2017 г. Том 20, № 3
Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 535.417.2

Комплексный резонанс как явление, описываемое самосогласованной присоединенной краевой задачей

А.С. Раевский[1], *С.Б. Раевский*[1], *А.Ю. Седаков*[1,2]

[1] Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
603950, Российская Федерация, г. Нижний Новгород
ул. Минина, 24
[2] ФГУП «ФНПЦ НИИИС им. Ю.Е. Седакова»
603137, Российская Федерация, г. Нижний Новгород
ул. Тропинина, 47

Устанавливается соответствие между свойствами комплексного резонанса и особенностями несамосопряженных самосогласованных присоединенных краевых задач. Явление, классифицируемое как «комплексный резонанс», имеет место в электродинамических структурах, описываемых несамосопряженными краевыми задачами. Показывается, что при парном возбуждении комплексных волн, имеющих комплексную сопряженность по волновым числам и амплитудам, образуется колебание, «присоединенное» к источнику, которое описывается присоединенным уравнением Гельмгольца, то есть уравнением, в правой части которого стоит решение однородной краевой задачи. Особенность комплексного резонанса заключается в том, что он существует во всем диапазоне комплексных волн при обязательном присутствии источника.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение Гельмгольца, комплексные волны, комплексный резонанс, несамосопряженная краевая задача, присоединенная волна, присоединенное колебание, самосогласованная задача.

Введение

Наиболее общим решениям несамосопряженных краевых задач соответствуют [1–3] комплексные собственные значения. В электродинамических задачах комплексность собственных значений приводит к комплексности волновых чисел. Комплексные волновые числа в направляющих структурах без диссипации энергии соответствуют комплексным волнам [4; 5]. Парное возбуждение комплексных волн (КВ) с комплексно сопряженными амплитудами приводит к возникновению комплексного резонанса [6–9]. Особенностью его является [6–8] существование во всем диапазоне КВ. Отрезок волновода, в котором могут существовать КВ, включенный «на проход» или «на отражение», обнаруживает резонансные свойства во всем диапазоне существования пары комплексных волн. Это замечательное свойство электродинамических структур, направляющих КВ, может быть использовано при построении различных частотно-избирательных устройств [7].

Поскольку колебание, соответствующее комплексному резонансу, может существовать только в присутствии источника, его не следует считать собственным. Его следует называть колебанием, «присоединенным» к источнику [10–13], а краевую задачу, описывающую его, полагать неоднородной.

1. Задача о возбуждении КВ

Поскольку комплексные волны описываются собственными функциями несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка, «порождаемого» [14] системой однородных уравнений Максвелла, их поля должны [1–3] удовлетворять условию:

$$\int\limits_{S_i}\left\{\left[\vec{E}_n\vec{H}_k\right]-\left[\vec{E}_k\vec{H}_n\right]\right\}d\vec{S}=\mathrm{const},$$

где S_i – произвольное сечение исследуемого волновода, n и k номера собственных волн.

Это условие может выполняться только либо при отсутствии у подынтегрального выражения зависимости от продольной координаты, либо при тождественном равенстве интеграла нулю. Объединяя эти два варианта, записываем:

$$\int\limits_{S_i}\left\{\left[\vec{E}_n\vec{H}_k\right]-\left[\vec{E}_k\vec{H}_n\right]\right\}d\vec{S}=\begin{cases}N, & k=-n;\\ 0, & k\neq -n.\end{cases} \quad (1)$$

Равенство (1) является записью условия ортогональности собственных волн экранированного волновода в энергетическом смысле. С использованием его амплитуду прямой комплексной волны – I, распространяющейся справа от источника, получаем в виде:

$$A = \frac{1}{N}\int\limits_V \left(\vec{j}^{\,e}\vec{E}^{(-)} - \vec{j}^{\,m}\vec{H}^{(-)}\right)dV, \tag{2}$$

амплитуду обратной комплексной волны – II, также распространяющейся справа от источника [1–3] записываем как

$$\bar{A} = \frac{1}{N}\int\limits_V \left(\vec{j}^{\,e}\vec{\bar{E}}^{(-)} - \vec{j}^{\,m}\vec{\bar{H}}^{(-)}\right)dV. \tag{3}$$

В (2,3) $\vec{E}^{(-)}$ и $\vec{H}^{(-)}$ – поля комплексной волны с продольным волновым числом $\beta^{(-)} = -\beta$, где β – продольное волновое число прямой волны – I. $\vec{\bar{E}}^{(-)}$ и $\vec{\bar{H}}^{(-)}$ – поля комплексной волны с продольным волновым числом $\bar{\beta}^{(-)} = -\bar{\beta}$, где $\bar{\beta}$ – продольное волновое число обратной комплексной волны II.

Вводя обозначения:

$$\frac{\omega\mu}{r}\frac{\partial\psi^h}{\partial\varphi} + \beta\frac{\partial\psi^e}{\partial r} = E_{r_0}; \quad \omega\mu\frac{\partial\psi^h}{\partial r} - \frac{\beta}{r}\frac{\partial\psi^e}{\partial\varphi} = E_{\varphi_0};$$

$$-\beta\frac{\partial\psi^h}{\partial r} + \frac{\varepsilon\omega}{r}\frac{\partial\psi^e}{\partial\varphi} = H_{r_0}; \quad \frac{\beta}{r}\frac{\partial\psi^h}{\partial\varphi} + \omega\varepsilon\frac{\partial\psi^e}{\partial r} = H_{\varphi_0};$$

и учитывая связи между амплитудными коэффициентами потенциальных функций $\psi_{1,2}^{e,h}$ во внутреннем и внешнем слоях волновода, записываем:

$$\begin{aligned}
&E_r = -iE_{r_0}e^{-i\beta z}; \quad E_r^{(-)} = iE_{r_0}e^{i\beta z};\\
&\bar{E}_r = iE_{r_0}^*e^{i\beta^* z}; \quad \bar{E}_r^{(-)} = -iE_{r_0}^*e^{-i\beta^* z};\\
&E_\varphi = -iE_{\varphi_0}e^{-i\beta z}; \quad E_\varphi^{(-)} = -iE_{\varphi_0}e^{i\beta z};\\
&\bar{E}_\varphi = iE_{\varphi_0}^*e^{i\beta^* z}; \quad \bar{E}_\varphi^{(-)} = iE_{\varphi_0}^*e^{-i\beta^* z};\\
&E_z = \alpha^2\psi^e e^{-i\beta z}; \quad E_z^{(-)} = \alpha^2\psi^e e^{i\beta z};\\
&\bar{E}_z = \alpha^{*2}\psi^{e^*}e^{i\beta^* z}; \quad \bar{E}_z^{(-)} = \alpha^{*2}\psi^{e^*}e^{-i\beta^* z};\\
&H_r = iH_{r_0}e^{-i\beta z}; \quad H_r^{(-)} = iH_{r_0}e^{i\beta z};\\
&\bar{H}_r = iH_{r_0}^*e^{i\beta^* z}; \quad \bar{H}_r^{(-)} = iH_{r_0}^*e^{-i\beta^* z};\\
&H_\varphi = -iH_{\varphi_0}e^{-i\beta z}; \quad H_\varphi^{(-)} = -iH_{\varphi_0}e^{i\beta z};\\
&\bar{H}_\varphi = -iH_{\varphi_0}^*e^{i\beta^* z}; \quad \bar{H}_\varphi^{(-)} = -iH_{\varphi_0}^*e^{-i\beta^* z};\\
&H_z = \alpha^2\psi^h e^{-i\beta z}; \quad H_z^{(-)} = -\alpha^2\psi^h e^{i\beta z};\\
&\bar{H}_z = -\alpha^{*2}\psi^{h^*}e^{i\beta^* z}; \quad \bar{H}_z^{(-)} = \alpha^{*2}\psi^{h^*}e^{-i\beta^* z}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Как видим из (4), поля прямой и обратной комплексных волн связаны равенствами:

$$\vec{\bar{E}} = \vec{E}^*; \quad \vec{\bar{H}} = -\vec{H}^*. \tag{5}$$

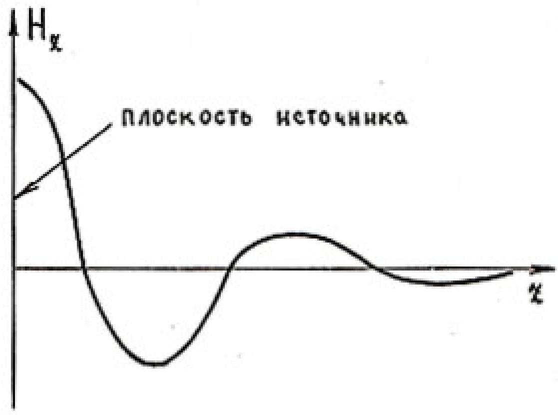

Рис. Поле стоячей волны, локализованное вблизи источника

Полагая, что поля в волноводе возбуждаются токами: $\vec{I}^e = \vec{j}^{\,e}$ и $I^m = i\vec{j}^{\,m}$, являющимися действительными функциями координат, исходя из выражений (2), (3), с учетом (4) и (5) получаем:

$$\begin{aligned}
A = &\\
= &\frac{1}{N}\int\limits_V\left(-j_r^eE_{r_0} + j_\varphi^eE_{\varphi_0} - \alpha^2 j_z^m\psi^h\right)\sin\beta z dV +\\
+ &\frac{1}{N}\int\limits_V\left(\alpha^2 j_z^e\psi^e + j_r^mH_{r_0} - j_\varphi^mH_{\varphi_0}\right)\cos\beta z dV +\\
+ &i\frac{1}{N}\int\limits_V\left(j_r^eE_{r_0} - j_\varphi^eE_{\varphi_0} + \alpha^2 j_z^m\psi^h\right)\cos\beta z dV +\\
+ &i\frac{1}{N}\int\limits_V\left(\alpha^2 j_z^e\psi^e + j_r^mH_{r_0} - j_\varphi^mH_{\varphi_0}\right)\sin\beta z dV;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{A} = &\\
= &\frac{1}{N}\int\limits_V\left(-j_r^eE_{r_0}^* + j_\varphi^eE_{\varphi_0}^* - \alpha^{*2} j_z^m\psi^{h^*}\right)\sin\beta^* z dV +\\
+ &\frac{1}{N}\int\limits_V\left(\alpha^{*2} j_z^e\psi^{e^*} + j_r^mH_{r_0}^* - j_\varphi^mH_{\varphi_0}^*\right)\cos\beta^* z dV -\\
- &i\frac{1}{N}\int\limits_V\left(j_r^eE_{r_0}^* - j_\varphi^eE_{\varphi_0}^* + \alpha^{*2} j_z^m\psi^{h^*}\right)\cos\beta^* z dV -\\
- &i\frac{1}{N}\int\limits_V\left(\alpha^{*2} j_z^e\psi^{e^*} + j_r^mH_{r_0}^* - j_\varphi^mH_{\varphi_0}^*\right)\sin\beta^* z dV.
\end{aligned}$$

Таким образом, при выбранных источниках амплитуды прямой и обратной комплексных волн, распространяющихся справа от источника, связаны равенством: $\vec{A} = A^*$, из которого следует, что обе указанные волны возбуждаются совместно и с одинаковыми по модулю амплитудами и имеют комплексно сопряженные поперечные волновые числа. Совместное существование двух указанных волн приводит к образованию поля стоячей волны, локализованного вблизи источника, рисунок.

2. Условие возбуждения собственной КВ

Возбуждение поля стоячей волны, затухающего при удалении от источника, рисунок, говорит о возникновении в двухслойном волноводе, в области существования комплексных волн, резонанса, который называем [6] комплексным. Определим условия преимущественного возбуждения одной из комплексных волн. Выберем функции распределения источников в виде:

$$j^e = j_r^e = j_0^e e^{-i\beta z}; \quad j^m = j_m = i j_0^m e^{-i\beta z}, \tag{6}$$

где β совпадает с продольным волновым числом комплексной волны I, j_0^e и j_0^m – действительные величины. Подставив (6) в (2), (3) и выполнив интегрирование по продольной координате, с учетом выражений (4) получаем:

$$A = \int_S \left(j_0^m H_{r_0} + i j_0^e E_{r_0}\right) dS \left(z_2 - z_1\right), \tag{7}$$

$$\overline{A} = \frac{1}{2\beta_1} \int_S \left(j_0^e E_{r_0}^* + i j_0^m H_{r_0}^*\right) dS \left[\cos 2\beta_1 z_2 - \right.$$
$$\left. - \cos 2\beta_1 z_1 - i\left(\sin 2\beta_1 z_2 - \sin 2\beta_1 z_1\right)\right], \tag{8}$$

где S – поперечное сечение волновода, $\left[z_1 \div z_2\right]$ – интервал, в котором заключены источники.

Из (8) видим, что, если:

$$z_2 - z_1 = \frac{1}{2} n \lambda_{\text{В}}, \tag{9}$$

амплитуда обратной комплексной волны II равна нулю, в то время как, в соответствии с (7), амплитуда прямой волны I отлична от нуля. В (9) $\lambda_{\text{В}} = \frac{2\pi}{\beta_1}$; $n = 1, 2, 3\ldots$ Таким образом, источники поля в виде антенн бегущей волны (6), подбором интервалов, по продольной оси волновода, в которых заключены эти источники, можно добиться возбуждения только одной КВ. Это говорит о том, что рассматриваемые комплексные волны могут существовать независимо как собственные. При независимом существовании волн с комплексными волновыми числами в системе без диссипации энергии их природа может быть объяснена только при отсутствии переноса этими волнами через поперечное сечение направляющей системы реальной мощности [1; 6; 14], что является следствием образования встречных потоков мощности [1–3].

Задача о возбуждении одной КВ источником типа антенны бегущей волны является самосогласованной, а КВ в этом случае следует называть волной, присоединенной к источнику, поскольку ее поле удовлетворяет присоединенному уравнению Гельмгольца, в правой части которого стоит решение соответствующей однородной краевой задачи.

Источники, описываемые действительными функциями координат, возбуждают в круглом двухслойном экранированном волноводе по обе стороны от себя по две комплексных волны с противоположно направленными фазовыми скоростями. Это приводит к возникновению стоячей волны, поле которой локализовано вблизи источника. При этом отрезок волновода, включаемый «на проход» или «на отражение» (в первом случае в плоскости симметрии, перпендикулярной оси волновода, располагаются возбуждающий и воспринимающий электроды, во втором – лишь один возбуждающий электрод), во всем диапазоне комплексных волн ведет себя как резонатор и имеет при этом фильтрующие свойства. Поскольку в отличие от обычного резонанса отмеченное явление, возникающее в двухслойном экранированном волноводе, обнаруживает резонансные свойства (возрастание выходного сигнала в схеме «на проход» и резкое падение коэффициентов стоячей волны $K_{\text{ст}U}$ в схеме «на отражение») во всем частотном диапазоне комплексных волн, оно классифицировано [6] как «комплексный резонанс».

Резонансным признаком рассматриваемого явления служит факт увеличения запасенной энергии в указанной выше полосе частот, что позволяет ввести понятие добротности (в энергетической формулировке), вычислить ее и измерить косвенным методом. Признаком принадлежности краевой задачи, описывающей КР, к присоединенным является присоединенное уравнение Гельмгольца, признаком несамосопряженности краевой задачи – образование КР в результате взаимодействия КВ, признаком самосогласованности – синхронизм правой и левой частей присоединенного уравнения Гельмгольца.

Заключение

Показано, что в диапазоне существования комплексных волн при условии их парного возбуждения в круглом двухслойном экранированном волноводе возникает резонансное явление, получившее [6] название «комплексный резонанс». Колебание, соответствующее комплексному резонансу предлагается классифицировать как присоединенное к источнику, поскольку теоретически оно описывается краевой задачей на присоединенном уравнении Гельмгольца, в правой части которого стоит функция, являющаяся решением однородной краевой задачи. Такая задача (на присоединенном уравнении Гельмгольца) является самосогласованной, поскольку правая часть присоединенного уравнения Гельмгольца находится в синхронизме с левой.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-19-01628).

Список литературы

1. Веселов Г.И., Раевский С.Б. Слоистые металло-диэлектрические волноводы. М.: Радио и связь, 1988. 248 с.
2. Раевский А.С., Раевский С.Б. Неоднородные направляющие структуры, описываемые несамосопряженными операторами. М.: Радиотехника, 2004. 112 с.
3. Раевский А.С., Раевский С.Б. Комплексные волны. М.: Радиотехника, 2010. 223 с.
4. Раевский С.Б. Комплексные волны в двухслойном круглом экранированном волноводе // Изв. вузов СССР. Радиофизика. 1972. Т. 15. № 1. С. 112–116.
5. Раевский С.Б. О существовании комплексных волн в некоторых двухслойных изотропных структурах // Изв. вузов СССР. Радиофизика. 1972. Т. 15. № 12. С. 1926–1931.
6. Веселов Г.И., Калмык В.А., Раевский С.Б. Исследование комплексных волн двухслойного экранированного волновода // Радиотехника. 1980. Т. 35. № 9. С. 59–62.
7. Веселов Г.И., Калмык В.А., Раевский С.Б. Полосовой фильтр на двухслойном круглом экранированном волноводе в режиме комплексных волн // Изв. вузов СССР. Радиофизика. 1983. Т. 26. № 8. С. 900–903.
8. Иванов А.Е., Раевский С.Б. Комплексный резонанс в структуре на основе круглого двухслойного экранированного волновода // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36. № 8. С. 1463–1468.
9. Раевский А.С., Раевский С.Б., Цинин О.Т. Комплексный резонанс в круглом двухслойном экранированном волноводе // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2002. Т. 5. № 2. С. 40–45.
10. Малахов В.А., Раевский А.С., Раевский С.Б. Присоединенные волны в круглом двухслойном экранированном волноводе // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. Вып. 2. С. 71–79.
11. Malakhov V.A., Raevskii A.S., Raevskii S.B. Added solutions of boundary value for double-layer guiding structures // Journal of Electromagnetics and Applications. 2012. Vol. 2. № 5. P. 114–119.
12. Раевский А.С., Раевский С.Б. Присоединенные волны как волны, создаваемые источником типа антенны бегущей волны // Письма в ЖТФ. 2013. № 23. С. 13–17.
13. Раевский А.С., Раевский С.Б., Седаков А.Ю. Колебания и волны, присоединенные к источнику // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17. № 3. С. 6–9.
14. Веселов Г.И., Раевский С.Б. Комплексные волны в поперечно-неоднородных направляющих структурах // Радиотехника. 1987. Т. 42. № 8. С. 64–67.

Complex resonance as a phenomenon described by a self-consistent adjoint boundary value problem

A.S. Raevsky, S.B. Raevsky, A.Yu. Sedakov

A correspondence is established between the properties of a complex resonance and the singularities of non-self-adjoint self-consistent adjoint boundary-value problems. A phenomenon classified as a «complex resonance» takes place in electrodynamic structures described by non-self-adjoint boundary-value problems. It is shown that in the case of pair excitation of complex waves having complex conjugation in wave numbers and amplitudes, a vibration «attached» to the source is formed, which is described by the adjoint Helmholtz equation, that is, the equation on the right side of which is the solution of the homogeneous boundary value problem. A feature of complex resonance is that it exists in the entire range of complex waves with the obligatory presence of a source.

Keywords: boundary value problem, Helmholtz equation, complex waves, complex resonance, nonselfadjoint boundary value problem, adjoint wave, coupled oscillation, self-consistent problem.