

## О краевых задачах электродинамики без калибровки Лоренца

С.Б. Раевский<sup>1</sup>, А.Ю. Седаков<sup>2</sup>, А.А. Титаренко<sup>1</sup><sup>1</sup> Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева  
603950, Россия, г. Нижний Новгород  
ул. Минина, 24<sup>2</sup> ФГУП «ФНПЦ НИИ измерительных систем им. Ю.Е. Седакова»  
603137, Россия, г. Нижний Новгород  
ул. Тропинина, 47

Рассматриваются возможности прямых вариационных методов без наложения на поля условия калибровки Лоренца. Предлагаются автономное разложение компонент электромагнитного поля и применение процедуры Галеркина непосредственно к уравнениям Максвелла.

*Ключевые слова:* краевая задача, прямой вариационный метод, калибровка Лоренца, процедура Галеркина, уравнения Максвелла.

Одним из наиболее широко используемых в прикладной электродинамике прямых вариационных методов является метод Галеркина [1]. Обычно в нем в качестве нулевого элемента функционального пространства, определяемого операторным уравнением, задается уравнение Гельмгольца, к которому приводят уравнения Максвелла при использовании калибровки Лоренца:

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $\varphi$  и  $\vec{A}$  – скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля. Действительно, следствием соотношения (1) являются волновые уравнения:

$$\Delta \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}; \quad \Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\vec{\mu} \vec{j}, \quad (2)$$

где  $\rho$  и  $\vec{j}$  – плотности объемных свободных зарядов и токов.

При гармонической временной зависимости уравнения (2) приводят к уравнениям Гельмгольца. Выражая скалярный и векторный потенциалы через векторы Герца  $\vec{\Pi}^{e,m}$ :

$$\varphi = -\operatorname{div} \vec{\Pi}^e; \quad \vec{A} = \varepsilon \mu \frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t}; \quad \vec{A} = \mu \operatorname{rot} \vec{\Pi}^m,$$

приходим к волновым уравнениям

$$\Delta \vec{\Pi}^{e,m} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{\Pi}^{e,m}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon} \left( \frac{\vec{M}}{\mu} \right), \quad (3)$$

где  $\vec{P}$  и  $\vec{M}$  – векторы поляризации и намагничивания, определяющие функции источников электромагнитного поля.

Выражения:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A}$$

приводят к соотношениям, устанавливающим связь между компонентами электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Pi}^e - \mu \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{\Pi}^m}{\partial t}; \\ \vec{H} &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Pi}^m + \varepsilon \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{\Pi}^e}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, калибровка Лоренца устанавливает связь между компонентами электромагнитного поля в виде (4).

В том случае, когда условие (1) на электромагнитное поле не накладывается, операторная связь (3), (4) полей отсутствует, в результате чего в качестве нулевого элемента функционального пространства может фигурировать непосредственно система уравнений Максвелла, а компоненты электрического и магнитного полей в силу отсутствия их аналитической связи вида (4) допускают автономные разложения по произвольным ортогональным базисам. Связь между компонентами в дальнейшем может быть установлена, например, с помощью процедуры Галеркина, применяемой к уравнениям Максвелла. Такой подход расширяет возможности прямых вариационных методов. Продемонстрируем схему его применения на конкретном примере.

Рассмотрим прямоугольный волновод с диэлектрическим заполнением, регулярным по

продольной координате  $z$  и произвольным по поперечным координатам (рис. 1), причем значения диэлектрических проницаемостей могут быть и комплексными величинами.

Представив диэлектрическое заполнение в прямоугольном волноводе кусочно-непрерывной функцией, запишем уравнения Максвелла для всей области внутри рассматриваемого волновода:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{E}) &= -i\omega\mu_0\vec{H}, \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) &= i\omega\varepsilon(x, y)\varepsilon_0\vec{E}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из уравнений (5) получаем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = k_0^2 \varepsilon(x, y) \vec{E}. \quad (6)$$

Полагая, что зависимость поля от продольной координаты  $z$  и от времени имеет виде  $e^{-i\beta z + i\omega t}$  (т. е.  $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_\perp(x, y) e^{-i\beta z}$ ) из (6) получаем три уравнения относительно  $x$ -,  $y$ - и  $z$ -составляющих электрического поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + (k_0^2 \varepsilon(x, y) - \beta^2) E_x - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + i\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (k_0^2 \varepsilon(x, y) - \beta^2) E_y - \frac{\partial^2 E_x}{\partial x \partial y} + i\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} &= 0; \quad (7) \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_0^2 \varepsilon(x, y) E_z + i\beta \frac{\partial E_x}{\partial x} + i\beta \frac{\partial E_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Зависимость компонент электрического поля  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  от поперечных координат будем искать в виде

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} (A_p \sin(\alpha_p x) + \tilde{A}_p \cos(\eta_p x)) \times \\ &\times (a_r \sin(\vartheta_r y) + \tilde{a}_r \cos(\vartheta_r y)); \\ E_y &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} (B_p \sin(\delta_p x) + \tilde{B}_p \cos(\delta_p x)) \times \\ &\times (b_r \sin(\chi_r y) + \tilde{b}_r \cos(\chi_r y)); \\ E_z &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} (C_p \sin(\kappa_p x) + \tilde{C}_p \cos(\kappa_p x)) \times \\ &\times (c_r \sin(\sigma_r y) + \tilde{c}_r \cos(\sigma_r y)). \end{aligned} \quad (8)$$

Подчиняя компоненты (8) граничным условиям:

$$\begin{aligned} E_z|_{x=0} &= 0, \quad E_z|_{x=W} = 0, \\ E_z|_{y=0} &= 0, \quad E_z|_{y=H} = 0, \\ E_x|_{y=0} &= 0, \quad E_x|_{y=H} = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial x}|_{y=0} &= 0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial x}|_{y=W} = 0, \\ E_y|_{x=0} &= 0, \quad E_y|_{x=W} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

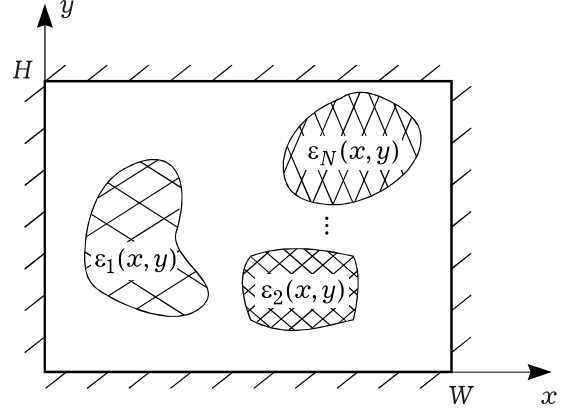


Рис. 1. Поперечное сечение прямоугольного волновода

$$\left. \frac{\partial E_y}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial E_y}{\partial y} \right|_{y=H} = 0,$$

и заменяя бесконечный предел суммирования на конечное число  $M$ , выражения (8) приводим к виду:

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{p=0}^M \sum_{r=0}^M A_{p,r} \cos(\eta_p x) \sin(\vartheta_r y); \\ E_y &= \sum_{p=0}^M \sum_{r=0}^M B_{p,r} \sin(\delta_p x) \cos(\chi_r y); \quad (10) \\ E_z &= \sum_{p=0}^M \sum_{r=0}^M C_{p,r} \sin(\kappa_p x) \sin(\sigma_r y), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \eta_p &= \frac{\pi p}{H}, \quad \vartheta_r = \frac{\pi(r+1)}{H}, \quad \delta_p = \frac{\pi(p+1)}{W}, \\ \chi_r &= \frac{\pi r}{H}, \quad \kappa_p = \frac{\pi(p+1)}{W}, \quad \sigma_r = \frac{\pi(r+1)}{H}, \\ p &= 0, 1, \dots, M, \quad r = 0, 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Члены сумм (10) образуют ортогональный базис, соответствующий граничным условиям (9).

Запишем выражения (10) в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{n=0}^N a_n \cos(\alpha_n^{(x)} x) \sin(\gamma_n^{(x)} y), \\ E_y &= \sum_{m=0}^N b_m \sin(\alpha_m^{(y)} x) \cos(\gamma_m^{(y)} y), \quad (11) \\ E_z &= \sum_{t=0}^N c_t \sin(\alpha_t^{(z)} x) \sin(\gamma_t^{(z)} y), \end{aligned}$$

где  $N = (M+1)^2 - 1$ . При одиночном суммировании (11) учитывается весь спектр функций (10).

Коэффициенты  $\alpha_n^{(x,y,z)}$  и  $\gamma_n^{(x,y,z)}$  записываются в следующем виде:

$$\alpha_{p+(M+1)r}^{(x)} = \eta_p, \quad \gamma_{p+(M+1)r}^{(x)} = \vartheta_r;$$

$$\alpha_{p+(M+1)r}^{(y)} = \delta_p, \gamma_{p+(M+1)r}^{(y)} = \chi_r;$$

$$\alpha_{p+(M+1)r}^{(z)} = \kappa_p, \gamma_{p+(M+1)r}^{(z)} = \sigma_r,$$

где  $p = 0, 1, \dots, M$ ,  $r = 0, 1, \dots, M$ . Например, при  $M = 2$  они запишутся в виде

$$\alpha^{(x)} = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_0, \eta_1, \eta_2)^T;$$

$$\gamma^{(x)} = (\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2)^T.$$

Таким образом, решение задачи о расчете волноводов с произвольным заполнением сводится к представлению электрического поля в виде (11). Связь между  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -составляющими поля в (11) определяется коэффициентами  $a_n$ ,  $b_m$ ,  $c_t$ , значения которых находятся из системы алгебраических уравнений, получаемой в результате подстановки (11) в (7) и использования условий ортогональности базисных функций разложений (10), (11). Подставив выражения (11) в систему (7), получим:

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=0}^N a_n \left[ \left( \gamma_n^{(x)} \right)^2 + \beta^2 \right] \cos \left( \alpha_n^{(x)} x \right) \sin \left( \gamma_n^{(x)} x \right) + \\ & + k_0^2 \sum_{n=0}^N a_n \varepsilon(x, y) \cos \left( \alpha_n^{(x)} x \right) \sin \left( \gamma_n^{(x)} y \right) + \\ & + \sum_{m=0}^N b_m \alpha_m^{(y)} \gamma_m^{(y)} \cos \left( \alpha_m^{(y)} x \right) \sin \left( \gamma_m^{(y)} y \right) + \\ & + i\beta \sum_{t=0}^N c_t \alpha_t^{(z)} \cos \left( \alpha_t^{(z)} x \right) \sin \left( \gamma_t^{(z)} y \right) = 0; \\ & - \sum_{m=0}^N b_m \left[ \left( \alpha_m^{(y)} \right)^2 + \beta^2 \right] \sin \left( \alpha_m^{(y)} x \right) \cos \left( \gamma_m^{(y)} y \right) + \\ & + k_0^2 \sum_{m=0}^N b_m \varepsilon(x, y) \sin \left( \alpha_m^{(y)} x \right) \cos \left( \gamma_m^{(y)} y \right) + \\ & + \sum_{n=0}^N a_n \alpha_n^{(x)} \gamma_n^{(x)} \sin \left( \alpha_n^{(x)} x \right) \cos \left( \gamma_n^{(x)} y \right) + \\ & + i\beta \sum_{t=0}^N c_t \gamma_t^{(z)} \sin \left( \alpha_t^{(z)} x \right) \cos \left( \gamma_t^{(z)} y \right) = 0; \\ & - \sum_{t=0}^N c_t \left[ \left( \alpha_t^{(z)} \right)^2 + \left( \gamma_t^{(z)} \right)^2 \right] \sin \left( \alpha_t^{(z)} x \right) \sin \left( \gamma_t^{(z)} y \right) + \\ & + k_0^2 \sum_{t=0}^N c_t \varepsilon(x, y) \sin \left( \alpha_t^{(z)} x \right) \sin \left( \gamma_t^{(z)} y \right) - \\ & - i\beta \sum_{n=0}^N a_n \alpha_n^{(x)} \sin \left( \alpha_n^{(x)} x \right) \sin \left( \gamma_n^{(x)} y \right) - \\ & - i\beta \sum_{m=0}^N b_m \gamma_m^{(y)} \sin \left( \alpha_m^{(y)} x \right) \sin \left( \gamma_m^{(y)} y \right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

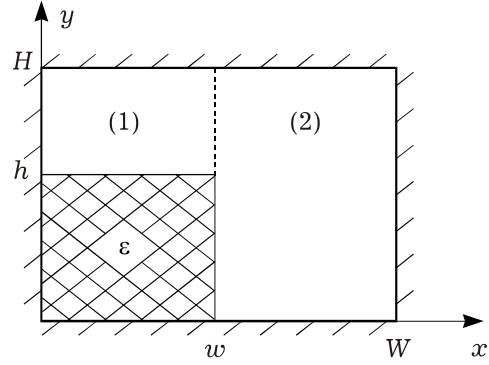


Рис. 2. Прямоугольный волновод с угловым координатным диэлектрическим заполнением

Проецируя систему уравнений (12) на соответствующий базис собственных функций, умножаем:

1-е уравнение системы (12) – на

$$\cos \left( \alpha_q^{(x)} x \right) \sin \left( \gamma_q^{(x)} y \right), \quad q = 0 \dots N;$$

2-е уравнение системы (12) – на

$$\sin \left( \alpha_q^{(y)} x \right) \cos \left( \gamma_q^{(y)} y \right), \quad q = 0 \dots N;$$

3-е уравнение системы (12) – на

$$\sin \left( \alpha_q^{(z)} x \right) \sin \left( \gamma_q^{(z)} y \right), \quad q = 0 \dots N$$

и интегрируем все три уравнения системы (12) по сечению  $(\int_0^H \int_0^W dx dy)$ .

В результате получаем систему матричных уравнений относительно коэффициентов разложений (11). Приравнявая нулю определитель матрицы, получаем дисперсионное уравнение волн прямоугольного экранированного волновода с произвольным диэлектрическим заполнением. Отметим его особенности.

В составляемом таким образом матричном уравнении лишь три матрицы зависят от функции диэлектрического заполнения  $\varepsilon(x, y)$ , которые при этом не зависят ни от частоты, ни от значения продольного волнового числа. В результате все матрицы, входящие в дисперсионное уравнение, при любом сколь угодно сложном характере диэлектрического заполнения считаются один раз. Это позволяет существенно сократить время расчета дисперсионных характеристик.

Для проверки действенности предложенного подхода рассмотрим тестовую задачу, ранее решенную [2] на основе метода частичных областей. Проведем с помощью предложенного метода расчет направляющей структуры, представленной на рис. 2.

Параметры структуры:  $W = 8$  мм,  $w = 5$  мм,  $H = 10$  мм,  $h = 6$  мм,  $\varepsilon = 6$ . Расчет данного вол-

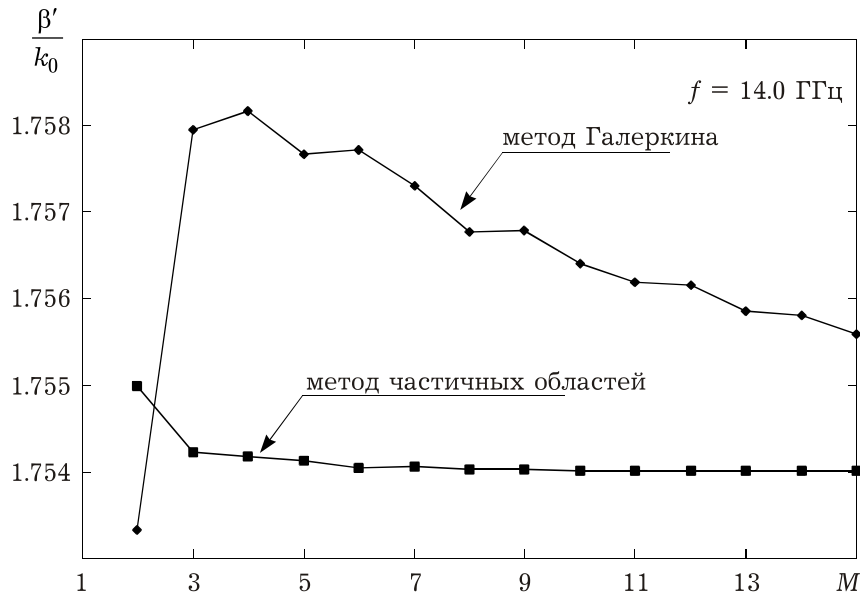


Рис. 3. Сходимость модифицированного метода Галеркина и метода частичных областей

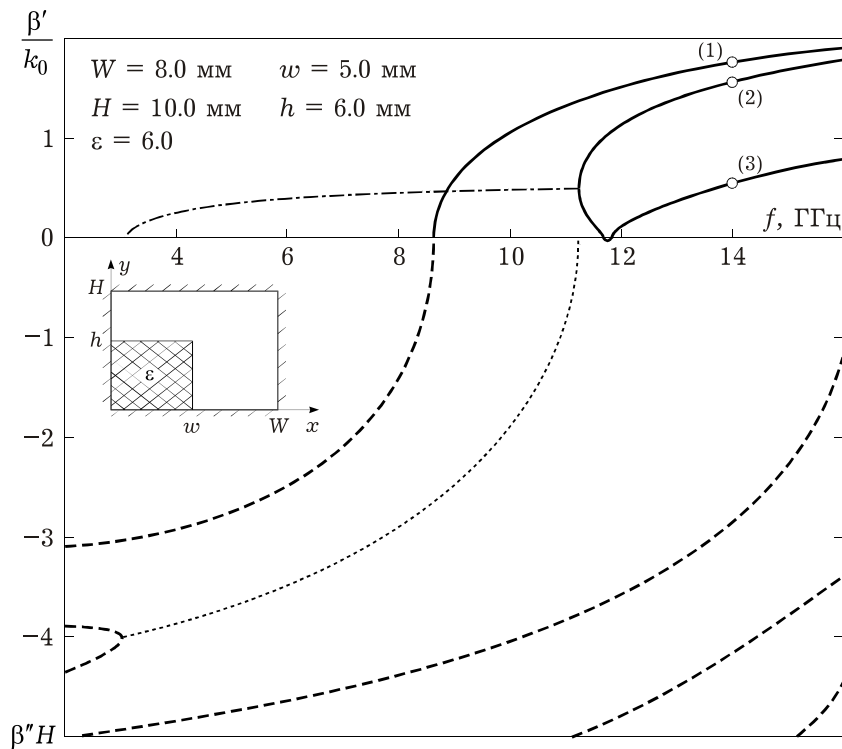


Рис. 4. Дисперсионные характеристики прямоугольного волновода с частичным диэлектрическим заполнением

новода проводился двумя методами: предложенным модифицированным методом Галеркина (ММГ) и методом частичных областей, при котором анализируемая структура разбивалась на области (1) и (2) (рис. 2), поля в которых представлялись с использованием аппарата  $LM$  и  $LE$ -волн. Детальное изложение данной методики расчета приведено в [2].

Решения дисперсионного уравнения, полученные при различных порядках приближения двумя способами, приведены в таблице ниже и на рис. 3.

Видно, что результаты, получаемые обоими методами, сходятся к одному и тому же значению, при этом результаты близки уже в малых приближениях (при  $M = 5$  нормированные постоянные распространения, полученные разными методами, отличаются лишь на 0.2 %).

С помощью МЧО и ММГ были рассчитаны дисперсионные характеристики волн данного волновода в частотном диапазоне от 2 ГГц до 16 ГГц (рис. 4). Результаты расчетов практически полностью совпали (дисперсионные кривые графически неразличимы). Как видно из рисун-

ка, в спектре собственных волн волновода присутствуют комплексные волны (КВ) [3–5], дисперсионные характеристики которых начинают в точках жордановой кратности волновых чисел [6].

Предлагаемый метод расчета волноводов, неоднородно заполненных диэлектриком, является универсальным: единственное ограничение – внешняя металлизированная граница должна быть координатной. При этом легко формируется базис представления полей. Метод обладает преимуществом по сравнению с МЧО при решении задач подобного класса, так как не требует введения в частичных областях, для которых нельзя сформулировать краевую задачу Штурма – Лиувилля, непрерывного спектра собственных функций [7].

Метод прост в алгебраизации дисперсионных задач и среди множества компьютерных методов представляется наиболее строгим и математически обоснованным.

Описанная методика демонстрирует возможности прямых вариационных методов при отказе в них от наложения на поля условия калибровки Лоренца.

Таблица

$M$	$\beta/k_0$ (МЧО)	$\beta/k_0$ (ММГ)
2	1.755013	1.753340
3	1.754223	1.757953
4	1.754177	1.758168
5	1.754127	1.757674
6	1.754045	1.757714
7	1.754059	1.757299
8	1.754024	1.756771
9	1.754026	1.756791
10	1.754022	1.756399
11	1.754013	1.756185
12	1.754017	1.756157
13	1.754009	1.755862
14	1.754010	1.755804
15	1.754009	1.755589

## Список литературы

1. Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967. 460 с.
2. Темнов В.М., Титаренко А.А., Бударягин Р.В. Об особенностях распространения электромагнитных волн в экранированном диэлектрическом волноводе // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптических частот. 2001. Т. 9. № 2 (30). С. 91–96.
3. Раевский С.Б. Комплексные волны в двухслойном экранированном волноводе // Изв. вузов СССР. Сер. Радиофизика. 1972. Т. 15. № 12. С. 112–116.
4. Раевский С.Б. О существовании комплексных волн в некоторых двухслойных изотропных структурах // Изв. вузов СССР. Сер. Радиофизика. 1972. Т. 15. № 12. С. 1926–1931.
5. Веселов Г.И., Раевский С.Б. Слоистые металло-диэлектрические волноводы. М.: Радио и связь, 1988.
6. Краснушкин П.Е., Федоров Е.Н. о кратности волновых чисел нормальных волн в слоистых средах // Радиотехника и электроника. 1972. Т. 17. № 6. С. 1129–1140.
7. Раевский С.Б. Решение внутренних задач электродинамики с использованием непрерывного спектра в одной из частичной областей // Изв. вузов СССР. Сер. Радиоэлектроника. 1980. Т. 23. № 3. С. 27–32.

## On boundary value problems of electrodynamics without the Lorentz gauge

*S.B. Raevskii, A.Yu. Sedakov, A.A. Titarenko*

The possibilities of direct variational methods without imposing conditions on the field the Lorentz gauge. Offered standalone expansion of the components of the electromagnetic field and the application of the Galerkin procedure directly to Maxwell's equations.

*Keywords:* boundary value problem, the direct variational method, Lorenz calibration procedure Galerkin Maxwell's equations.