

Комплексная форма дискретных отображений томсоновских автоколебательных систем

В.В. Зайцев, О.В. Зайцев, А.Н. Шилин

Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева
443086, Российская Федерация, г. Самара
Московское шоссе, 34

Предложены новые дискретные отображения автоколебательных систем томсоновского типа. Отображения получены методом структурного синтеза с использованием последовательностей дискретных отсчетов импульсных характеристик резонаторов, входящих в состав автоколебательных систем. Метод медленно меняющихся амплитуд использован для анализа динамических характеристик автоколебаний в дискретном времени. Приведен пример генерации автоколебаний дискретным отображением осциллятора Ван дер Поля.

Ключевые слова: автоколебательная система, нелинейная динамика, дискретное отображение, метод медленно меняющихся амплитуд, хаотические автоколебания.

Введение

Современная нелинейная динамика [1] рассматривает эволюцию динамических систем как в непрерывном (НВ), так и дискретном времени (ДВ). При этом в области дискретного времени нелинейная динамика смыкается с цифровой обработкой сигналов [2] и объекты ДВ-динамики могут служить основой алгоритмов обработки. Для выполнения этих функций необходим широкий круг ДВ-систем, обеспечивающий возможность выбора заданной характеристики преобразования сигналов. Поиск таких систем следует рассматривать в качестве одной из задач нелинейной динамики в дискретном времени.

Как правило, объекты НВ-динамики являются результатом математической формализации физических (химических, биологических и т. д.) моделей реально существующих систем, в то время как ДВ-системы в большинстве случаев возникают в результате дискретизации времени в НВ-системах. Полученное таким образом разностное уравнение, следуя терминологии теории колебаний, можно обозначать как уравнение движения ДВ-системы, а как объект ДВ-динамики – дискретное отображение соответствующей НВ-системы. При этом способ дискретизации существенным образом влияет на форму дискретного отображения.

Широко известен ряд способов построения дискретных отображений. В качественной теории динамических систем – это сечения Пуан-

каре [1]. Для гамильтоновых систем с помощью введения в гамильтониан нелинейных дельта-воздействий строятся универсальное и стандартное отображения [3]. Рассматривается также и самый прямой способ дискретизации времени – конечно-разностная аппроксимация производных в дифференциальном уравнении движения системы. Но он не дает эффективных алгоритмов преобразований сигналов ДВ-системами [2].

В настоящей работе для построения дискретных отображений аналоговых автоколебательных систем (АКС) томсоновского типа использован метод структурного синтеза в сочетании с принципом сохранения временного отклика линейных резонаторов при переходе к дискретному времени.

1. Структурный синтез АКС

В качестве основного прототипа в непрерывном времени выберем осциллятор с уравнением движения вида

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0 \gamma G(y) \frac{dy}{dt}, \quad (1)$$

где ω_0 и Q – собственная частота и добротность резонансного контура АКС; γ – параметр цепи обратной связи с нелинейностью усилителя $G(y)$ – четной функцией входного сигнала. Формально при выполнении условий $Q \gg 1$, $\gamma \ll 1$ АКС (1) относится к классу томсоновских. При $G(y) = 1 - y^2$ – это осциллятор Ван дер Поля.

Используемый способ проектирования ДВ-осциллятора в определенном смысле можно назвать структурным, поскольку он опирается на представление о структурной схеме томсоновской АКС (1), как кольцевом соединении блоков «резонатор – нелинейный усилитель – обратная связь».

Динамическую (инерционную) часть АКС (1) представляет резонансный контур с дифференциальным уравнением движения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 x(t), \quad (2)$$

где $x(t)$ – сигнал возбуждения. Контур (2) имеет импульсную характеристику

$$h(t) = \omega_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) \sin(\omega_0 t).$$

Ее дискретные временные отсчеты, взятые с интервалом Δ , определяют импульсную характеристику ДВ-резонатора:

$$h[n] = \Delta \cdot h(t_n) = 2\pi\Omega_0 \alpha^n \sin(2\pi\Omega_0 n). \quad (3)$$

Здесь $\Omega_0 = \omega_0 \Delta / 2\pi$ – собственная частота контура, измеряемая в единицах частоты дискретизации $\omega_d = 2\pi / \Delta$; $\alpha = \exp(-\pi\Omega_0 / Q)$ – параметр диссипации.

Так как частотная характеристика ДВ-системы связана с ее импульсной характеристикой дискретным во времени преобразованием Фурье [2]:

$$H(j\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \exp(-j2\pi\Omega n),$$

то для (3), проведя вычисления, получим

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= H_+(j\Omega) + H_-(j\Omega) = \\ &= -\frac{j\pi\Omega_0}{1 - \alpha \exp(j2\pi\Omega_0) \exp(-j2\pi\Omega)} + \\ &+ \frac{j\pi\Omega_0}{1 - \alpha \exp(-j2\pi\Omega_0) \exp(-j2\pi\Omega)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Частотная характеристика (4) соответствует системе разностных уравнений движения вида

$$\begin{aligned} y[n] &= y_+[n] + y_-[n], \\ y_+[n] &= \alpha Z_0 y_+[n-1] - j\pi\Omega_0 x[n], \\ y_-[n] &= \alpha Z_0^* y_-[n-1] + j\pi\Omega_0 x[n], \end{aligned} \quad (5)$$

где $Z_0 = \exp(j2\pi\Omega_0)$ – множитель поворота. Отметим, что при действительном сигнале $x[n]$ осцилляции $y_-[n]$ комплексно сопряжены по отношению к $y_+[n]$: $y_-[n] = y_+^*[n]$.

В автоколебательной системе с уравнением движения (1) роль сигнала возбуждения $x(t)$ играет сигнал на выходе нелинейного усилителя, вход которого через обратную связь взаимодействует с выходом контура $y(t)$:

$$x(t) = \frac{\gamma}{2\pi\Omega_0} G(y(t)) \dot{y}(t). \quad (6)$$

В этой записи введено обозначение для производной по безразмерному времени: $\dot{y} = \Delta dy / dt$.

С учетом связи (6) система разностных уравнений движения (5) для томсоновского ДВ-осциллятора принимает вид

$$\begin{aligned} y[n] &= y_+[n] + y_-[n], \\ y_+[n] &= \alpha Z_0 y_+[n-1] - j \frac{\gamma}{2} G(y[n]) \dot{y}[n], \\ y_-[n] &= \alpha Z_0^* y_-[n-1] + j \frac{\gamma}{2} F(y[n]) \dot{y}[n]. \end{aligned}$$

Сумма второго и третьего уравнений этой системы с учетом первого дает важное соотношение

$$y[n] = \alpha Z_0 y_+[n-1] + \alpha Z_0^* y_+^*[n-1],$$

указывающее на зависимость значения осциллирующей переменной $y[n]$ в текущий момент дискретного времени n от значения переменной $y_+[n-1]$, взятого в предыдущий момент $n-1$. Такая временная зависимость позволяет построить ДВ-осциллятор в форме итерируемого дискретного отображения вида

$$y_+[n] = \alpha Z_0 y_+[n-1] - j \frac{\gamma}{2} G(y[n]) \dot{y}[n], \quad (7)$$

где

$$y[n] = 2\alpha \operatorname{Re}(Z_0 y_+[n-1]). \quad (8)$$

При этом для связи отсчетов $\dot{y}[n]$ и $y[n]$ предлагается использовать выражение вида [4]

$$\operatorname{sinc}(2\pi\Omega_0) \dot{y}[n] = \cos(2\pi\Omega_0) y[n] - y[n-1]. \quad (9)$$

Оно является точным для дискретных гармонических колебаний с частотой Ω_0 . Как приближенное, предлагается распространить его и на квазигармонические автоколебания. С учетом (9) отображение (7) принимает вид

$$\begin{aligned} y[n] &= \alpha Z_0 y_+[n-1] + \alpha Z_0^* y_+^*[n-1], \\ y_+[n] &= \alpha Z_0 y_+[n-1] - j\gamma \frac{\pi\Omega_0}{\sin(2\pi\Omega_0)} \times \\ &\times G(y[n]) (\cos(2\pi\Omega_0) y[n] - y[n-1]), \end{aligned} \quad (10)$$

Сформированное таким образом нелинейное разностное уравнение (10) представляет собой комплексную форму дискретного отображения (уравнения движения) томсоновской АКС.

2. Метод ММА для ДВ-АКС

Отображение (10) воспроизводит в дискретном времени основные характеристики томсоновской АКС (1). Это нетрудно показать цифровым анализом генерируемых по алгоритму (10) времен-

ных рядов, но мы воспользуемся здесь широко распространенным в теории нелинейных колебаний методом медленно меняющихся амплитуд (методом ММА) [5]. На ДВ-осцилляторы томсоновского типа метод ММА был распространен работами [6; 7]. Следуя им, генерируемый отображением (10) временной ряд (ДВ-автоколебания) представим в виде

$$y_+[n] = \frac{1}{2} A[n] Z_0^n,$$

где $A[n] = a[n] \exp(j\varphi[n])$ – комплексная амплитуда автоколебаний; $a[n]$ и $\varphi[n]$ – действительные амплитуда и фаза. Тогда первое из уравнений (10) можно записать как

$$y[n] = \frac{\alpha}{2} A[n-1] Z_0^n + \frac{\alpha}{2} A^*[n-1] Z_0^{-n},$$

Нелинейную функцию

$$F(y[n]) = G(y[n]) (\cos(2\pi\Omega_0)y[n] - y[n-1]) \quad (11)$$

в правой части первого уравнения (10) в рамках метода ММА заменим первой гармоникой ряда Фурье:

$$F(y[n]) \approx \frac{1}{2} F_1(A[n]) Z_0^n + \frac{1}{2} F_1^*(A[n]) Z_0^{-n}$$

с комплексной амплитудой

$$F_1(A[n]) = j \sin(2\pi\Omega_0) \times \\ \times \left(G_0(a[n-1]) - \frac{1}{2} G_2(a[n-1]) \right) A[n-1].$$

При этом использовано Фурье-разложение четной функции $G(y[n])$

$$G(y[n]) \approx G_0(a[n]) + \\ + \frac{1}{2} G_2(a[n]) \exp(j2\varphi[n]) Z_0^{2n} + \\ + \frac{1}{2} G_2(a[n]) \exp(-j2\varphi[n]) Z_0^{-2n}.$$

Отметим также, что в рамках используемой здесь методики ММА в нелинейности (11) считаем $A[n-2] = A[n-1]$ и $\alpha = 1$.

Используя в (10) представленные разложения и проведя очевидные математические преобразования, получим

$$A[n] = \alpha A[n-1] + \\ + \pi\Omega_0 \gamma \left(G_0(a[n-1]) - \frac{1}{2} G_2(a[n-1]) \right) \times \\ \times A[n-1] + \quad (12) \\ + \pi\Omega_0 \gamma \left(G_0(a[n-1]) - \frac{1}{2} G_2(a[n-1]) \right) \times \\ \times A^*[n-1] Z_0^{-2n}.$$

Последнее слагаемое здесь описывает высококачественное воздействие (с периодом $T_0 = 1/2\Omega_0$) на

медленный процесс изменения (с характерным временем релаксации $T_r = Q/2\Omega_0$) комплексной амплитуды $A[n]$. Пренебрегая этим воздействием, приходим к укороченному уравнению для комплексной амплитуды ДВ-автоколебаний

$$A[n] = \alpha A[n-1] + \\ + \pi\Omega_0 \gamma \left(G_0(a[n-1]) - \frac{1}{2} G_2(a[n-1]) \right) A[n-1]. \quad (13)$$

Полученное разностное уравнение (13) сопоставим с укороченным уравнением для комплексной амплитуды автоколебаний в исходной аналоговой модели АКС (1). Нетрудно показать, что для автоколебаний вида

$$y(t) = \frac{1}{2} A(t) \exp(j\omega_0 t) + \frac{1}{2} A^*(t) \exp(-j\omega_0 t)$$

уравнение движения (1) методом ММА сводится к дифференциальному укороченному уравнению

$$\frac{d}{dt} A(t) = -\frac{\omega_0}{2Q} A(t) + \\ + \frac{\omega_0}{2} \gamma \left(G_0(a(t)) - \frac{1}{2} G_2(a(t)) \right) A(t). \quad (14)$$

При переходе к безразмерному времени $\tau = t\Delta^{-1}$ уравнение (14) принимает вид

$$\frac{d}{d\tau} A(\tau) = -\pi \frac{\Omega_0}{Q} A(\tau) + \\ + \pi\Omega_0 \gamma \left(G_0(a(\tau)) - \frac{1}{2} G_2(a(\tau)) \right) A(\tau). \quad (15)$$

Учитывая разложение параметра диссипации высокодобротного контура в ряд по обратным степеням добротности

$$\alpha = \exp\left(-\pi \frac{\Omega_0}{Q}\right) \approx 1 - \pi \frac{\Omega_0}{Q},$$

приходим к выводу о том, что разностное укороченное уравнение ДВ-АКС (13) реализует алгоритм Эйлера для укороченного уравнения (15) аналоговой АКС. Таким образом подтверждается сделанное нами ранее утверждение о том, что отображение (10) воспроизводит в дискретном времени основные динамические характеристики томсоновской АКС (1).

3. Некоторые результаты анализа динамики ДВ-АКС

Приведем ряд результатов, полученных для дискретного отображения осциллятора Ван дер Поля. В этом случае функция нелинейности

$$F(y) = \left(1 - \frac{1}{3} y^2\right) y,$$

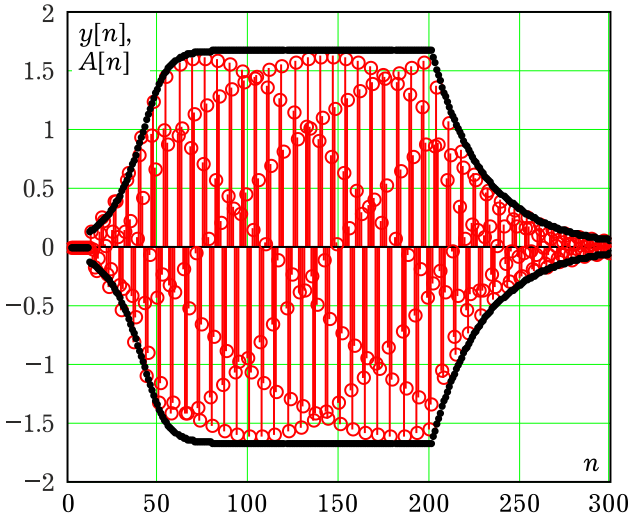


Рис. 1. Дискретные отсчеты мгновенных значений и амплитуды первой гармоники автоколебаний

а отображение (10) и его укороченное уравнение (13) принимают вид

$$y_+[n] = \alpha Z_0 y_+[n-1] - j\gamma_e (1 - y_+^2[n-1]) (\cos(2\pi\Omega_0) y_+[n] - y_+[n-1]), \quad (16)$$

$$A[n] = \alpha A[n-1] + \gamma_e \sin(2\pi\Omega_0) \times \left(1 - \frac{1}{4} a^2[n-1]\right) A[n-1]. \quad (17)$$

Здесь в (16) для упрощения записи введен эффективный параметр обратной связи в ДВ-системе:

$$\gamma_e = \gamma \frac{\pi\Omega_0}{\sin(2\pi\Omega_0)}.$$

На рис. 1 точками приведены отсчеты ДВ-автоколебаний $y[n]$, генерируемых отображением (16) со значениями $\Omega_0 = 0.14$ и $Q = 13$. Обратная связь с параметром $\gamma = 0.143$ включается на интервале времени $11 \leq n \leq 200$. Пунктирной линией на рисунке показан график временной зависимости амплитуды автоколебаний, рассчитанный по укороченному уравнению (17). Как видно из графиков, зависимость $a[n] = |A[n]|$ с хорошим приближением воспроизводит амплитуду автоколебаний.

На рис. 2 график $a[n]$ приведен вместе с графиком временной зависимости огибающей $|A_a[n]|$ ДВ-автоколебаний $y[n]$, выделенной методом аналитического сигнала с использованием дискретного преобразования Гильберта [2]. Зависимость $|A_a[n]|$ кроме медленной кусочно-монотонной компоненты содержит компоненту, осциллирующую с частотой $2\Omega_0$. Она возникает из-за наличия третьей гармоники в спектре сигнала $y[n]$. Заметим, что осциллирующая компонен-

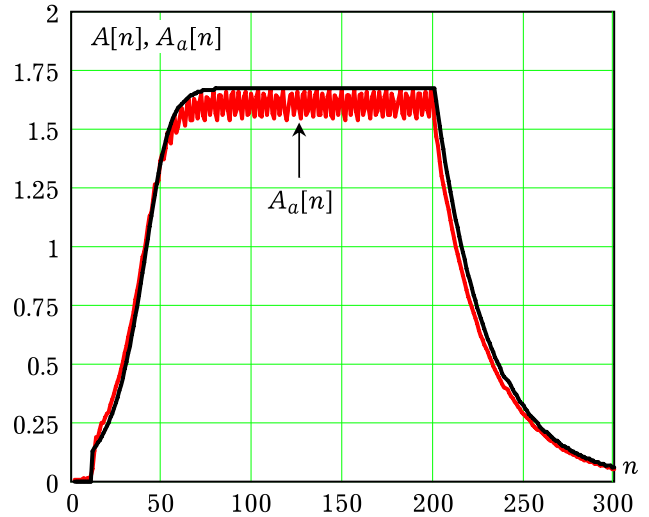


Рис. 2. Дискретные отсчеты амплитуды первой гармоники и огибающей автоколебаний

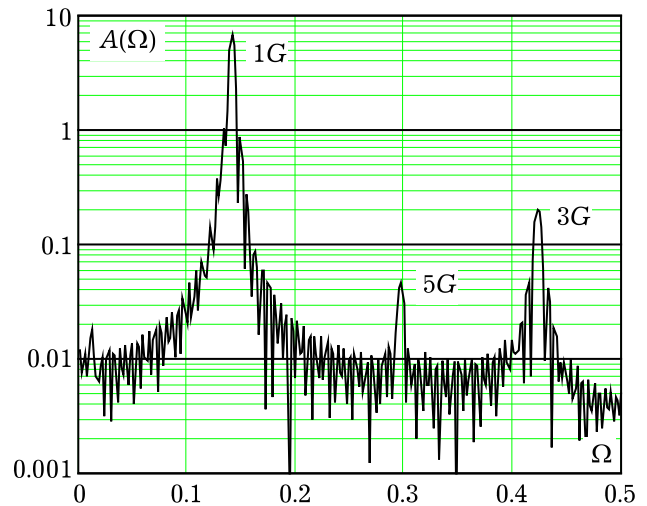


Рис. 3. Амплитудный спектр автоколебаний

та комплексной огибающей также содержится в решении амплитудного уравнения (12). Такое решение в теории нелинейных колебаний носит название улучшенного первого приближения [8].

Амплитудный спектр на рис. 3, где символами kG обозначены линии k -ых гармоник, рассчитанный для анализируемой реализации автоколебаний, демонстрирует неустраняемый эффект подмены частот в нелинейных ДВ-системах. При определенных условиях он приводит к существенным особенностям в динамике ДВ-АКС [9; 10].

4. Генерация хаоса дискретным отображением осциллятора Ван дер Поля

Ранее [11] отмечалось, что в ДВ-АКС, синтезированной по аналоговому прототипу – осциллятору Ван дер Поля, наблюдаются режимы хаотических автоколебаний. Они имеют место

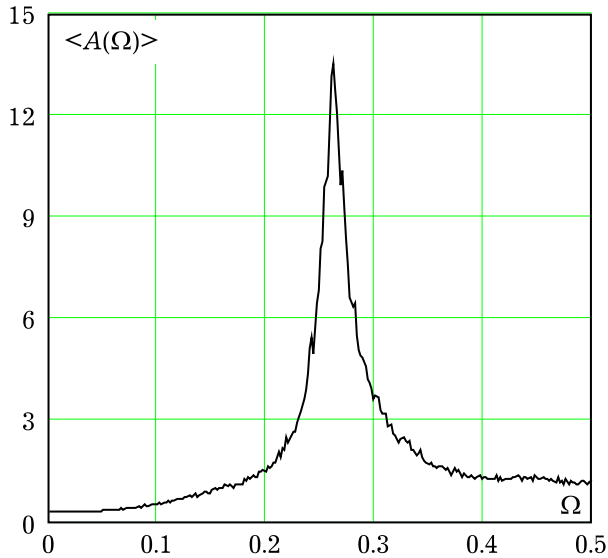


Рис. 4. Усредненный амплитудный спектр хаотических автоколебаний

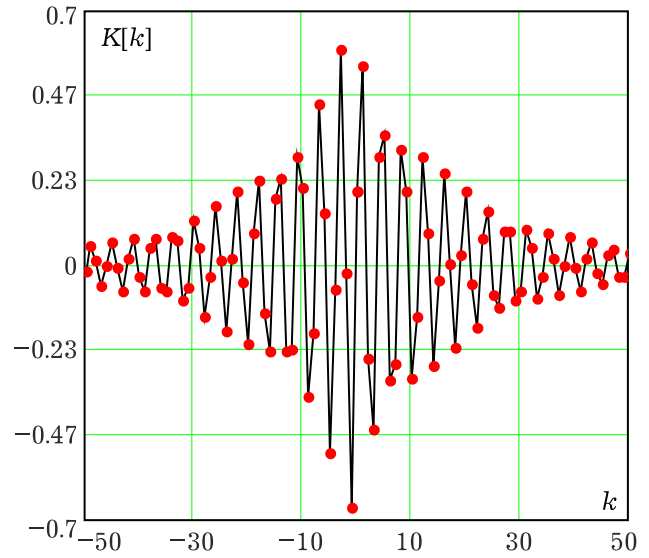


Рис. 6. Взаимная корреляционная функция компонент хаотических автоколебаний

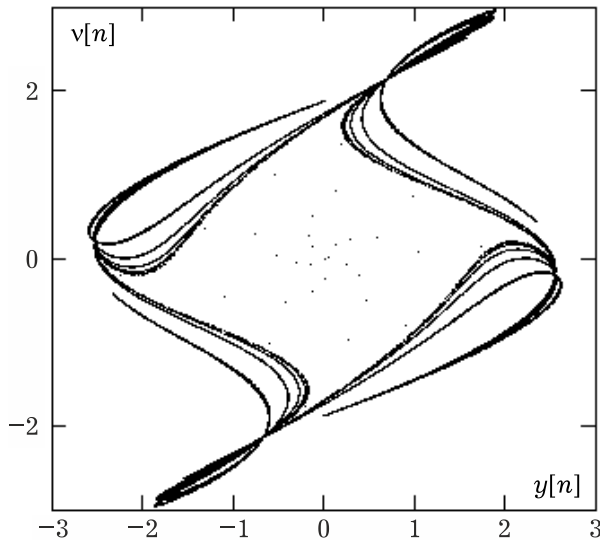


Рис. 5. Фазовый портрет хаотических автоколебаний

и в дискретном отображении (16), модифицированным следующим образом:

$$\begin{aligned} y[n] &= \alpha Z_0 y_+[n-1] + \alpha Z_0^* y_+^*[n-1], \\ y_+[n] &= \alpha Z_0 y_+[n-1] - \\ &- j\gamma_e (1 - y^2[n-1])(\rho y[n] - y[n-1]), \end{aligned} \quad (18)$$

то есть введением параметра ρ вместо $\cos(2\pi\Omega_0)$ в формулу (9) для дискретной аппроксимации скорости \dot{y} . При $\rho = 1$ отображение (18) эквивалентно уравнению движения ДВ-осциллятора Ван дер Поля из статьи [11].

На рис. 4 приведен усредненный амплитудный спектр автоколебаний, генерируемых отображением (18) с параметрами $\Omega_0 = 0.22$, $Q = 13$, $\gamma_e = 0.131$ и $\rho = 0.75$. Уширенная спектральная линия является одним из эвристических признаков хаоса. Подтверждением хаотического ре-

жима служит также имеющий ярко выраженную фрактальную структуру фазовый портрет дискретного отображения, представленный на рис. 5 в координатах $(y[n], v[n] = \dot{y}[n])$.

Наряду с хаотическими автоколебаниями $y[n]$ отображение генерирует и их компоненты $\text{Re}(y_+[n])$ и $\text{Im}(y_+[n])$. Степень корреляции компонент иллюстрирует взаимная корреляционная функция $K[k] = \langle \text{Re}(y_+[n]) \cdot \text{Im}(y_+[n+k]) \rangle$, показанная на рис. 6.

Заключение

Представленная здесь новая форма дискретных отображений томсоновских осцилляторов расширяют круг объектов нелинейной динамики в дискретном времени, имеющих свойства аналоговых автоколебательных систем. Практические применения предложенных отображений весьма разнообразны – моделирование сигналов и систем, нелинейная фильтрация дискретных (цифровых) сигналов, защита информации (в режимах генерации динамического хаоса).

Список литературы

1. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
2. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
3. Заславский Г.М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.; Ижевск: НИЦ «РХД»; Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. 472 с.
4. Зайцев В.В., Нураев Д.Б., Шилин А.Н. Осцилляторы Ван дер Поля, Рэля, Дюффинга в динамике с дискретным временем // Вестник Самарского университета. Аэ-

- рокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2016. Т. 15. № 1. С. 187–196.
5. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука, 1984. 320 с.
 6. Зайцев В.В. О дискретных отображениях осциллятора Ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17. № 1. С. 35–40.
 7. Зайцев В.В., Карлов А.В. Дискретное отображение осциллятора с нелинейной диссипацией и частотное детектирование ДВ-сигналов // Радиотехника. 2014. № 4. С. 50–54.
 8. Боголюбов А.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. Изд. 4-е. М.: Наука, 1974. 504 с.
 9. Зайцев В.В., Стулов И.В. О влиянии подменных гармоник на динамику автоколебаний в дискретном времени // Известия вузов – ПНД. 2015. Т. 23. № 6. С. 40–44.
 10. Зайцев В.В., Стулов И.В., Шилин А.Н. Субгармоническая синхронизация автоколебаний в дискретном времени // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2015. № 10(132). С. 134–132.
 11. Зайцев В.В., Зайцев О.В., Яровой Г.П. Статистические характеристики хаотических автоколебаний дискретного осциллятора Ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2001. Т. 4. № 1. С. 18–21.

Complex form of discrete mappings of Thomson self-oscillatory systems

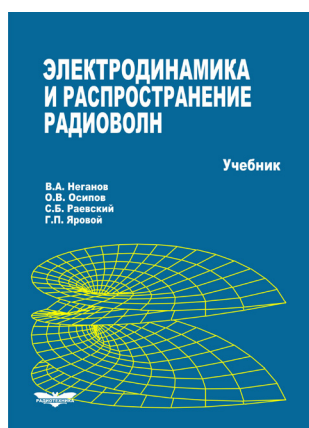
V.V. Zaitsev, O.V. Zaitsev, A.N. Shilin

New discrete mappings of Thomson type self-oscillatory systems are offered. Mappings are received by method of structural synthesis with use of the sequences of discrete counting of pulse characteristics of the resonators which are a part of self-oscillatory systems. The method of the slow-changing amplitudes is used for the analysis of response characteristics of self-oscillations in the discrete time. The example of generation of self-oscillations with discrete mapping of the oscillator of Van der Pol is given.

Keywords: self-oscillatory system, non-linear dynamics, the discrete mapping, method of the slow-changing amplitudes, chaotic self-oscillations.

Неганов, В.А.

Электродинамика и распространение радиоволн: учебник / В.А. Неганов [и др.]; под ред. В.А. Неганова и С.Б. Раевского. – Изд. 4-е, доп. и перераб. – М.: Радиотехника, 2009. – 744 с.



ISBN 978-5-88070-154-4

УДК 537.87(075.3)
ББК 22.3
Н 41

Книга написана активно работающими в области электродинамики учеными. Излагаются теория электромагнитного поля с акцентом на радиотехническую электродинамику и анализ волновых процессов; рассматриваются отражение и преломление волн, излучение и дифракция; описываются основные закономерности распространения электромагнитных волн в различных безграничных средах (изотропных, анизотропных, диспергирующих, неоднородных), в направляющих и резонансных структурах, в природных условиях. Обсуждаются методы математического моделирования в электродинамике, опирающегося на применение ЭВМ.

Отличительной особенностью книги является обсуждение современных проблем электродинамики: расчет электромагнитных волн в ближних зонах излучающих структур (самосогласованный метод расчета), комплексных волн в волноведущих структурах и др.

Предназначается для студентов радиотехнических и радиофизических специальностей вузов, а также инженеров-радиотехников и радиофизиков.