\rho)K_1(\gamma\rho'), & \rho < \rho', \\ K_1(\gamma\rho)I_1(\gamma\rho'), & \rho' < \rho, \end{cases} \quad (16)$$

$$H_{0z}(\rho, z) = \frac{A_{0\varphi}(\rho, z)}{\rho} + C_0 \int_0^\infty \sin(\gamma l) \cos(\gamma z) \times [ag'_\rho(\gamma\rho, \gamma a) - bg'_\rho(\gamma\rho, \gamma b)] d\gamma, \quad (17)$$

$$H_{0\rho}(\rho, z) = C_0 \int_0^\infty \sin(\gamma l) \sin(\gamma z) [ag(\gamma\rho, \gamma a) - bg(\gamma\rho, \gamma b)] d\gamma. \quad (18)$$

Штрих в (17) означает производную по первому аргументу функции (16). Рассмотрим область  $\rho < a$ . Тогда квадратная скобка в выражении (15) равна  $2I_1(\gamma\rho)[aK_1(\gamma a) - bK_1(\gamma b)]/\pi$ . Эта величина равна нулю на оси и монотонно возрастает. Компонента (17) при малых  $\rho$  не зависит от этой координаты и максимальна при  $z = 0$ , а компонента (18) равна нулю при  $z = 0$ , нечетная по  $z$  и возрастает с ростом  $\rho$ . Очевидно, (17) сводится к виду

$$H_{0z}(\rho, z) = \frac{2C_0}{\pi} \int_0^\infty \sin(\gamma l) \cos(\gamma z) \times I_0(\gamma\rho) [aK_1(\gamma a) - bK_1(\gamma b)] d\gamma.$$

Найдем  $H_{0z}(0, 0)$ . При малых  $\gamma$  в области  $\rho < \rho'$  имеем  $g(\gamma\rho, \gamma\rho') = \rho/\rho'$ , так что интеграл (15) и все остальные сходятся. Полагая  $z = 0$  в (17) и интегрируя по частям, получим

$$H_{0z}(\rho, 0) = \frac{A_{0\varphi}(\rho, 0)}{\rho} - \frac{C_0 l}{\rho} \int_0^\infty \cos(\gamma l) [ag(\gamma\rho, \gamma a) - bg(\gamma\rho, \gamma b)] d\gamma.$$

При  $\rho \rightarrow 0$  имеем интегралы

$$H_{0z}(0, 0) = C_0 \int_0^\infty \{[\sin(\gamma l) - \gamma l \cos(\gamma l)] \times [aK_1(\gamma a) - bK_1(\gamma b)] / \pi\gamma\} d\gamma = \frac{2C_0}{\pi} \int_0^\infty \sin(\gamma l) [aK_1(\gamma a) - bK_1(\gamma b)] d\gamma. \quad (19)$$

Аналогичные соотношения при  $\rho = 0$  можно получить для любого  $z$ , т. к. интегралы (19) табличные [6]:

$$H_{0z}(0, 0) = C_0 \left( \left[1 + (a/l)^2\right]^{-1/2} - \left[1 + (b/l)^2\right]^{-1/2} \right). \quad (20)$$

При  $b = a$  поле исчезает, поскольку исчезает и магнит. С ростом  $b$  поле растет и при  $b \gg a$  определяется в основном первым членом. Поле растет также с увеличением длины магнита, и при большой длине ( $l \gg b$ ) имеем  $H_{0z}(0, 0) = C_0(b^2 - a^2)/l^2$ . Если  $l = b \gg a$ , то  $H_{0z}(0, 0) \approx 0.3C_0$ . Очевидно, поле на оси с использованием (20) есть

$$H_{0z}(0, z) = \frac{C_0}{2} \left\{ \frac{l+z}{[(l+z)^2 + a^2]^{1/2}} - \frac{l+z}{[(l+z)^2 + b^2]^{1/2}} + \frac{l-z}{[(l-z)^2 + a^2]^{1/2}} - \frac{l-z}{[(l-z)^2 + b^2]^{1/2}} \right\}. \quad (21)$$

При  $|z| \gg l$  и  $|z| > b$  оно убывает как квадрат расстояния:  $H_{0z}(0, z) \approx C_0(b^2 - a^2)/(2z^2)$ . Найдем поперечную компоненту при малых  $\rho$ , взяв первый член разложения  $I_1$  в ряд:

$$H_{0\rho}(\rho, z) \approx \frac{C_0}{2\pi} \int_0^\infty \gamma\rho [\cos(\gamma(z-l)) - \cos(\gamma(z+l))] [aK_1(\gamma a) - bK_1(\gamma b)] d\gamma.$$

Вычисление этого интеграла дает соотношение

$$H_{0\rho}(\rho, z) \approx \frac{C_0\rho}{4} \left\{ \frac{a^2}{[(z-l)^2 + a^2]^{3/2}} - \frac{a^2}{[(z+l)^2 + a^2]^{3/2}} - \frac{b^2}{[(z-l)^2 + b^2]^{3/2}} + \frac{b^2}{[(z+l)^2 + b^2]^{3/2}} \right\}. \quad (22)$$

При больших  $|z|$  эта компонента убывает как  $3C_0\rho(b^2 - a^2)l / (4z^5)$ . Интегралы (17), (18) берутся через специальные функции или интегралы от них [6]. Однако для численного их вычисления указанные формулы бесполезны. Обычно для МПФС надо знать поле в пролетном канале при малых  $\rho$ . В этом случае удобно использовать несколько членов разложения  $I_0$  и  $I_1$  в ряды. Поскольку имеет место формула [6]

$$I(x, y) = \int_0^{\infty} \sin(x\gamma) K_1(y\gamma) d\gamma = \frac{\pi x}{2y\sqrt{x^2 + y^2}},$$

все требуемые интегралы получаются путем ее дифференцирования по  $x$ .

Рассмотрим теперь неоднородную намагниченность в виде  $\vec{M}_0(\rho, z) = \vec{z}_0(C_0 + C_1(\rho/a)^k)$  в указанной области. Такому моменту также соответствует только одна азимутальная компонента тока

$$J_{0\phi}(\rho) = [C_0 + C_1(b/a)^k] \delta(\rho - b) - [C_0 + C_1] \delta(\rho - a) - kC_1(\rho/a)^{k-1} / a.$$

Запись интеграла (14) для первых двух членов не представляет труда. Для третьего члена следует вычислить интеграл

$$I_k(\gamma) = \int_a^b K_1(\gamma\rho) (\rho/a)^k d\rho.$$

Делая замену  $z = \gamma\rho$ , имеем

$$I_k(\gamma) = \frac{a}{(\gamma a)^{k+1}} \int_{\gamma a}^{\gamma b} K_1(z) z^k dz.$$

Указанный интеграл аналитически берется лишь при  $k = 2$ :

$$I_k(\gamma) = \frac{a}{(\gamma a)^{k+1}} K_1(z) z^2 \Big|_{z=\gamma a}^{z=\gamma b}. \quad (23)$$

Используя (23), можно учесть влияние неоднородности намагничивания, при этом коэффициент  $C_1$  может быть как положительным, так и отрицательным, т. е. намагниченность может уменьшаться с ростом радиуса. Соответствующие формулы весьма громоздки, поэтому не приводятся. Неоднородность вдоль оси можно учесть множителем, который удобно интегрировать, например,  $1 + \alpha \cos(\pi z/l)$ , где  $\alpha$  – малая величина. Такой магнит подобен неоднородно намотанному соленоиду.

## 1.2. Интегродифференциальные уравнения для магнетиков

В присутствии около магнита объема  $V_0$  линейного изотропного магнитного тела объема

$V_M$  с проницаемостью  $\mu(\vec{r})$  следует решать краевую задачу магнитостатики (1) для соленоидального тока с плотностью  $\vec{J} = \vec{J}_0 + \vec{J}_M$  при условии  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ :

$$\nabla \cdot (\mu(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r})) = \mu(\vec{r}) \nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) + \nabla \mu(\vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0. \quad (24)$$

Взяв ротор от первого уравнения (1) и выразив дивергенцию поля из (24), получим

$$-\nabla^2 \vec{H}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{J}(\vec{r}) + \nabla(\mu^{-1}(\vec{r}) \nabla \mu(\vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r})). \quad (25)$$

Считаем, что ток течет в объеме  $V = V_0 + V_M$ , объемы  $V_0$  и  $V_M$  не пересекаются и проницаемость равна единице вне объема  $V_M$ . Вектор  $\vec{J}_0$  определяет заданное поле  $\vec{H}_0$ . Оно соленоидально внутри магнита, поскольку там  $\vec{J} = \vec{J}_0$  и  $\vec{H} = \vec{H}_0$ . Внесение магнетика изменяет внешнее поле  $\vec{H}_0$  на  $\vec{H}$ , соленоидальное вне магнита и магнетика и несолоноидальное внутри магнетика, в котором наводится соленоидальный ток с плотностью  $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$ . Соответственно,  $\vec{J}_M$  и  $\vec{H}$  подлежат определению. Так как  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$ , имеем  $\vec{M} = (\mu - 1) \vec{H}$ , откуда следует уравнение

$$-\nabla^2 \vec{H}(\vec{r}) = \nabla \times \left\{ \vec{J}_0(\vec{r}) + \nabla \times [(\mu(\vec{r}) - 1) \vec{H}(\vec{r})] \right\} - \nabla \nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}), \quad (26)$$

которое в отсутствие магнитного тела переходит в (2). Выделять в правой части (26) оператор  $\nabla^2$  неудобно, поскольку при резкой границе магнетика это приводит к появлению производной дельта-функции. В ИДУ действие этого оператора лучше перенести на ФГ. Уравнение (26) можно переписать и так:

$$-\nabla^2 [(2 - \mu(\vec{r})) \vec{H}(\vec{r})] = \nabla \times \vec{J}_0(\vec{r}) - 2 \nabla \nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}). \quad (27)$$

Учитывая, что  $G(\vec{r}) = (4\pi |\vec{r}|)^{-1}$  есть ФГ оператора в левой части (26) и (27), имеем ИДУ для магнитного поля:

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) = & \int_{V_0} G(\vec{r} - \vec{r}') \nabla' \times \vec{J}_0(\vec{r}') d^3 r' + \\ & + \int_{V_M} G(\vec{r} - \vec{r}') \left\{ \nabla' \times \nabla' \times [(\mu(\vec{r}') - 1) \vec{H}(\vec{r}')] - \right. \\ & \left. - \nabla' \nabla' \cdot \vec{H}(\vec{r}') \right\} d^3 r'. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь первый интеграл – заданное поле магнита  $\vec{H}_0(\vec{r})$ . Если  $\mu(\vec{r}) \neq 2$ , то из (27) следует:

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) = & [(2 - \mu(\vec{r}))]^{-1} \left[ \vec{H}_0(\vec{r}) - \right. \\ & \left. - 2 \int_{V_M} G(\vec{r} - \vec{r}') \nabla' \nabla' \cdot \vec{H}(\vec{r}') d^3 r' \right]. \end{aligned} \quad (29)$$



Это ИДУ можно использовать только при  $\mu < 2$ . Действие операторов  $\nabla' \times$  и  $\nabla'$  в (28) а также  $\nabla'$  в (29) можно перенести на точку наблюдения, при этом в силу векторных интегральных теорем [7] возникают поверхностные интегралы. В силу (24) имеем  $\nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = -\mu^{-1}(\vec{r})\nabla\mu(\vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r})$  ( $\mu \neq 0$ ). Обычно магнитное тело имеет резкую границу, т. е. его магнитная проницаемость изменяется скачком от значения  $\mu^- = \mu(\vec{r})$  на внутренней части границы до значения  $\mu^+ = 1$  в вакууме. При этом на границе  $S_M$  тела возникают индуцированные диполями связанные магнитные заряды, величина  $\nabla\mu(\vec{r})$  направлена вдоль нормали  $\vec{v}(\vec{r})$  к поверхности и в ней выделяется дельта-функция  $\delta(x_v)$  с множителем  $1 - \mu(\vec{r})$ . Тогда в ИУ (29) следует интегрировать по внутренней области объема  $V_M$  и по внешним поверхностям, значения на которых берутся как предел изнутри, т. е. также возникают дополнительные поверхностные интегралы. Внутри однородного тела поле соленоидальное. Переносить действие дифференциальных операторов второго порядка на точку истока нецелесообразно в силу гиперсингулярности получаемых уравнений. ИДУ (28) можно записать так:

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) = & \vec{H}_0(\vec{r}) + \\ & + \int_{V_M} \left\{ \nabla G(\vec{r} - \vec{r}') \times \nabla' \times [(\mu(\vec{r}') - 1)\vec{H}(\vec{r}')] - \right. \\ & \left. - \nabla G(\vec{r} - \vec{r}') \nabla' \cdot \vec{H}(\vec{r}') \right\} d^3 r' + \vec{I}(\vec{r}), \end{aligned} \quad (30)$$

где введен поверхностный интеграл

$$\begin{aligned} \vec{I}(\vec{r}) = & \oint_{S_M} G(\vec{r} - \vec{r}') \{ \vec{v}'(\vec{r}') \times \nabla' \times \\ & \times [(\mu(\vec{r}') - 1)\vec{H}(\vec{r}')] - \vec{v}'(\vec{r}') \nabla' \cdot \vec{H}(\vec{r}') \} d^2 r'. \end{aligned}$$

В нем дельта-функции не возникают, и его следует положить равным нулю, поскольку подынтегральные функции берутся на внешней поверхности как предел их значений в вакууме, т. е. ноль. Однако в объемном интеграле они возникают. Именно вместо записанного в (30) возникает следующий интеграл:

$$\begin{aligned} \vec{I}(\vec{r}) = & \oint_{S_M} \left[ \nabla G(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{v}(\vec{r}') \times \vec{H}(\vec{r}') (1 - \mu(\vec{r}')) + \right. \\ & \left. + \nabla G(\vec{r} - \vec{r}') (\mu^{-1}(\vec{r}) - 1) \vec{v}(\vec{r}') \cdot \vec{H}(\vec{r}') \right] d^2 r', \end{aligned}$$

в котором значения следует брать как предел изнутри. Для однородного магнетика ИДУ (30) приобретает вид

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) = & \vec{H}_0(\vec{r}) + \\ & + (\mu - 1) \int_{V_M} \nabla G(\vec{r} - \vec{r}') \times \nabla' \times \vec{H}(\vec{r}') d^3 r' + \\ & + (1 - \mu) \oint_{S_M} \left[ \nabla G(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{v}(\vec{r}') \times \vec{H}(\vec{r}') + \right. \\ & \left. + \mu^{-1} H_v(\vec{r}') \nabla G(\vec{r} - \vec{r}') \right] d^2 r'. \end{aligned} \quad (31)$$

Решение ИДУ (30) и (31) можно искать методом последовательных приближений (МПП). Если за нулевое приближение взять  $\vec{H} = \vec{H}_0$ , то в первом приближении  $\vec{H}(\vec{r}) \approx \vec{H}_0(\vec{r}) + \delta\vec{H}(\vec{r})$ , где для ИДУ (31)

$$\begin{aligned} \delta\vec{H}(\vec{r}) = & (\mu - 1) \int_{V_M} \nabla G(\vec{r} - \vec{r}') \times \nabla' \times \vec{H}_0(\vec{r}') d^3 r' + \\ & + (1 - \mu) \oint_{S_M} \left[ \nabla G(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{v}(\vec{r}') \times \vec{H}_0(\vec{r}') + \right. \\ & \left. + \mu^{-1} H_{0v}(\vec{r}') \nabla G(\vec{r} - \vec{r}') \right] d^2 r'. \end{aligned} \quad (32)$$

ИДУ можно сформулировать и для электрического вектор-потенциала  $\vec{A}$ , определенного из условия  $\mu(\vec{r})\vec{H}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$ . Это определение соответствует работе [5]. Обычно вводят вектор-потенциал, отличающийся множителем  $\mu_0$ . С условием калибровки  $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$  он удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = & \mu(\vec{r}) \vec{J}(\vec{r}) + \nabla\mu(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r}) = \\ = & \mu(\vec{r}) \vec{J}(\vec{r}) + \mu^{-1}(\vec{r}) \nabla\mu(\vec{r}) \times \nabla \times \vec{A}(\vec{r}), \end{aligned} \quad (33)$$

правую часть которого надо дополнить дельта-функциями, связанными со скачком  $\mu$  на поверхности, что приводит к ИДУ [8]. Для однородного тела

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) = & \vec{A}_0(\vec{r}) + \\ & + (1 - \mu^{-1}) \int_{V_M} G(\vec{r} - \vec{r}') \nabla' \times \nabla' \times \vec{A}(\vec{r}') d^3 r' + \\ & + 2(\mu^{-1} - 1) \oint_{S_M} G(\vec{r} - \vec{r}') \vec{v}(\vec{r}') \times \nabla' \times \vec{A}(\vec{r}') d^2 r'. \end{aligned} \quad (34)$$

Если строить решение с применением МПП, достаточно потребовать соленоидальность для  $\vec{A}_0$  [8]. Интегрируя (34) по частям (используя теорему о роторе [7]), получим

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) = & \vec{A}_0(\vec{r}) + \\ & + (1 - \mu^{-1}) \int_{V_M} \nabla G(\vec{r} - \vec{r}') \times \nabla' \times \vec{A}(\vec{r}') d^3 r' + \\ & + (\mu^{-1} - 1) \oint_{S_M} G(\vec{r} - \vec{r}') \vec{v}(\vec{r}') \times \nabla' \times \vec{A}(\vec{r}') d^2 r'. \end{aligned} \quad (35)$$

МПП в первом порядке дает

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \vec{A}_0(\vec{r}) + \\ &+ (1 - \mu^{-1}) \int_{V_M} \nabla G(\vec{r} - \vec{r}') \times \nabla' \times \vec{A}_0(\vec{r}') d^3 r' + \\ &+ (\mu^{-1} - 1) \oint_{S_M} G(\vec{r} - \vec{r}') \vec{\nu}(\vec{r}') \times \nabla' \times \vec{A}_0(\vec{r}') d^2 r'. \end{aligned} \quad (36)$$

Можно получить другой вид ИДУ для однородного тела:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \vec{A}_0(\vec{r}) + (1 - \mu / 2)^{-1} (\mu^{-1} - 1) \times \\ &\times \oint_{S_M} G(\vec{r} - \vec{r}') \vec{\nu}(\vec{r}') \times \nabla' \times \vec{A}(\vec{r}') d^2 r'. \end{aligned} \quad (37)$$

В первом приближении МПП для (37) имеем потенциал

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \vec{A}_0(\vec{r}) + (1 - \mu / 2)^{-1} (\mu^{-1} - 1) \times \\ &\times \oint_{S_M} G(\vec{r} - \vec{r}') \vec{\nu}(\vec{r}') \times \nabla' \times \vec{A}_0(\vec{r}') d^2 r'. \end{aligned} \quad (38)$$

## 2. Интегродифференциальные уравнения для МПФС

Мы рассматриваем соотношения (1)–(38) в цилиндрической системе и считаем, что  $\vec{J}(\vec{r})$  имеет только азимутальную компоненту  $J_\phi(\rho)$ , не зависящую от координат  $\phi$  и  $z$ . В отношении зависимости плотности тока  $J_{0\phi}(\rho)$  от координаты  $\rho$  сделаем два предположения: 1) она не зависит от  $\rho$ ; 2) она пропорциональна  $\rho$ :  $J_{0\phi}(\rho) = J_a \rho / a$ . Здесь, как и раньше,  $a$  – внутренний радиус кольца магнита;  $b$  – внешний его радиус;  $2l$  – размер по оси  $z$ . Поскольку должно быть  $J_{0\phi}(0) = 0$ , первое предположение соответствует равномерной намагниченности (плотности магнитного момента) и поверхностной плотности тока. Второе же – неоднородной намагниченности вида  $M_z = M_{0z} + J_a \rho^2 / (2a)$ . Пусть кольцевые магниты включены встречно, а между ними находятся магнитомягкие наконечники из электротехнической стали, описываемые зависимостью  $\vec{B} = \mu_0 \mu (\vec{H}) \vec{H}$  и имеющие соответствующие размеры  $a'$ ,  $b'$ ,  $d$ . Для периода системы  $h$  имеем  $h = 4l + 2d$ . Магнитное поле МПФС периодическое, имеет две компоненты  $H_\rho(\rho, z)$ ,  $H_z(\rho, z)$  и описывается приведенными выше уравнениями при условии, что ФГ периодическая. Такая ФГ  $\vec{G}(\vec{r})$  строится путем периодического продолжения:

$$\vec{G}(\vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(x, y, z + nh). \quad (39)$$

Элемент объема есть  $d^3 r = \rho d\rho d\phi dz$ . Соответственно, расстояние между точкой истока и наблюдения есть

$$\begin{aligned} R &= |\vec{r} - \vec{r}'| = \\ &= \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2}. \end{aligned}$$

Для цилиндрического азимутально-симметричного случая удобно использовать следующий вид периодической ФГ [9]:

$$\begin{aligned} \vec{G}(\vec{r} | \vec{r}') &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(jm(\phi - \phi'))}{2\pi h} \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{2n\pi j(z - z')}{h}\right) \times \\ &\times \begin{cases} I_m(2n\pi\rho/h) K_m(2n\pi\rho'/h), & \rho < \rho', \\ K_m(2n\pi\rho/h) I_m(2n\pi\rho'/h), & \rho > \rho', \end{cases} \end{aligned} \quad (40)$$

в которой  $I_m$  – функция Бесселя второго рода,  $K_m$  – функция Макдональда.

Начальная задача состоит в вычислении двухкомпонентного поля двойного магнита  $\vec{H}_0$  по формуле типа (5) с ФГ (40). Далее периодические поля будем снабжать тильдой. В силу выбора системы координат в центре одного из магнитов и симметрии ячейка периодичности находится в области  $|z| < h/2$ , при этом  $\tilde{H}_\rho(\rho, z) -$  нечетная функция по  $z$  и  $\tilde{H}_\rho(0, z) = 0$ ,  $\tilde{H}_\rho(\rho, nh/2) = 0$ , тогда как  $\tilde{H}_z(\rho, z) -$  четная функция по  $z$  и  $H_z(\rho, h/2 + nh/2) = 0$ . Наконечники находятся в областях  $-l - d < z < -l$  и  $l < z < l + d$ . В их центральных плоскостях ( $|z| = l + d/2$ ) силовые линии поворачивают и идут вдоль  $\rho$  на бесконечность или из бесконечности. В ячейке периодичности находятся две части встречных магнитов в областях  $l + d < z < h/2$  и  $-h/2 < z < -l - d$ . Для того чтобы вычислить поле  $\vec{H}_0$ , проще получить периодическое продолжение поля  $\vec{H}_0$ . Поскольку магниты включены встречно с периодом  $h/2$  (с изменением знака у намагниченности), поле  $\vec{H}_0 -$  антипериодическое с периодом  $h/2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{0z}(\rho, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n H_{0z}(\rho, z + nh/2), \\ \tilde{H}_{0\rho}(\rho, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n H_{0\rho}(\rho, z + nh/2). \end{aligned} \quad (41)$$

В силу быстрого убывания поля  $\vec{H}_0$  от  $|z|$  в выражениях (41) можно оставить несколько членов. Для решения ИДУ достаточно в силу симметрии рассмотреть область  $0 < z < h/2$ . При этом решать ИДУ следует только в области одного наконечника  $a' < \rho < b'$ ,  $l < z < l + d$ .

### 3. Поле в пролетном канале

Строго численно решать приведенные уравнения сложно. Определим поле следующим способом. Компонента  $\tilde{H}_z$  четная по  $z$  и антипериодическая функция с периодом  $h/2$ , тогда как  $\tilde{H}_\rho$  – нечетная и периодическая с периодом  $h/2$  функция. Запишем ток, наведенный магнитным полем (41), во вставке:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_M &= \nabla \times ((\mu - 1)\tilde{H}_0) = \\ &= \nabla \times \tilde{H}_0 + (\mu - 1)\nabla \times \tilde{H}_0 = \\ &= \delta(x_\nu)(1 - \mu)\tilde{v} \times \tilde{H}_0 + (\mu - 1)\tilde{J}_0. \end{aligned} \quad (42)$$

Приближение заключается в том, что вместо полного поля мы взяли  $\tilde{H}_0$ , т. е. опять использовали первое приближение МПП. Считаем внутри вставки  $\mu = const$ . Здесь  $\tilde{J}_0$  – периодическое продолжение  $\tilde{J}_0$ . Во вставке  $\tilde{J}_0$  отсутствует, поэтому последний член в (42) равен нулю. Первый же член приводит к поверхностному интегралу в представлении  $\tilde{A}$ . Периодический вектор  $\tilde{H}_0$  имеет две компоненты, в силу чего периодичен и поверхностный вектор  $\tilde{J}_M$  с одной  $\varphi$ -компонентой:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{M\varphi}(\vec{r}) &= (\mu - 1)\tilde{\Pi}(z) \left\{ \tilde{H}_{0z}(\vec{r})[\delta(\rho - b') - \right. \\ &\left. - \delta(\rho - a')] + \tilde{H}_{0\rho}(\vec{r})[\tilde{\delta}(z - l) - \tilde{\delta}(z + l)] \right\}, \end{aligned} \quad (43)$$

где  $\tilde{\delta}$  – периодическая с периодом  $h/2$  дельта-функция [5], а  $\tilde{\Pi}(z)$  – периодическое с периодом  $h/2$  продолжение прямоугольной функции  $\Pi(z)$ , равной единице при  $l \leq z \leq l + d/2$  и нулю в остальной области. Подставляемое в (41) поле  $\tilde{H}_0$  при определении (43) следует брать в области наконечников. Вычисленные ранее в области пролетного канала соотношения не годятся. Для простоты положим, что  $a' > a$  и  $b' < b$  (иначе соотношения усложняются). Тогда в области вставки вместо (15) будем иметь

$$\begin{aligned} A_{0\varphi}(\rho, z) &= C_0 \int_0^\infty \left\{ \sin(\gamma l) \cos(\gamma z) [aK_1(\gamma\rho)I_1(\gamma a) - \right. \\ &\left. - bI_1(\gamma\rho)K_1(\gamma b)] / \pi\gamma \right\} d\gamma. \end{aligned} \quad (44)$$

Определяя компоненту (43), вычислим  $H_{0z}(a', z)$  и  $H_{0z}(b', z)$ . Для  $a < \rho < b$  имеем

$$\begin{aligned} H_{0z}(\rho, z) &= \frac{C_0}{\pi} \int_0^\infty \sin(\gamma l) \cos(\gamma l) \times \\ &\times [aI_1(\gamma a)K_0(\gamma\rho) - bK_1(\gamma b)I_0(\gamma\rho)] d\gamma, \end{aligned} \quad (45)$$

соответственно вычисляем интегралы при  $\rho = a'$  и  $\rho = b'$ . В этой же области имеем

$$\begin{aligned} H_{0\rho}(\rho, z) &= \frac{C_0}{\pi} \int_0^\infty \sin(\gamma l) \sin(\gamma z) \times \\ &\times [aK_1(\gamma\rho)I_1(\gamma a) - bI_1(\gamma\rho)K_1(\gamma b)] d\gamma. \end{aligned} \quad (46)$$

Итак, влияние магнитных наконечников сводится в первом приближении к учету двух поверхностных азимутальных токов по их двум боковым и двум торцевым поверхностям в области  $|z| < h/2$ . Обозначим это поле  $\delta\tilde{H}$ . Оно определяется через единственную компоненту вектор-потенциала  $\delta A_\varphi$  так, как в вакууме [5]:  $\delta H_\rho = -(\partial/\partial z)\delta A_\varphi$ ,  $\delta H_z = (1/\rho)(\partial/\partial\rho)(\rho\delta A_\varphi)$ , где обозначено

$$\begin{aligned} \delta A_\varphi(\rho, z) &= (\mu - 1) \int_{a'}^{b'} g^+(\rho, z | \rho', l) \tilde{H}_{0\rho}(\rho', l) \rho' d\rho' + \\ &+ (\mu - 1) \int_l^{l+d/2} [b'g^+(\rho, z | b', z') \tilde{H}_{0z}(b', z') - \\ &- a'g^+(\rho, z | a', z') \tilde{H}_{0z}(a', z')] dz', \\ g^+(\rho, z | \rho', z') &= \int_0^\infty g(\gamma\rho, \gamma\rho') \cos(\gamma z) \cos(\gamma z') d\gamma. \end{aligned} \quad (47)$$

Построив периодическое поле

$$\tilde{\delta H}(\rho, z) = \sum_{n=-\infty}^\infty (-1)^n \delta\tilde{H}(\rho, z + nh/2),$$

полное поле от магнитов и наконечников определим так:

$$\tilde{H}(\rho, z) = \tilde{H}_0(\rho, z) + \tilde{\delta H}(\rho, z).$$

На рис. 1–3 приведены результаты вычислений поля МПФС для параметров, соответствующих ряду разработанных типов ЛБВО. Используются следующие соотношения:  $a = a'$ ,  $b = b'$ ,  $b/a = 2$ ,  $C_0 = 6 \cdot 10^5$  А/м,  $\mu = 700$ . На рис. 1 показаны значения  $H_z$  и  $H_\rho$  от  $2z/h$  вблизи оси ( $\rho/a = 0.001$ ) для  $d/l = 0, 1, 2, 3, 4$ . Рис. 2 демонстрирует зависимость  $H_\rho$  от  $2z/h$  при  $\rho/a = 0.001, 0.01$  и  $0.05$  для  $l = a$  (кривые 1, 2, 3) и  $l = a/2$  (4). На рис. 3 представлены зависимости  $H_\rho$  (сплошные линии) и  $H_z$  (штриховые линии) от  $\rho/a$  в точках  $z = l, z = l/2$  и  $z = l + d/4$ . Рис. 2, 3 соответствует отношению  $d/l = 2$ , при котором поле наиболее равномерное. Введение наконечников сильно (в десятки раз) увеличивает магнитное поле на оси. Для учета радиальной зависимости полей использованы три члена разложения модифицированных функций Бесселя, что вполне достаточно при малых расстояниях от оси. Компонента  $H_\rho$  практически линейно зависит от  $\rho$ , тогда как  $H_z \approx A + B(\rho/a)^2$ , где  $B \ll A$ .



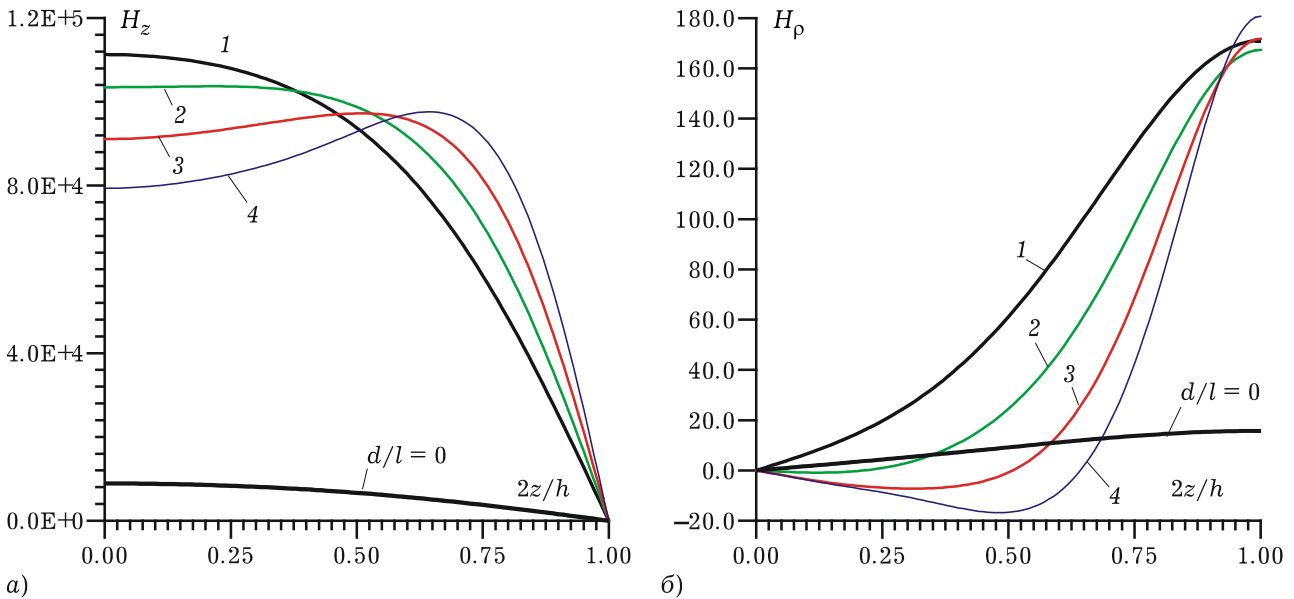


Рис. 1. Зависимости  $H_z$  (а) и  $H_\rho$  (б) от нормированной длины при  $\rho/a = 0.001$  для различных значений  $d/l$

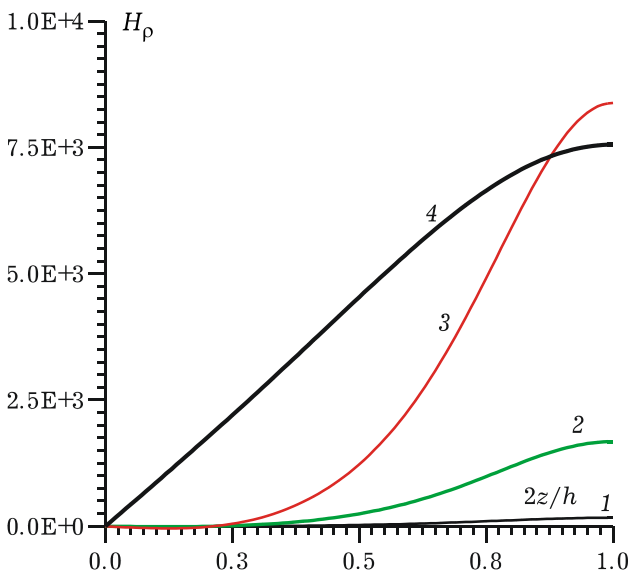


Рис. 2. Зависимость  $H_\rho$  от нормированной длины для  $l = a$  (кривые 1, 2, 3) и  $l = a/2$  (4),  $d/l = 2$  при различных  $\rho/a$ : 0.001 (кривая 1); 0.01 (2); 0.05 (3, 4)

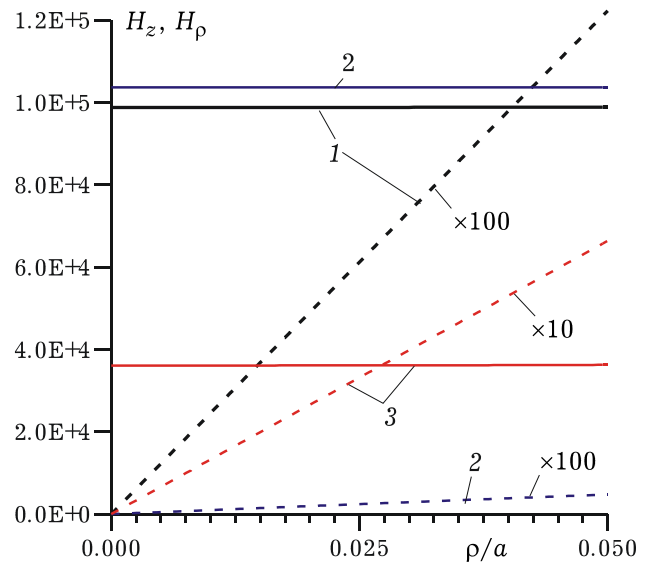


Рис. 3. Радиальные зависимости компонент поля для  $d/l = 2$ ,  $l = a$  в точках  $z = l$  (1),  $z = l/2$  (2) и  $z = l + d/4$  (3)

### Заключение

В работе получены интегродифференциальные уравнения магнитостатики для магнитного поля и электрического вектор-потенциала в случае наличия заданного стороннего магнитного поля и присутствия магнитного тела (тел) со скалярной, неоднородной проницаемостью  $\mu$ , которая может быть нелинейной функцией поля. Уравнения определены внутри тела и на его поверхности. Они являются интегродифференциальными в том смысле, что под знаком интегрального оператора стоят неизвестные величины и их производные. В общем случае уравнения содержат как объемные, так и поверхностные интегралы.

ИУ (поверхностные) возможны лишь для однородных тел ( $\mu = const$ ). Полученные соотношения обобщаются на анизотропные тела простой подстановкой тензорных  $\hat{\mu}$ . Для нелинейных задач необходимо вводить зависимость  $\mu(|\vec{H}|)$ , причем для решения ИДУ удобно использовать МПП. Для тел с гистерезисом также удобен МПП, при этом соответствующую ветвь зависимости следует выбирать с учетом предыстории процесса намагничивания. Для этого можно ступенчато изменять  $\vec{H}_0$ , каждый раз находя решение задачи.

Полученные аналитические соотношения применены для МПФС с кольцевой формой магнитов и наконечников. Показано, что введение наконечников с большой величиной  $\mu$  позволяет

многократно усилить поле в пролетном канале. Результаты позволяют оценить поперечную составляющую магнитного поля, что может быть использовано при решении задачи определения траекторий движения электронов в электронном пучке. Реально намагниченность магнитов в МПФС зависит от сборки и конфигурации, что следует учитывать в расчетах.

### Список литературы

1. Ахиезер А.И., Ахиезер И.А. Электромагнетизм и электромагнитные волны. М.: Высш. шк., 1985. 504 с.
2. Зоммерфельд А. Электродинамика. М.: Из-во Иностранной литературы, 1958. 504 с.
3. Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В. Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1971. 662 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 621 с.
5. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 296 с.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 932 с.
8. Давидович М.В., Козлов А.В. Интегродифференциальные уравнения магнитостатики и индуктивность при наличии электромагнитных экранов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2010. Т. 13. № 2. С. 46–51.
9. Давидович М.В. Фотонные кристаллы: функции Грина, интегродифференциальные уравнения, результаты моделирования // Известия вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49. № 2. С. 150–163.

---

## Field of MPFS: the calculation on the basis of integral relations

*N.A. Bushuev, M.V. Davidovich, E.Yu. Altshuler*

The magnetic periodic focusing system (MPFS) in the form of the ring of permanent magnets and ring tips has been considered for TWT. The integrodifferential equations of magnetostatic problem for magnetic field and the electrical vector-potential for MPFS with permanent magnets and pole tips have been obtained. The iterative method of successive approximations has been applied to find their approximate solution. The corresponding results are given.

*Keywords:* integral equation, Green's function, magnetic periodic focusing structure, magnetostatics, TWT.

---