

## Решение задач электродинамики на основе сингулярных интегральных представлений электромагнитного поля: теория антенн, дифракция электромагнитных волн, метаструктуры

В.А. Неганов, Д.П. Табаков

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики  
443010, Российская Федерация, г. Самара  
ул. Л. Толстого, 23

Рассмотрены вопросы, касающиеся использования сингулярных интегральных представлений электромагнитного поля для построения самодостаточных математических моделей излучающих и переизлучающих структур. Изложены основы корректного электродинамического анализа антенн, киральных элементов и метаматериалов. Рассмотрен механизм учета межэлементного взаимодействия, реализующийся через обобщенную процедуру метода Гаусса – Зейделя. Представлены результаты численного решения внутренней и внешней задачи для некоторых моделей антенн, переизлучающих элементов и метаструктур.

*Ключевые слова:* сингулярные представления электромагнитного поля, метод векторного потенциала, квазиномерные структуры, тонкопроволочное приближение, радиочастотная идентификация, метод физической регуляризации, фрактальные антенны, поверхности с симметрией вращения, киральность, метаматериал, метод Гаусса – Зейделя.

### Введение

В настоящее время для решения электродинамических задач, связанных с излучением и дифракцией электромагнитных волн, используется множество строгих и приближенных методов. Строгие методы можно в свою очередь разделить на прямые и непрямые. В основе прямых методов лежат дискретизированные формы уравнений Максвелла, а также следующие из них дифференциальные (волновые) уравнения. Несмотря на универсальность прямых методов, непосредственное их использование при решении задач в неограниченном пространстве часто затруднительно как в аналитическом плане ввиду сложности получаемых решений, так и в численном плане ввиду больших вычислительных затрат. Непрямые методы основаны на решении ключевой задачи, решение которой называется функцией Грина. При этом в силу линейности уравнений электродинамики, исходная задача решается посредством декомпозиции излучающей структуры до элементарных источников, решение для которых известно, и последующей суперпозиции этих решений, что приводит по сути к интегральным представле-

ниям электромагнитного поля (ИП ЭМП). ИП ЭМП связывает электромагнитное поле в любой точке пространства с токами, находящимися в заданном объеме. Главным достоинством интегральных представлений является необходимость знания только распределения источников, что существенно снижает размерность решаемой задачи в сравнении с прямыми методами. При этом ИП ЭМП полностью описывают излучающую структуру и окружающее ее пространство с точки зрения электродинамики и позволяют эффективно решать упомянутые ранее задачи.

### 1. Общие интегральные представления электромагнитного поля

Рассмотрим некоторые виды общих ИП ЭМП и обсудим их достоинства и недостатки. Чаще всего в литературе встречаются выражения, полученные на основе электрического  $\mathbf{A}^{(e)}$  и магнитного  $\mathbf{A}^{(m)}$  векторных потенциалов:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{M}(W_m \mathbf{A}^{(e)}, \mathbf{A}^{(m)}), \\ \mathbf{H} &= \mathbf{M}(W_m^{-1} \mathbf{A}^{(m)}, -\mathbf{A}^{(e)}), \end{aligned} \quad (1)$$

где:

$$\mathbf{M}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = (k^2 \mathbf{U} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U})) / ik - \nabla \times \mathbf{V}$$

– векторный дифференциальный оператор;  
 $k = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}$  – волновое число среды,  $W_m = \sqrt{\mu_a' / \epsilon_a'}$  – ее волновое сопротивление;  $\epsilon_a'$ ,  $\mu_a'$  – комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости;

$$\mathbf{A}^{(i)} = \int_V \mathbf{j}^{(i)} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV, \quad i \equiv e, m; \quad (2)$$

$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  – функция Грина;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, проведенный в точку наблюдения  $p$ ;  $\mathbf{r}'$  – радиус-вектор, проведенный в точку источника  $q$ ;  $\mathbf{j}^{(i)}$  – вектор объемной плотности электрического или магнитного тока (источники). Источники расположены в объеме  $V$ , по которому производится интегрирование (рис. 1).

Совокупность выражений (1) и (2), можно считать одной из форм ИП ЭМП. В соответствие им можно поставить следующую запись:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \int_V \mathbf{M}(W_m \mathbf{j}^{(e)}, \mathbf{j}^{(m)}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV; \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \int_V \mathbf{M}(W_m^{-1} \mathbf{j}^{(m)}, -\mathbf{j}^{(e)}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV, \end{aligned} \quad (3)$$

В отличие от (1), в (3) дифференциальные операторы применяются к источникам поля. Выражение (3) имеет по крайней мере два недостатка. Первым недостатком можно считать присутствие значительного числа дифференциальных операторов, может существенно усложнить аналитические выводы ИП для конкретных электродинамических структур, т. к. оператор набла в имеет достаточно простую форму записи лишь в Декартовой системе координат. Вторым недостатком является наличие неявных особенностей в ядрах интегральных операторов при  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ . Это усложняет решение внутренней электродинамической задачи, а также может привести к проблемам при расчетах в ближней зоне излучающих структур.

Указанные недостатки можно устранить, если произвести в (1). Так, можно получить ИП ЭМП:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{W_m}{ik} \mathbf{L}'_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{j}^{(e)}) - \mathbf{L}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{j}^{(m)}); \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{W_m^{-1}}{ik} \mathbf{L}'_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{j}^{(m)}) + \mathbf{L}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{j}^{(e)}) \end{aligned} \quad (4)$$

и:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{W_m}{ik} \mathbf{L}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{j}^{(e)}) - \mathbf{L}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{j}^{(m)}); \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{W_m^{-1}}{ik} \mathbf{L}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{j}^{(m)}) + \mathbf{L}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{j}^{(e)}), \end{aligned} \quad (5)$$

где:

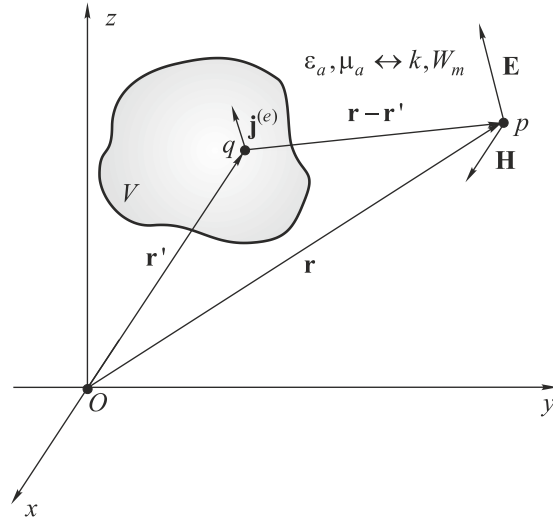


Рис. 1. К решению задач в неограниченном пространстве

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{j}) &= \int_V (\mathbf{j}(\mathbf{r}') C(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{d}) \mathbf{d} D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) dV, \\ \mathbf{L}'_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{j}) &= \int_V (\mathbf{j}(\mathbf{r}') k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \\ &- (\nabla_q \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \mathbf{d} B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) dV, \\ \mathbf{L}_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{j}) &= \int_V B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (\mathbf{d} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) dV \end{aligned}$$

– интегральные операторы;  $G, B, C, D$  – ядра интегральных представлений;  $\mathbf{d} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  – вектор, проведенный из точки источника в точку наблюдения,  $R = |\mathbf{d}|$ . Видно, что в (5) нет дифференциальных операторов, а в (4) необходимо определить дивергенцию источников.

Еще одним достоинством (4) и (5) является возможность легкого выделения особенностей поведения ядер. Так, любую компоненту ядра можно представить в виде разностной (регулярной)  $F_r$  и асимптотической (сингулярной)  $F_a$  частей:

$$\begin{aligned} F &= F_r + F_a, \\ F_r &= F - F_a, \\ F &\equiv G, B, C, D. \end{aligned}$$

Сингулярная часть определяется как асимптотика  $F$  при  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ . Предполагается, что интегрирование по асимптотической части можно осуществить аналитически. Далее рассмотрим решение некоторых задач, осуществленных с помощью ИП ЭМП

## 2. Квазиодномерные структуры

Под квазиодномерными (далее КОС) будем понимать структуры, имеющие продольный размер  $L$ , соизмеримый или много больше длины волны  $\lambda$ , и регулярное поперечное сечение, длина контура  $C$  которого много меньше  $L$  и много меньше или соизмерима с длиной волны  $\lambda$

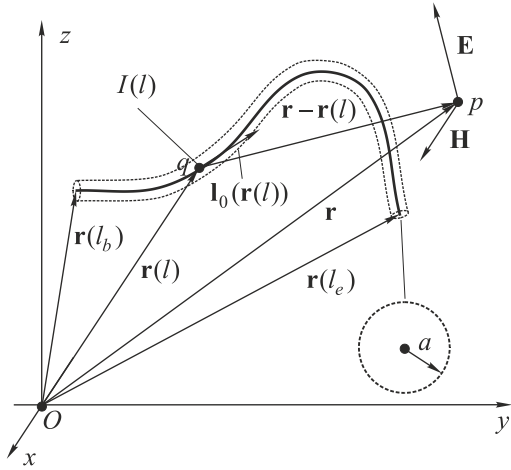


Рис. 2. Геометрия квазиодномерной структуры

(рис. 2). Среди КОС можно выделить трубчатую и полосковую структуры. Далее их можно разделить на электрические (ЭКОС) и магнитные (МКОС). Любая КОС обладает поверхностью  $S$ . У ЭКОС поверхность  $S$  обладает бесконечно большой электрической проводимостью  $\sigma^e$ , и на ней возможны электрические токи  $\mathbf{j}^{(e)}$ , у МКОС поверхность  $S$  обладает бесконечно большой магнитной проводимостью  $\sigma^m$ , и на ней возможны магнитные токи  $\mathbf{j}^{(m)}$ . Выражения для МКОС получаются из выражений для ЭКОС с помощью замены:

$$\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}; \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}; \quad W_m \rightarrow 1 / W_m,$$

поэтому приведем ИП ЭМП только для ЭКОС (в дальнейшем просто КОС).

Объединяющим фактором геометрии КОС является уравнение образующей  $L$ , на основе которой строится поверхность  $S$ . ЭМП, создаваемое структурой в произвольной точке наблюдения  $p$ , определяется линейным векторным оператором от тока на ее поверхности и координат точки наблюдения:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(p) &= \mathbf{L}^{(f)}(\mathbf{j}^{(i)}(q), p), \\ \mathbf{F} - f &\equiv \mathbf{E} - e, \\ \mathbf{H} - m; \\ i &\equiv e, m. \end{aligned} \tag{6}$$

Вид оператора определяется интегральным представлением ЭМП. На поверхности  $S$  выполняются граничные условия (ГУ) для продольных компонент поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_0(l) \cdot (\mathbf{E}^{(in)}(s) + \mathbf{E}(s)) &= \\ = \mathbf{I}_0(l) \cdot (\mathbf{E}^{(in)}(s) + \mathbf{L}^{(e)}(\mathbf{j}^{(e)}(q), s)). \end{aligned} \tag{7}$$

Векторы  $\mathbf{E}^{(in)}$  создаются сторонними ЭМП различного рода. ИП ЭМП трубчатой КОС можно записать следующим образом:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \int_L I_{m'}(l') \mathbf{K}_{m'}^{(f)}(\mathbf{r}, l') dl'; \tag{8}$$

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{E}, \mathbf{H}, \quad f \equiv e, h,$$

$\mathbf{K}_m^{(f)}(\mathbf{r}, l)$  – ядра интегральных представлений;  $l'$  – натуральный параметр на  $L$ ;  $I_m$  – азимутальные гармоники поверхностной плотности тока, в силу условий  $L \ll a$ , где  $a$  – радиус трубки, и  $L \ll \lambda$ , имеющая только продольную составляющую  $\eta_l$ , для которой:

$$\eta_l(\psi, l) = \frac{1}{2\pi a} \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(l) \exp(-im\psi),$$

$\psi$  – азимутальная координата на поверхности трубки;  $\mathbf{I}_0(l)$  – единичный вектор касательной на  $L$ . Так как  $a \ll \lambda$ , то данный ряд является быстро сходящимся. Радиус-вектор поверхности трубчатой структуры записывается как:

$$\mathbf{r}(\psi, l) = \mathbf{r}(l) + a \cdot \rho_0(\psi, l),$$

здесь  $\rho_0(\psi, l)$  – радиальный орт локальной цилиндрической системы координат;  $\mathbf{r}(l)$  – радиус-вектор, проходящий по точкам образующей. Простейшей трубчатой структурой можно считать трубчатый вибратор, интегральные представления для которого приведены в [1].

Можно показать, что ядра (8) содержат особенности, поэтому их можно считать сингулярными ИП ЭМП. Из (8) также несложно получить тонкопроволочные ИП ЭМП:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_L I(l') \mathbf{K}_a^{(f)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}(l')) dl', \quad F \equiv E, H; \tag{9}$$

здесь  $\mathbf{K}_a^{(f)}$  – ядра интегральных представлений;  $I(l')$  – распределение полного тока по  $L$ .

Рассмотрим решение внутренней электродинамической задачи с помощью записанных ранее ИП ЭМП (8) и (9) для прямолинейного излучателя – электрического вибратора длиной  $2l$ , расположенного вдоль оси  $Oz$ . В этом случае выражению (9) будет соответствовать тонкопроволочная модель (рис. 3, а), а выражению (8) – трубчатая модель (рис. 3, б). При постановке ГУ для (8) получается сингулярное интегральное уравнение (СИУ), а для (9) – ИУ Поклингтона. На рис. 4 приведены сравнительные результаты расчетов интегральных уравнений из [2] для полуволнового вибратора: а) аналога ИУ Поклингтона, б) СИУ: сплошные кривые –  $\text{Re } I$ , штриховые кривые –  $\text{Im } I$ ;  $a = \lambda / 75$ ,  $2b = 0.01\lambda$ .

Трубчатая модель физически корректна, и проблем с устойчивостью при решении полученного СИУ не возникает. Его недостаток – относительная сложность выражения ядра.

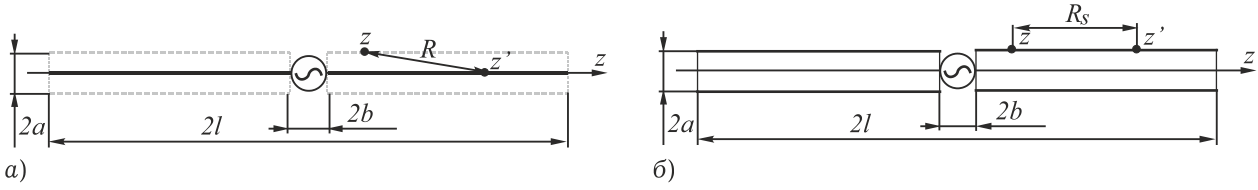


Рис. 3. Физические модели симметричного электрического вибратора: а) тонкопроволочная; б) трубчатая

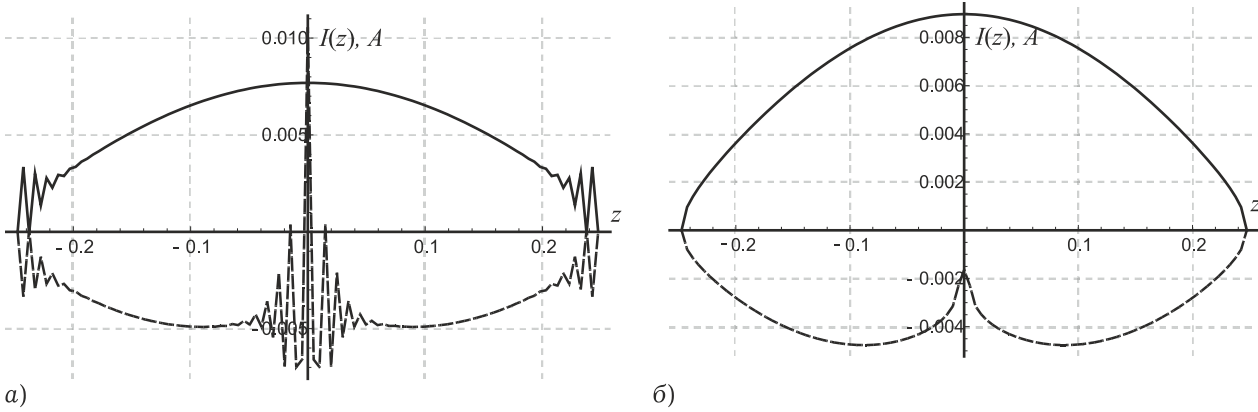


Рис. 4. Результаты расчета токов для тонкопроволочной модели (а) и трубчатой устойчивой (б) модели вибратора

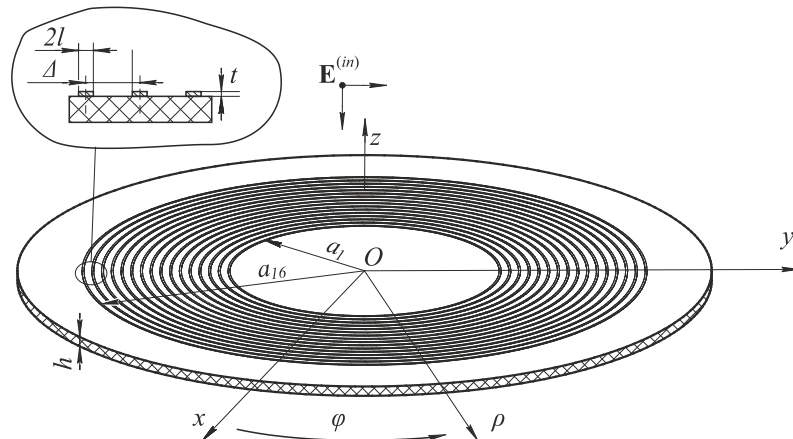


Рис. 5. Метка радиочастотной идентификации

### 3. Поверхности с симметрией вращения

Из общих ИП ЭМП (4) можно получить ИП ЭМП для поверхностей вращения. Предполагая, что осью вращения является ось  $Oz$ , вводя азимутальные Фурье-гармоники ЭМП  $\mathbf{e}_m(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{h}_m(\mathbf{r})$  и Фурье-гармоники поверхностной плотности тока  $\mathbf{J}_m(\mathbf{r})$ , в самом общем виде можно записать:

$$\mathbf{f}_m(\mathbf{r}) = \int_L \mathbf{J}_m(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{z}}_m^{(f)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dl, \quad f \equiv e, h. \quad (10)$$

где:  $\hat{\mathbf{z}}_m^{(f)}$  – тензорные ядра ИП для электрического или магнитного поля. Интегрирование осуществляется по образующей  $L$  поверхности вращения,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0x + \mathbf{z}_0z$  – радиус-вектор на образующей. Вид тензорных ядер в силу громоздкости здесь не приводится. На основе (10) можно осуществлять построение математических моделей множества структур. В качестве примера

рассмотрим метку радиочастотной идентификации [3], показанную на рис. 5.

Мультичастотная метка радиочастотной идентификации резонансного типа (англ. Radio Frequency Identification, RFID, далее метка), в которую заложена двоичная  $N$ -битная кодовая комбинация, обычно выполняется в виде  $N$  резонаторов с различными основными резонансными частотами  $f_i$ , находящимися в диапазоне  $[f_{\min}; f_{\max}]$ , где  $f_{\min}$  – минимальная, а  $f_{\max}$  – максимальная частоты диапазона,  $i = 1 \dots N$  – порядковый номер резонатора (рис. 5). Метка возбуждается линейно поляризованной плоской электромагнитной волной  $\mathbf{E}^{(in)}$  (ПЭМВ).

Если полная метка содержит достаточно большое число резонаторов, то при удалении части из них резонансные пики, соответствующие оставшимся резонаторам, будут смещаться по

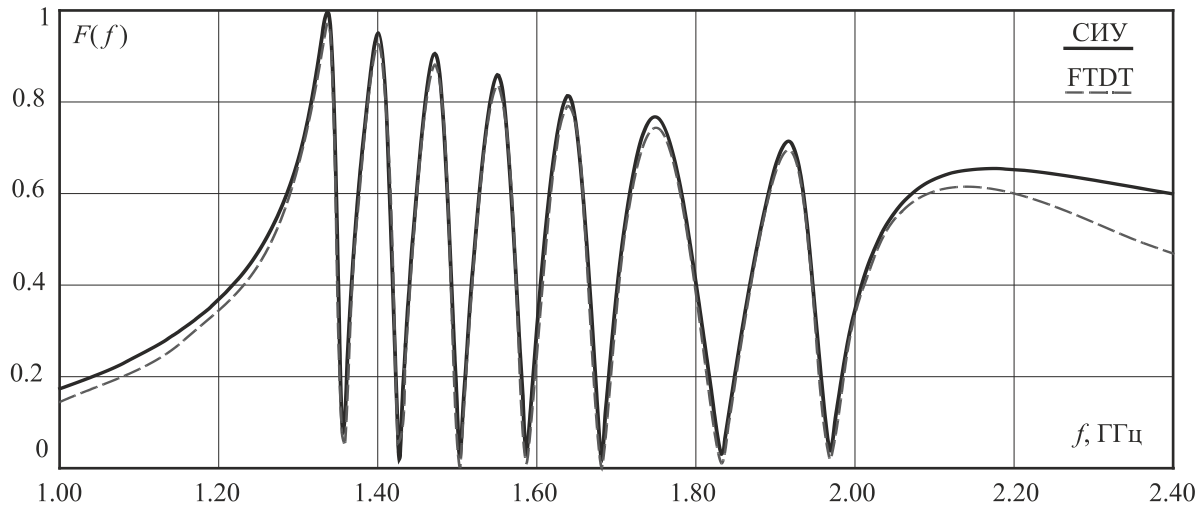


Рис. 6. Частотная зависимость нормированной амплитуды поля рассеяния RFID-метки «11000000»

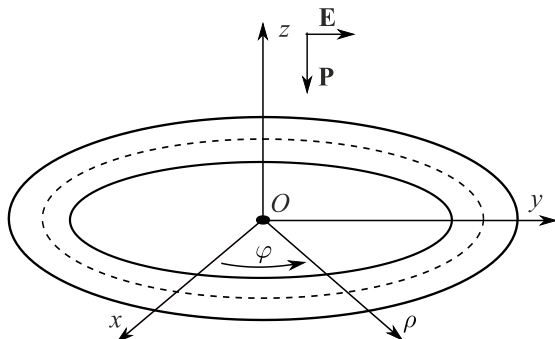


Рис. 7. Возбуждение кольцевой структуры плоской электромагнитной волной

частоте, что затрудняет идентификацию метки. На рис. 6 изображены графики частотных зависимостей амплитуды поля обратного рассеяния RFID-метки, рассчитанные с помощью СИП ЭМП (сплошная линия) и методом FDTD (пунктирная линия). Результаты получены для точки с координатами (0,0,1).

Далее рассмотрим полученные с помощью (10) результаты решения внутренней электродинамической задачи для плоской кольцевой структуры (рис. 7), со средним радиусом  $R_{med}$  и шириной полосы  $L$ , возбуждаемой ПЭМВ с теми же параметрами, что и в предыдущей задаче. Разбивая образующую данной структуры на сегменты (кольца малой ширины), из (10) можно получить СЛАУ вида:

$$-\mathbf{T}_i^T \mathbf{E}_i^{(in)} = -\mathbf{R} \mathbf{J}_{mi} + \sum_{j=1}^N \mathbf{T}_j^T \mathbf{K}_{mij} \mathbf{J}_{mj}, \quad (11)$$

$$i = 1 \dots N;$$

Здесь  $\mathbf{T}^T$  – матрица, определяющая тангенциальные компоненты поля;  $\mathbf{R}$  – диагональная матрица сопротивлений. Выполнение ГУ требуется в точках коллокации, расположенных в центрах сегментов ( $i$  – номер сегмента).

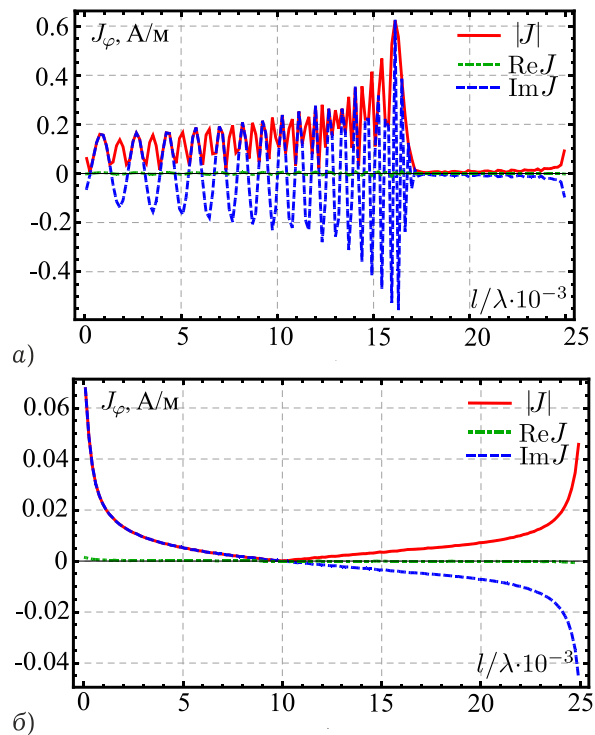
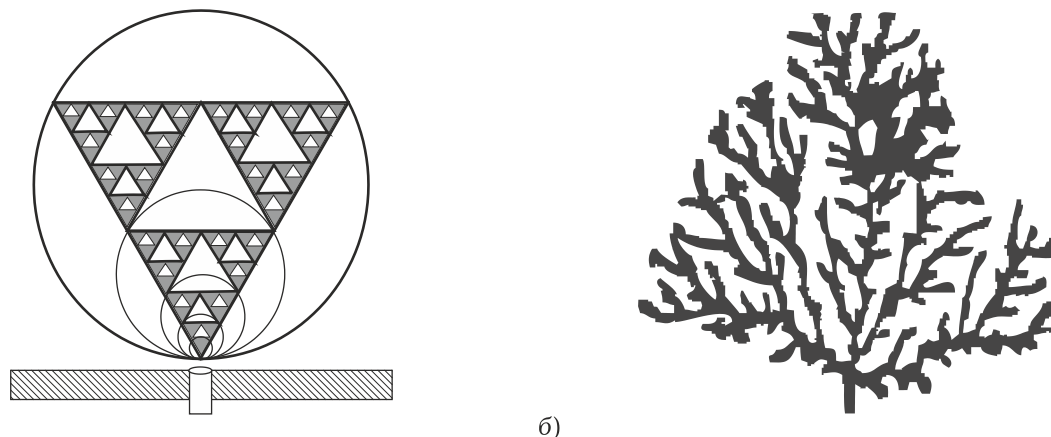


Рис. 8. Результаты расчета распределения  $\varphi$ -компоненты вектора поверхностной плотности тока для различных значений  $r_{22}$ : а)  $r_{22} = 1 \cdot 10^{-3}$ ; б)  $r_{22} = 2 \cdot 10^{-3}$  Ом

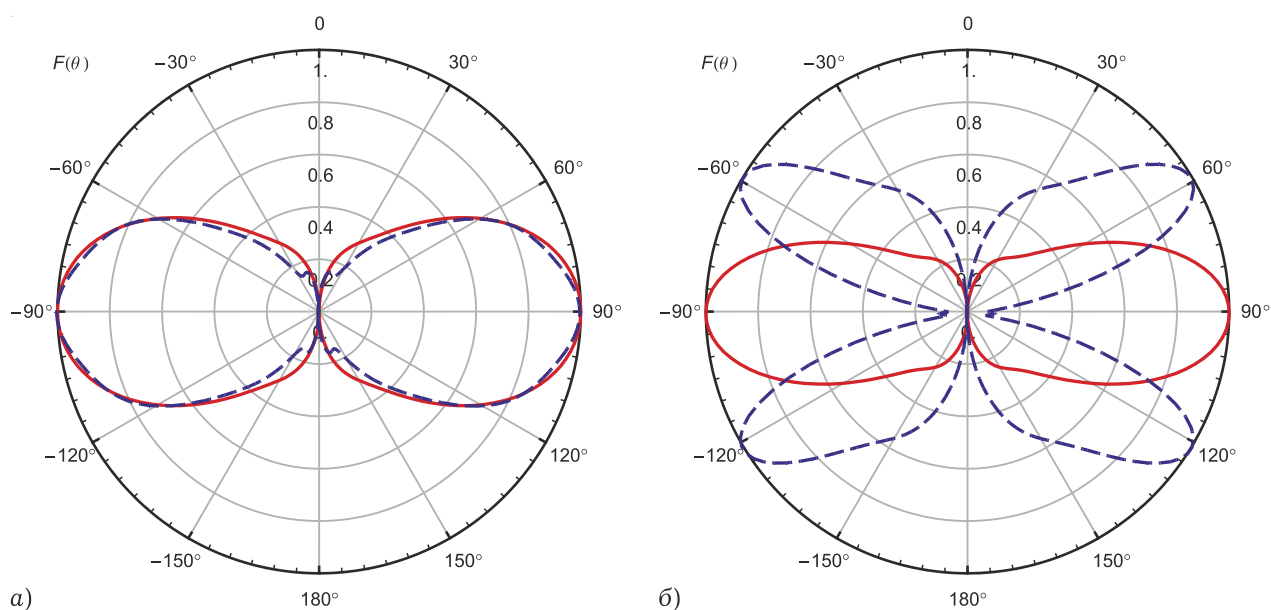
На рис. 8 показаны результаты расчета  $\varphi$ -компоненты вектора поверхностной плотности тока для различных значений  $r_{22}$  матрицы  $\mathbf{R}$  в СЛАУ (3) при  $R_{med} = 0.0625\lambda$ ,  $L = 0.025\lambda$ . Число сегментов в численных расчетах полагалось равным 145. В силу малой ширины сегментов коэффициент  $r_{11}$  полагался равным нулю. На примере этой задачи видно, что даже корректная модель структуры, обладающей ярко выраженными резонансными свойствами, может приводить к некорректному и неустойчивому численному результату. Для обеспечения устойчивости реше-



а)

б)

Рис. 9. Фрактальные антенны: а) антенна Серпинского; б) древовидная антенна



а)

б)

Рис. 10. Результаты расчета ДН симметричных фрактального (а) и широкополосного (б) вибраторов длиной  $L$ : сплошные линии –  $L/\lambda = 1$ , пунктирные –  $L/\lambda = 2$ 

ния необходимо учесть конечную проводимость металла, т. е. провести физическую регуляризацию задачи [4].

#### 4. Фрактальные антенны

Фрактал (лат. fractus — дробленный, сломанный, разбитый) — геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия, то есть составленная из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком. В математике под фракталами понимают множества точек в евклидовом пространстве, имеющие дробную метрическую размерность (в смысле Минковского или Хаусдорфа), либо метрическую размерность, отличную от топологической.

Многие объекты в природе обладают фрактальными свойствами, например, побережья, облака, кроны деревьев, снежинки, кровеносная система и система альвеол человека или животных.

В настоящее время разработки технических средств, следуя опыту природы, конструируют антенные системы, используя фрактальный принцип самоподобия. Примером может служить фрактальная антенна Серпинского, рассмотренная в [5], синтезированная посредством пяти итераций, обозначенных окружностями на рис. 9, а. По своим характеристикам антенна Серпинского является логарифмической в пяти диапазонах. Более сложная фрактальная антенна, конфигурация которой уже мало отличается от рисунка дерева или кустарника, приведена на рис. 9, б. Такая антенна имеет «сгущенные» частотные диапазоны и очень мощную спектральную структуру с большим числом резонансных частот. В [6] предложены фрактальные антенные решетки.

Вполне очевидным становится тот факт, что сложность геометрии фрактальных антенн дела-

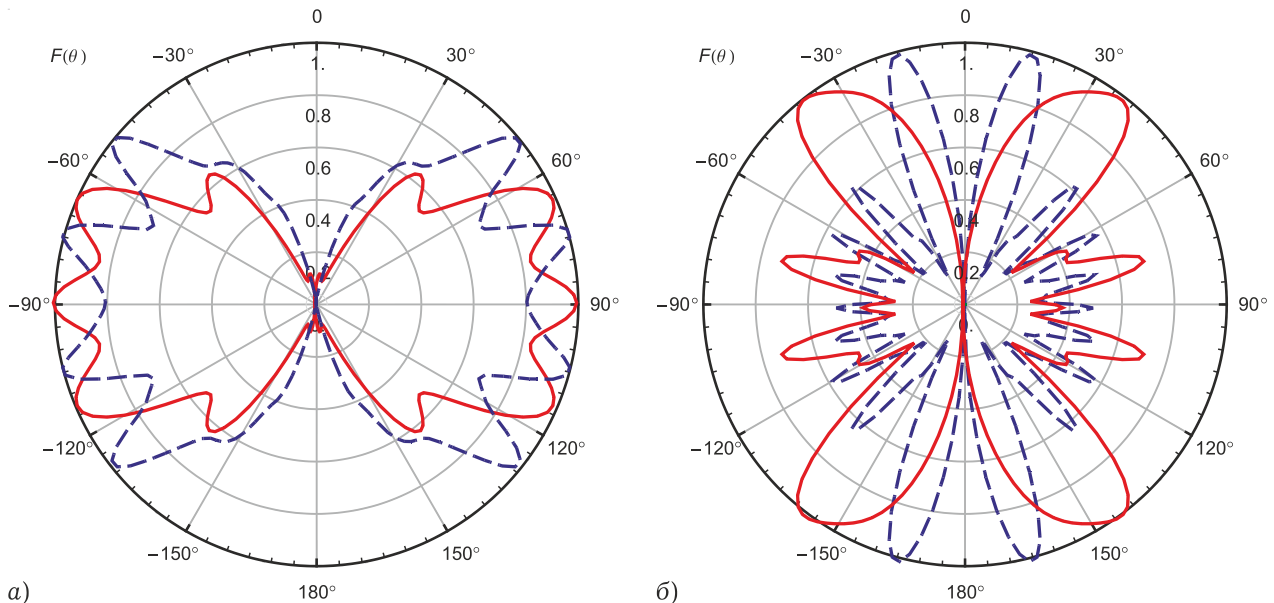


Рис. 11. Результаты расчета ДН симметричных фрактального (а) и широкополосного (б) вибраторов длины  $L$ : сплошные линии –  $L/\lambda = 4$ , пунктирные –  $L/\lambda = 8$

ет практически невозможным их эмпирический анализ, т. к. наличие большого числа изгибов и близко расположенных взаимодействующих элементов существенно влияют на распределение тока, и уже трудно сказать, какой характер оно имеет. Также затрудняется анализ вторичных характеристик антенн, таких как диаграмма направленности или входное сопротивление. Поэтому здесь метод анализа на основе ИП ЭМП становится практически единственно возможным.

На рис. 10, а, 11, а показаны результаты расчета ДН для симметричного вибратора, плечи которого представляют собой треугольники Серпинского, полученные в результате пяти итераций (фрактальный вибратор). Общая длина вибратора равна  $L$ . На рис. 10, б, 11 б приведены результаты для широкополосного вибратора с треугольными плечами аналогичных размеров. Решение внутренней и внешней задачи для обеих структур осуществлялось с помощью ИП ЭМП (9). ДН рассчитаны для различных соотношений  $L/\lambda$ .

Отметим, что результаты для подобных антенн, рассчитанные методом конечных разностей во временной области (FDTD) с помощью коммерческого пакета «HFSS», приведены в [7]. Результаты, представленные на рис. 10 и 11, были подтверждены моделированием с использованием пакета «EMCos». Как видно из рисунков, ДН фрактального вибратора обладает повторяемостью на кратных частотах, для широкополосного вибратора подобной повторяемости не наблюдается.

## 5. Расчет взаимодействия элементов метаструктур

Метаматериал – материал, свойства которого в большей степени обусловлены периодической микроструктурой, создаваемой человеком. Метаматериалы могут обладать свойствами, принципиально отсутствующими у естественных материалов. Одно из таких возможных свойств – отрицательный (или левосторонний) коэффициент преломления, который проявляется при одновременной отрицательности диэлектрической и магнитной проницаемостей [8].

Методы анализа метаматериалов в настоящее время достаточно активно развиваются, но практически все их новые свойства теоретически предсказаны с помощью эффективных диэлектрической и магнитной проницаемостей. Частным случаем метаматериала является киральная среда. Как правило, исследование киральных сред осуществляется с помощью феноменологической теории, материальные уравнения которой имеют вид [9]:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \mp i\chi \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \pm i\chi \mathbf{E}.$$

В данных выражениях верхние знаки соответствуют киральной среде на основе спиралей с правой закруткой, а нижние знаки – среде на основе левовинтовых спиралей. Константа  $\chi$  на-



Рис. 12. Частицы, используемые для построения метаматериалов

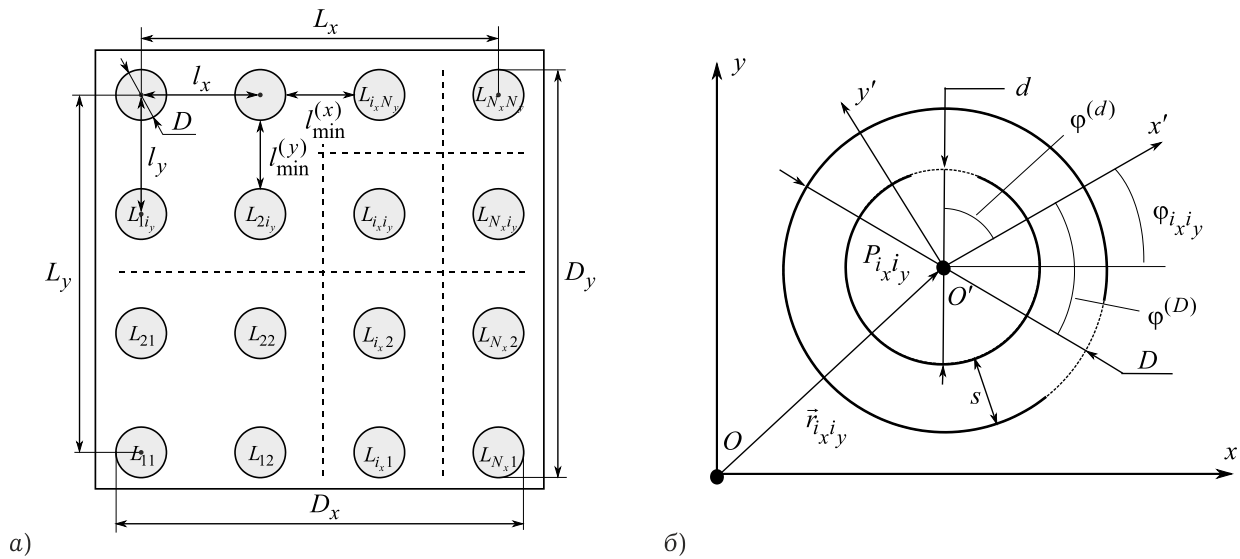


Рис. 13. Геометрия метаструктуры: а) общий вид метаструктуры в плоскости  $xOy$ ; б) геометрия элементов

зывается параметром киральности. Достоинством исследования киральных структур с помощью феноменологических уравнений является относительная простота аналитических выводов. Но здесь следует отметить усредненный характер уравнений, необходимость знания параметра киральности и его частотной зависимости для конкретной среды, малость размеров киральных элементов в сравнении с длиной волны и большое расстояние между элементами, позволяющее пренебречь их взаимодействием. В [10] утверждается, что изучение новых свойств метаматериалов с помощью эффективных диэлектрической и магнитной проницаемостей надо проводить с помощью строгих электродинамических методов, работающих в ближней зоне дифракции электромагнитного поля.

Большую часть ограничений методов, использующих эффективные параметры, можно снять с помощью применения строгого электродинамического подхода. Основным недостатком подобного подхода можно считать сложность численных расчетов и аналитических выводов. Наиболее рациональным с нашей точки зрения является комбинированный подход к анализу метаструктур, когда строгие методы анализа дополняют феноменологическую теорию, а в некоторых случаях выступают в качестве основных методов.

Рассмотрим алгоритм строгого решения внутренней задачи для метаматериала в предположении, что он образован конечным числом  $N$  переизлучающих элементов [11]. Для такого случая из ИП ЭМП, приведенных в первом разделе, можно получить СЛАУ:

$$\hat{\mathbf{Z}}\mathbf{I} = \mathbf{E}.$$

Элементы СЛАУ имеют вид:

$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{11} & \hat{\mathbf{z}}_{12} & \cdots & \hat{\mathbf{z}}_{1N} \\ \hat{\mathbf{z}}_{21} & \hat{\mathbf{z}}_{22} & \cdots & \hat{\mathbf{z}}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{z}}_{N1} & \hat{\mathbf{z}}_{N2} & \cdots & \hat{\mathbf{z}}_{NN} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{i}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_N \end{pmatrix};$$

Здесь  $\hat{\mathbf{z}}_{ij}$  – матрицы взаимодействий;  $\mathbf{i}_i$  – коэффициенты разложения вектора неизвестных токов на элементах метаматериала;  $\mathbf{e}_i$  – коэффициенты разложения вектора стороннего поля на элементах метаматериала.

Сложность расчета СЛАУ в отсутствие взаимодействий составляет  $O(N)$ , где  $N$  – число элементов структуры. Сложность расчета в присутствии взаимодействия равна  $O(N^2)$ , т. е. возрастает квадратично в зависимости от числа элементов. Таким образом, расчет структур со значительным числом элементов представляет собой проблему даже для современных ЭВМ и требует огромных затрат оперативной памяти.

С другой стороны, взаимодействие присутствует всегда, и при решении вопроса о пренебрежении им прежде всего важна количественная оценка. По этой причине актуальной задачей является построение метода расчета взаимодействия с возможностью его количественной оценки.

В качестве основы для расчета взаимодействия можно использовать модификацию ме-



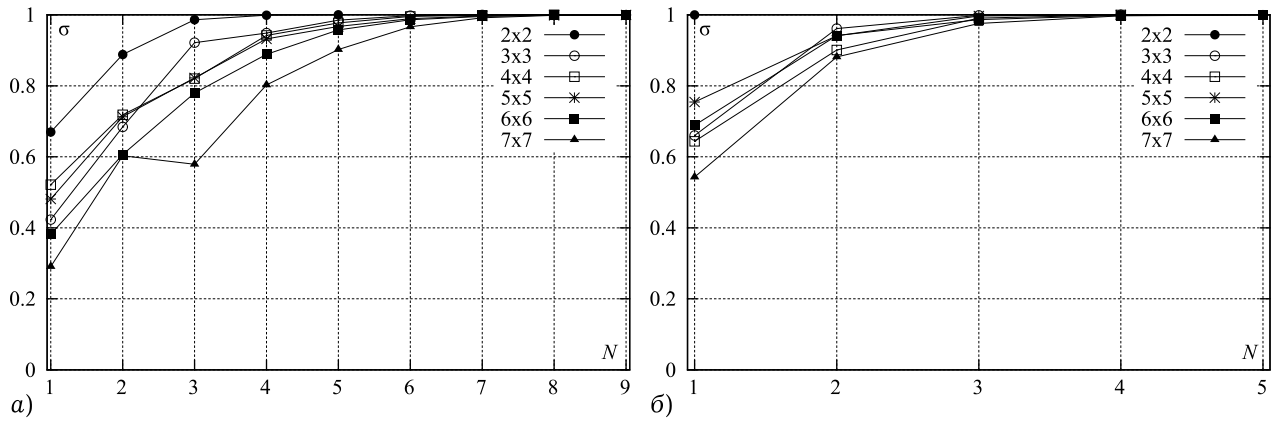


Рис. 14. Результаты оценки сходимости итерационного процесса при увеличении числа элементов  $N_x \times N_y$  в системе: а)  $D/l = 0.8$ ,  $l/\lambda = 0.35$ ; б)  $D/l = 0.4$ ,  $l/\lambda = 0.3$

тода Гаусса – Зейделя [12], оперирующего с матрицами взаимодействий. Рассмотрим применение данной процедуры к решению внутренней задачи дифракции на тонком слое метаматериала, состоящего из двойных разомкнутых колец (рис. 13).

Итерационная процедура строится по формуле:

$$\mathbf{i}_i^{(k+1)} = \hat{\mathbf{y}}_i \mathbf{e}_i - \sum_{j>i} \hat{\mathbf{w}}_{ij} \mathbf{i}_j^{(k)} - \sum_{j<i} \hat{\mathbf{w}}_{ij} \mathbf{i}_j^{(k+1)},$$

$$i = 1, \dots, N,$$

где  $\hat{\mathbf{y}}_i = \hat{\mathbf{z}}_{ii}^{-1}$ ,  $\hat{\mathbf{w}}_{ij} = \hat{\mathbf{y}}_i \hat{\mathbf{z}}_{ij}$ . Данная процедура в общем случае позволяет произвести оценку степени взаимодействия элементов по скорости сходимости итерационного процесса, оперируя матрицами взаимодействий, а не общей матрицей системы. При этом обращения требуют только диагональные элементы общей матрицы, имеющие, как правило, небольшой размер. В частных случаях у метода появляются дополнительные достоинства, такие как необходимость обращения только одного диагонального элемента общей матрицы, когда метаструктура образована одинаковыми элементами, а также снижение числа существенных весовых матриц в случае бианизотропной среды. Под существенными понимаются матрицы, необходимые для построения общей матрицы СЛАУ.

На рис. 14 приведены результаты анализа сходимости для метаструктуры с различным числом образующих ее элементов при различных соотношениях  $D/l$ , где  $l$  – расстояние между элементами;  $D$  – размер элемента. Возбуждение структуры осуществлялось ПЭМВ, поляризованной вдоль оси  $Ox$  и падающей по нормали к плоскости структуры. Критерий оценки сходимости результата строился в соответствии с неравенством:

$$\varepsilon \leq \delta_k = \max_j \left( \frac{|\mathbf{i}_j^{(k+1)} - \mathbf{i}_j^{(k)}|}{|\mathbf{i}_j^{(k+1)}|} \right),$$

где  $\mathbf{i}_j^{(k)}$  – вектор значений токов на сегментах  $j$ -го элемента структуры при  $k$ -й итерации. Величина, иллюстрирующая сходимость:

$$\sigma_k = \frac{1}{1 + \delta_k},$$

Число  $\varepsilon$  в расчетах полагалось равным  $10^{-3}$ . Рисунки иллюстрируют хорошую сходимость итерационного процесса, причем скорость сходимости слабо зависит от числа элементов, образующих метаструктуру.

Аналогичным образом была решена задача дифракции на структуре, образованной  $S$ -элементами (рис. 11). На левом рисунке они ориентированы упорядоченно, а на правом – хаотически. Структура имела размеры  $D_x \times D_y$  и число элементов  $N_x \times N_y$ . На рис. 16 приведены результаты решения задачи дифракции в случае нормального падения линейно поляризованной вдоль оси  $Oy$  ПЭМВ на структуру. Решение осуществлено с помощью ИП ЭМП. Параметры структуры:  $D_x \times D_y = \lambda \times \lambda$ ,  $N_x \times N_y = 10 \times 10$ . Видно, что несмотря на довольно малое количество хаотически ориентированных  $S$ -элементов, диаграммы рассеяния имеют вполне детерминированный характер.

## Заключение

Таким образом, в статье рассмотрены различные формы записи ИП ЭМП, в том числе сингулярные. Отмечены недостатки, присущие традиционно используемому ИП ЭМП. Рассмотрен механизм выделения особенностей в ядрах ИП, имеющий важное значение при решении внутренней электродинамической задачи и при определении поля в ближней зоне антенн.

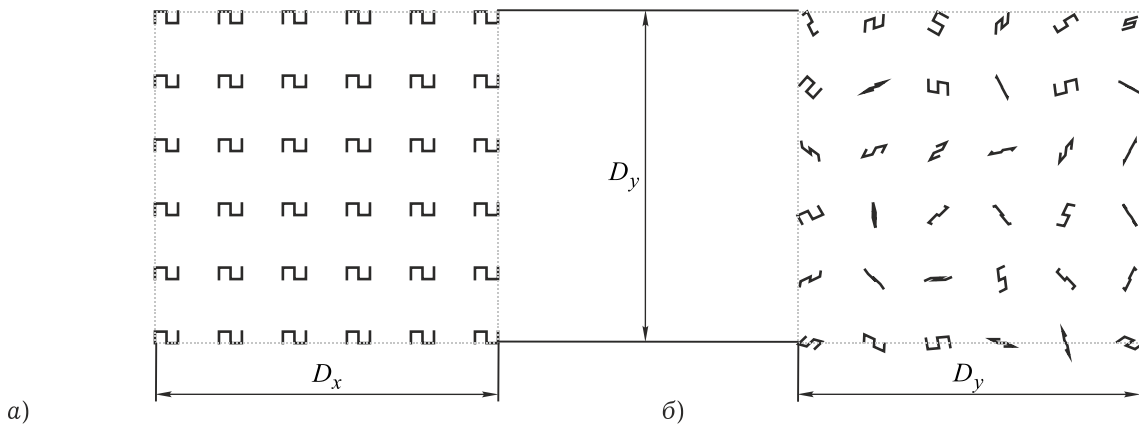


Рис. 15. Геометрия кирального слоя из  $S$ -элементов: а) упорядоченная ориентация элементов; б) хаотическая ориентация элементов

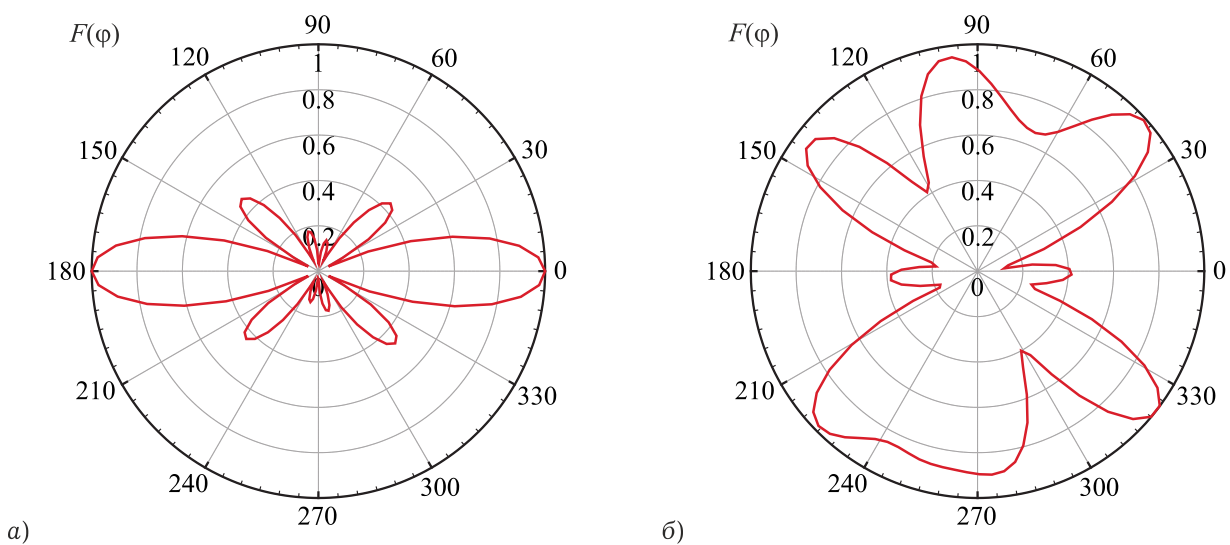


Рис. 16. Результаты расчета нормированных амплитудных диаграмм рассеяния отраженного поля в азимутальной плоскости для структуры, показанной рис. 15: а) упорядоченная ориентация элементов; б) хаотическая ориентация элементов

Также приведены результаты численного расчета некоторых излучающих и переизлучающих структур на основе ИП ЭМП: трубчатого и тонкопроволочного вибратора, меток радиочастотной идентификации, фрактальной антенны. Изложены основные принципы корректного расчета метаструктур на основе ИП ЭМП. Подобный подход позволяет преодолеть ряд ограничений, накладываемых феноменологической теорией, таких как ограничение на размер элементов в сравнении с длиной волны и ограничение на расстояние между элементами. Изложен эффективный метод оценки и учета межэлементного взаимодействия. В результате СИП ЭМП представляется достаточно эффективным и универсальным инструментом для решения задач в неограниченном пространстве.

Одним из важных моментов является оценка перспектив дальнейшего развития рассмотренного аппарата. Здесь, на наш взгляд, можно

выделить по крайней мере три направления. Во-первых, это более тесное совмещение СИП ЭМП с методом моментов в целях сокращения пути от построения выражений до численного моделирования. Во-вторых, расширение числа ключевых задач, под которыми следует понимать построение СИП ЭМП для множества элементарных излучателей с последующей декомпозицией анализируемой структуры до совокупности элементарных излучателей, наиболее подходящих в конкретном случае. И, наконец, третье направление – построение СИП ЭМП, автоматически учитывающих в себе геометрические свойства анализируемых излучающих структур. Подобные СИП ЭМП смогут существенно сократить затраты вычислительных ресурсов, что можно наблюдать на примере расчета обладающих симметрией вращения меток радиочастотной идентификации, рассмотренных в статье.

### Список литературы

1. Неганов В.А., Табаков Д.П., Яровой Г.П. Современная теория и практические применения антенн / под ред. В.А. Неганова. М.: Радиотехника, 2009. 720 с.
2. Неганов В.А. Табаков Д.П., Ключев Д.С. Физическая регуляризация некорректных задач теории антенн // Электросвязь. 2011. № 5. С. 35–37.
3. Неганов В.А., Плотников А.М., Табаков Д.П. Электродинамический анализ резонансных меток для радиочастотной идентификации объектов методом сингулярных интегральных уравнений // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57. С. 6.
4. Неганов В.А. Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики: линии передачи, антенны, дифракция электромагнитных волн. М.: Сайнс-Пресс, 2008. 432 с.
5. Нефедов Е.И. Антенно-фидерные устройства и распространение радиоволн. М.: Академия, 2006. 320 с.
6. Кравченко В.Ф., Масюк В.М. Кольцевые фрактальные антенные решетки // Электромагнитные волны и электронные системы. 2004. Т. 9. № 5. С. 3–12.
7. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.
8. Веселаго В.Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями  $\epsilon$  и  $\mu$  // Успехи физических наук. 1967. Т. 92. Вып. 3. С. 517–526.
9. Неганов В.А., Осипов О.В. Отражающие, волноведущие и излучающие структуры с киральными элементами. М.: Радио и связь, 2006. 280 с.
10. Кисель В.Н., Лагарьков А.Н. Электродинамические модели тонкослойных метаматериалов и устройства на их основе // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54. № 5. С. 531–540.
11. Неганов В.А., Марсаков И.Ю., Табаков Д.П. Расчет взаимодействия элементов метаструктуры на основе метода Гаусса – Зейделя // Физика волновых процессов и радио-технические системы. 2013. Т. 16. № 3. С. 7–16.
12. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. 624 с.

---

## Solving problems of electrodynamics on the basis singular integral presentations of the electromagnetic field: antennas theory, the diffraction of electromagnetic waves, metastructures

*V.A. Neganov, D.P. Tabakov*

The problems concerning the use of the singular integral representations of the electromagnetic field for the construction of self-sufficient mathematical models and re-radiating structures. The foundations of a correct analysis of the electrodynamic antenna elements and chiral metamaterials. The mechanism accounting interelemental interaction, which is realized through the process of generalized Gauss-Seidel method. The results of the numerical solution of internal and external problems for some antenna models reemitting elements and metastructures.

*Keywords:* singular representation of the electromagnetic field, method of vector potential, quasi-one-dimensional structure, thin wire approach, radio frequency identification, physical regularization, the fractal antennas, surface of revolution, chirality, metamaterial, Gauss-Seidel method.

---