

## Оценка влияния коррелированных негауссовских помех на точность измерения информационных параметров сигнала

В.М. Артюшенко<sup>1</sup>, В.И. Воловач<sup>2</sup>, В.Н. Будилов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Технологический университет  
141070, Российская Федерация, Московская обл., г. Королев  
ул. Гагарина, 42

<sup>2</sup> Поволжский государственный университет сервиса  
445017, Российская Федерация, Самарская обл., г. Тольятти  
ул. Гагарина, 48

Проведена оценка потенциальной точности измерения информационных параметров сигнала на фоне коррелированных негауссовских аддитивных и мультипликативных помех в условиях ближнего действия. Показано, что точность измерения параметров сигнала возрастает с увеличением отличия плотности распределения вероятности оцениваемого параметра и воздействующей помехи от гауссовской. Отмечается, что увеличение коэффициента корреляции приводит к повышению обобщенного отношения сигнал/помеха и точности измерения информационных параметров. Показано, что мультипликативная помеха ведет к смещению оцениваемых параметров движения, а учет смещения позволяет перейти к несмещенным оценкам.

*Ключевые слова:* протяженный объект, негауссовская аддитивная помеха, негауссовская мультипликативная помеха, отношение сигнал/помеха, погрешность измерения.

### Введение

Известно [1; 2 и др.], что в радиолокации вопросы измерения (оценки) параметров сигналов, несущих информацию о движении целей (объектов), являются традиционными и достаточно подробно изучены. Это в равной степени относится как к точечным, так и сложным дискретным целям [3–5]. Вместе с тем измерение информационных параметров сигнала движущихся объектов в условиях ближнего действия изучены недостаточно и имеют ряд теоретических и практических особенностей [6–8 и др.].

При оценке параметров сигналов в большинстве случаев считается, что на полезный сигнал воздействует только аддитивная помеха, описываемая, как правило, гауссовской плотностью распределения вероятности (ПРВ). Однако, как показывают проведенные исследования, принимаемый измерителем сигнал подвержен воздействию не только со стороны аддитивных [9–11], но и мультипликативных помех [12–15], имеющих ярко выраженный негауссовский характер. В результате, существует определенный интерес к оценке влияния негауссовских аддитивных и мультипликативной помех на точность измерения параметров движения протяженных объектов. Остановимся в настоящей статье на

исследовании влияния коррелированных негауссовских помех на полезный сигнал.

Как известно [16], методы решения задачи оптимальной оценки параметров сигнала можно получить, основываясь на математической статистике и теории нелинейной фильтрации. Осуществим оценку информационных параметров в дискретном времени наблюдения. Примем, что в течение времени  $[0, T]$  наблюдаются выборки случайного процесса  $Y_h \equiv Y(t_y)$  ( $h = 1, \dots, H$ ), являющегося смесью полезного сигнала  $S(\vec{\lambda}, t_h)$  и негауссовской аддитивной  $n(t_h)$  либо мультипликативной  $\eta(t_h)$  помехи. При этом сигнал содержит совокупность параметров  $\vec{\lambda} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ , подлежащих измерению (оцениванию), причем считается, что на интервале наблюдения эти параметры остаются неизменными. Для определения количественных оценок измеряемых параметров используем нижние границы неравенства Крамера – Рао [17; 18]. Влияние негауссовских аддитивных помех на точность измерения параметров будем оценивать отношением дисперсии погрешности измерения при наличии негауссовских аддитивных помех к дисперсии погрешности измерения, когда эти помехи являются гауссовскими.

Отметим, что оценке будут подлежать только неэнергетические информационные пара-

метры полезного сигнала. При этом считается, что оценки являются функциями достаточных статистик и обладают асимптотическими свойствами состоятельности, несмещенности и нормальности.

Выражение нижней границы неравенства Крамера – Рао для дисперсии несмещенных параметров полезного сигнала  $\lambda$  запишется [19] в виде:

$$\sigma_{\lambda ij}^2 \geq |J_{ij}|/|J|; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $|J_{ij}|$  – алгебраическое дополнение элемента  $J_{ij}$  информационной матрицы Фишера  $\|J\|$ ;  $|J|$  – определитель матрицы  $\|J\|$ .

### 1. Оценка точности измерения информационных параметров сигнала на фоне коррелированных негауссовских аддитивных помех

Оценка  $\hat{\lambda}$  информационного параметра  $\lambda$  полезного сигнала  $s(\lambda, t)$  по максимуму апостериорной ПРВ может быть определена из уравнения

$$\left. \frac{dW_y(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0.$$

Учитывая, что  $W_y(\lambda) = CW_\lambda(\lambda)W_\Pi(\lambda)$ , где  $C$  – постоянная нормировки;  $W_\lambda(\lambda)$  – априорная ПРВ;  $W_\Pi(\lambda)$  – функция правдоподобия, запишем:

$$\left. \frac{dW_y(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = \left[ \frac{d \ln W_\Pi(\lambda)}{d\lambda} + \frac{d \ln W_\lambda(\lambda)}{d\lambda} \right]_{\lambda=\hat{\lambda}} = 0.$$

Откуда в соответствии с теоремой Крамера – Рао дисперсия любой несмещенной оценки информационного параметра определяется неравенством [16]:

$$M \left\{ (\hat{\lambda} - \lambda)^2 \right\} \geq \left[ -M \left\{ \frac{d^2 \ln W_\Pi(\lambda)}{d\lambda^2} \right\} - M \left\{ \frac{d^2 \ln W_\lambda(\lambda)}{d\lambda^2} \right\} \right]^{-1},$$

где усреднение осуществляется по результатам наблюдения и характеристикам случайного параметра  $\lambda$ .

Преобразуем предыдущее выражение к виду:

$$M \left\{ (\hat{\lambda} - \lambda)^2 \right\} \geq \left[ -M \left\{ \frac{d^2 \ln W_\Pi(\lambda)}{d\lambda^2} \right\} + I_\Phi^\lambda \right]^{-1}, \quad (2)$$

где

$$I_\Phi^\lambda = -M \left\{ \frac{d^2 \ln W_\lambda(\lambda)}{d\lambda^2} \right\}$$

– количество информации по Фишеру, заключенное в одномерной ПРВ  $W_\lambda(\lambda)$ .

Перейдем далее непосредственно к случаю, когда информационный параметр оценивается на фоне коррелированной негауссовской аддитивной помехи. Будем считать, что помеха описывается переходной ПРВ  $W_n(n_h | n_{h-1})$ . Как уже отмечалось выше, оценка информационного параметра ведется в дискретном времени наблюдения на интервале  $[0, T]$ , причем  $\hat{\lambda}_h = \hat{\lambda}_{h-1} = \hat{\lambda}$ .

Логарифм функции правдоподобия (ЛФП), входящий в (2), существует и описывается выражением:

$$B_n(n) = \ln W_n \left\{ y_h - s(\hat{\lambda}, t_h) \middle| y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1}) \right\}, \quad (3)$$

где  $y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-i}) = n_{h-i}$ ,  $i = 0, 1$ .

При этом функция правдоподобия удовлетворяет условиям регулярности [20]:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}} \ln W_n \left\{ y_h - s(\hat{\lambda}, t_h) \middle| y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1}) \right\} \right\rangle = 0; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}^2} \ln W_n \left\{ y_h - s(\hat{\lambda}, t_h) \middle| y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1}) \right\} \right\rangle = \\ & = \left\langle \left[ \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}} \ln W_n \left\{ y_h - s(\hat{\lambda}, t_h) \middle| y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1}) \right\} \right]^2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Запишем производную ЛФП (3) по информационному параметру в виде:

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}} \ln W_n \left\{ y_h - s(\hat{\lambda}, t_h) \middle| y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1}) \right\} \right\rangle = \\ & = H^{-1} \sum_{h=1}^H \left[ -\frac{d}{dn_h} \ln W_n(n_h | n_{h-1}) s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) - \right. \\ & \left. - \frac{d}{dn_{h-1}} \ln W_n(n_h | n_{h-1}) s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) \right] = \\ & = H^{-1} \sum_{h=1}^H \left[ -B_{n,h}^{n'} s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) - B_{n,h-1}^{n'} s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1}) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что соотношение (4) выполняется, если

$$\left\langle \frac{d}{dn_{h-i}} \ln W_n(n_h | n_{h-i}) \right\rangle = 0, \quad i = 0, 1. \quad (7)$$

С учетом соотношений (5), (7), дифференцируя (6), получим

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}^2} \ln W_n \left\{ y_h - s(\hat{\lambda}, t_h) \middle| y_{h-1} - s(\hat{\lambda}, t_{h-1}) \right\} \right\rangle = \\ & = H^{-1} \sum_{h=1}^H \left[ B_{n,h,h}^{n''} \left[ s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) \right]^2 + \right. \end{aligned} \quad (8)$$

$$+ 2B_{n,h,h-1}^{n''} \left[ s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1}) \right] + \\ + B_{n,h-1,h-1}^{n''} \left[ s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1}) \right]^2.$$

Усреднив (8) не только по множеству, но и по времени, и используя результаты, полученные [21], преобразуем (8) к виду:

$$\tilde{B}_\lambda^{n''} = I_{n,11}^n P_{11} + 2I_{n,12}^n P_{12} + I_{n,22}^n P_{22}. \quad (9)$$

Правая часть (9), согласно [18], представляет собой след матрицы  $IP$

$$\text{tr}[IP] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 I_{ij} P_{ij}; \quad i, j = 1, 2,$$

где  $I_{ij} = I_{n,\alpha\beta}^n$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ) – составляющие информационной матрицы Фишера относительно аддитивной помехи, заключенные в переходной ПРВ  $W_n(n_h | n_{h-1})$ ;  $P_{ij}$  – элементы матрицы  $\|P\|$ , определенные в [21]:

$$i = j: P_{ij} = P_{s'} = \lim_{H \rightarrow \infty} H^{-1} \sum_{h=1}^H [s'_i]^2;$$

$$i \neq j: P_{ij} = P_{s's_j} = \lim_{H \rightarrow \infty} H^{-1} \sum_{h=1}^H [s'_i s'_j];$$

$$i, j = 1, 2.$$

С учетом сказанного, выражение (9) можно записать в виде:

$$\tilde{B}_\lambda^{n''} = \text{tr}[IP].$$

Тогда, выражение для нижней границы неравенства Крамера – Рао в общем случае запишется:

$$\sigma_{\lambda,k}^2 \geq \left[ \text{tr}[IP] + I_\Phi^\lambda \right]^{-1}. \quad (10)$$

При оценке измеряемого параметра методом максимального правдоподобия (10) переходит в неравенство:

$$\sigma_{\lambda,k}^2 \geq \left[ \text{tr}[IP] \right]^{-1}. \quad (11)$$

Заметим, что в случае некоррелированной помехи выражения (10), (11) переходят в известные выражения [21].

Если на полезный сигнал воздействует коррелированная гауссовская помеха с переходной ПРВ вида:

$$W_n(n_h | n_{h-1}) = \left[ 2\pi\sigma_{n,h} (1 - r_n^2) \right]^{-0,5} \times \\ \times \exp \left\{ \left( -n_h - \sigma_{n,h} \sigma_{n,h-1}^{-1} r_n n_{h-1} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left( 2\sigma_{n,h} (1 - r_n^2)^{-1} \right) \right\},$$

где  $\sigma_{n,h}$  и  $\sigma_{n,h-1}$  – соответственно, дисперсия величины  $n$  на шаге  $h$  и  $h-1$ ;  $r_n$  – коэффициент

корреляции выборок  $n_h$  и  $n_{h-1}$ , с учетом того, что в этом случае информационная матрица Фишера гауссовского случайного процесса  $n(t)$  имеет вид [21]:

$$\|I_{\Phi,r}\| = \begin{vmatrix} I_{\Phi,11} & I_{\Phi,12} \\ I_{\Phi,21} & I_{\Phi,22} \end{vmatrix} = \\ = \left[ \sigma_n^2 (1 - r_n^2) \right]^{-1} \begin{vmatrix} 1 & -r_n \\ -r_n & r_n^2 \end{vmatrix},$$

а так же элементов матрицы  $\|P\|$ , определяемых выражениями:

$$P_{11} = \lim_{H \rightarrow \infty} H^{-1} \sum_{h=1}^H \left[ s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) \right]^2;$$

$$P_{11} = P_{21} = \\ = \lim_{H \rightarrow \infty} H^{-1} \sum_{h=1}^H \left[ s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1}) \right];$$

$$P_{22} = \lim_{H \rightarrow \infty} H^{-1} \sum_{h=1}^H \left[ s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1}) \right]^2,$$

после несложных математических преобразований, запишем (11) в виде:

$$\sigma_{\lambda,k}^2 \geq \left\{ \frac{\left[ s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_h) - r_n s'_\lambda(\hat{\lambda}, t_{h-1}) \right]^2}{\sigma_n^2 (1 - r_n^2)} \right\}^{-1} = \\ = \left\{ \frac{[\Delta s_h]^2}{\sigma_n^2 (1 - r_n^2)} \right\}^{-1}. \quad (12)$$

Данное выражение вплоть до обозначений полностью совпадает с выражением, полученным в работах [22; 23] для случая коррелированных гауссовских помех.

Перепишем (12) в виде:

$$\sigma_{\lambda,k}^2 \geq [\rho_{г.к}]^{-1},$$

где

$$\rho_{г.к} = \frac{[\Delta s_h]^2}{\sigma_n^2 (1 - r_n^2)}$$

– величина, играющая роль отношения сигнал/помеха (ОСП) при измерении информационного параметра на фоне гауссовской аддитивной помехи с дисперсией  $\sigma_n^2$  и коэффициентом корреляции  $r_n$ .

В работе [24] показано, что величину  $\rho_{г.к}$  необходимо рассматривать в спектральном представлении

$$\rho_{г.к} = \frac{0,5}{\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \frac{|s_s(\omega)|^2}{s_n(\omega)} d\omega,$$

где  $|s_s(\omega)|$  – амплитудный спектр сигнала;  $s_n(\omega)$  – энергетический спектр помехи;  $\Delta t = h - (h-1)$ .

В том случае, когда аддитивная помеха сильно коррелирована  $r_n \rightarrow 1$ , то есть спектр  $s_n(\omega)$  уже спектра  $|s_n(\omega)|$ , получаем, согласно [22]:

$$|s_s(\omega)| \gg \frac{1}{2\pi s_n(0)} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} |s_s(\omega)|^2 d\omega = P_s \sigma_n^{-2}, \quad (13)$$

где  $P_s \sigma_n^{-2} = \rho_{\Gamma\Gamma}$  – обобщенное ОСП при воздействии некоррелированной гауссовской аддитивной помехи.

Как видно из (13)

$$\rho_{\Gamma\Gamma} \gg \rho_{\Gamma\Gamma}, \quad (14)$$

и, следовательно:

$$\sigma_{\lambda.\Gamma\Gamma}^2 \ll \sigma_{\lambda.\Gamma\Gamma}^2. \quad (15)$$

Таким образом, увеличение коэффициента корреляции приводит к увеличению обобщенного ОСП, что, в свою очередь, ведет к уменьшению погрешности измерения информационного параметра, а значит и к повышению точности его измерения.

Воспользовавшись сведениями из публикаций [21; 25], введем соотношение

$$\mu = I_{\Phi}^n / I_{\Phi.\Gamma}^n, \quad (16)$$

характеризующее предельную эффективность измерения (оценки) информационного параметра  $\hat{\lambda}$  на фоне негауссовской помехи с переходной ПРВ  $W_n(n_h | n_{h-1})$  по сравнению с оценкой при воздействии гауссовской помехи, для которой дисперсия  $\sigma_n^2$  и коэффициент корреляции  $r_n$  совпадают с дисперсией и коэффициентом корреляции коррелированной гауссовской помехи [22].

Напомним, что величина  $I_{\Phi}^n$  зависит от вида ПРВ  $W_n(n_h | n_{h-1})$ , причем, чем больше ПРВ отличается от гауссовской, тем больше величина коэффициента  $\mu$ . Для гауссовской переходной ПРВ  $W_n(n_h | n_{h-1})$  можно записать:

$$I_{\Phi.\Gamma}^n = \frac{[s_{\lambda}'(\hat{\lambda}, t_h) - r_n s_{\lambda}'(\hat{\lambda}, t_{h-1})]^2}{\sigma_n^2 (1 - r_n^2)}. \quad (17)$$

Апостериорная погрешность измерения (оценки) информационного параметра при воздействии на полезный сигнал негауссовской коррелированной помехи с учетом выражений (11), (16) и (17) будет определяться:

$$\sigma_{\lambda.\Gamma\Gamma}^2 \geq [\text{utr}[IP]]^{-1} = \left\{ \frac{[s_{\lambda}'(\hat{\lambda}, t_h) - r_n s_{\lambda}'(\hat{\lambda}, t_{h-1})]^2}{\mu \sigma_n^2 (1 - r_n^2)} \right\}^{-1}. \quad (18)$$

Как видно из неравенства (18), с увеличением отличия переходной ПРВ  $W_n(n_h | n_{h-1})$  от га-

уссовской точность измеряемого (оцениваемого) параметра возрастает.

Следует отметить, что поскольку согласно [23; 25]  $\mu \geq 1$ , то с учетом неравенств (14) и (15) получаем, что при воздействии коррелированной негауссовской помехи апостериорная дисперсия измерения информационного параметра  $\sigma_{\lambda.\Gamma\Gamma}^2$  всегда меньше, чем апостериорная дисперсия при воздействии той же негауссовской помехи, но имеющей некоррелированный характер  $\sigma_{\lambda.\Gamma\Gamma}^2$  то есть  $\sigma_{\lambda.\Gamma\Gamma}^2 \gg \sigma_{\lambda.\Gamma\Gamma}^2$

Рассмотрим далее влияние величины коэффициента  $\mu$  на оценку информационного параметра сигнала на примере приведенной погрешности измерения

$$\delta_{\lambda}^2 = \sigma_{\lambda.v}^2 / \sigma_{\lambda.\Gamma\Gamma}^2$$

где  $\sigma_{\lambda.v}^2$  – апостериорная погрешность измерения при воздействии коррелированной негауссовской помехи, описывающейся переходной ПРВ вида:

$$W(n_h | n_{h-1}) = \frac{v}{2\Gamma(v^{-1})\sigma} \left[ \frac{\Gamma(3/v)}{(1-r^2)\Gamma(v^{-1})} \right]^{0.5} \times \exp \left\{ - \left[ \frac{\Gamma(3/v)}{(1-r^2)\Gamma(v^{-1})} \right]^{v/2} \left[ \frac{|n_h - r n_{h-1}|^v}{\sigma^v} \right] \right\}, \quad (19)$$

здесь  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция.

В этом случае, информационная матрица имеет вид [21]:

$$\|I_{\Phi}\| = \frac{v(v-1)\Gamma(3/v)\Gamma(11-v^{-1})}{\sigma_n^2 \Gamma^2(1/v)(1-r_n^2)} \begin{vmatrix} 1 & -r_n \\ -r_n & r_n^2 \end{vmatrix} = A(v)I_{\Phi.\Gamma},$$

где

$$A(v) = \frac{v(v-1)\Gamma(3/v)\Gamma(11-v^{-1})}{\Gamma^2(1/v)}; \quad v \geq 2$$

– константа, зависящая от параметра ПРВ.

Тогда, согласно (16)

$$\mu = \frac{I_{\Phi}^n}{I_{\Phi.\Gamma}^n} A(v) = \frac{v(v-1)\Gamma(3/v)\Gamma(11-v^{-1})}{\Gamma^2(v^{-1})}.$$

Запишем выражение для приведенной погрешности в виде:

$$\delta_{\lambda}^2 = [\mu\rho]^{-1} = \left\{ \frac{\Gamma^2(v^{-1})}{[v(v-1)\Gamma(3/v)\Gamma(1-v^{-1})]\rho} \right\}$$

где  $\rho = \rho_v / \rho_{\Gamma\Gamma}$ ;  $\rho_v$  – обобщенное ОСП при воздействии негауссовской помехи с ПРВ (19).

Отметим, что при  $\nu = 2$  ПРВ вида (21) переходит в гауссовское [21], при этом, как видно из (16),  $\mu = 1$ .

На рис. 1 показаны зависимости, из которых видно, что на приведенную погрешность измерения информационного параметра влияет не только величина  $\rho$ , играющая роль приведенного обобщенного ОСП, но и параметр  $\nu$ , определяющий значение  $\mu$ . При этом, чем больше  $\nu$  отлжно от 2 ( $\mu = 1$ ), тем меньше величина приведенной погрешности.

Повторив вышеизложенные рассуждения для случая совместной оценки нескольких информационных параметров полезного сигнала на фоне коррелированной в общем случае негауссовской помехи, приходим к выводу, что предельная эффективность измерения (оценки) (см. (18)) в этом случае является такой же, как и при измерении одного информационного параметра. При этом необходимо помнить, что величину обобщенного ОСП, входящую в выражение, определяющее оценки нижних границ неравенства Крамера – Рао (см. (1)), как это было показано ранее, необходимо рассматривать в спектральном представлении.

## 2. Оценка точности измерения информационных параметров в условиях негауссовских мультипликативных помех

Как известно [13; 21; 26], воздействие мультипликативной помехи на полезный сигнал приводит в общем случае к смещению оценки измеряемых (оцениваемых) параметров. В этом случае математическое ожидание оценки информационного параметра  $\hat{\lambda}$  будет смещено относительно  $\lambda$ :

$$m_1 \{ \hat{\lambda} = b(\lambda) \} = \int_y b(\lambda) W_{\Pi}(\lambda) dy = \lambda + \Delta(\lambda),$$

где  $b(\lambda)$  – оценка неслучайного параметра  $\lambda$ ;  $W_{\Pi}(\lambda)$  – функция правдоподобия, зависящая как от параметра  $\lambda$ , так и от реализации  $y = y_1, \dots, y_n$ ; ( $y \in Y$ ), наблюдаемого случайного процесса;  $\Delta(\lambda)$  – смещение оценки.

Дисперсия смещенной оценки находится как

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{\lambda}=b(\lambda)}^2 &= m_1 \{ b(\lambda) - \lambda - \Delta(\lambda) \}^2 = \\ &= m_1 \{ b(\lambda) - m_1 [b(\lambda)] \}^2. \end{aligned}$$

Нижняя граница дисперсии смещенной оценки, определяемая неравенством Крамера – Рао, в этом случае будет иметь вид [18]:

$$\sigma_{\hat{\lambda}=b(\lambda)}^2 \geq \frac{\left[ \frac{db(\lambda)}{d\lambda} \right]^2}{m_1 \left\{ \frac{\partial \ln W_{\Pi}(\lambda)}{\partial \lambda} \right\}^2},$$

здесь  $b(\lambda) = \lambda + \Delta(\lambda)$ .

Следует отметить, что, как правило, для смещенной оценки информационного параметра ее точность определяется не дисперсией, а среднеквадратическим отклонением от оцениваемого параметра  $\lambda$  [18]:

$$\sigma_{\hat{\lambda}=b(\lambda)}^2 = \left[ m_1 \{ (b(\lambda) - \lambda)^2 \} \right]^{0,5}.$$

Данное выражение показывает полную ошибку измерения (оценивания) информационного параметра, учитывающую смещение оценки, вызванное мультипликативной помехой.

В большинстве случаев определить величину смещения достаточно сложно. Обычно для этого применяют метод вариационного исчисления [27]. Сравнительно просто определить смещение лишь в том случае, если само смещение не зависит от оцениваемого параметра  $\Delta(\lambda) \equiv \Delta$ . В этом случае при определении нижних границ неравенства Крамера – Рао можно перейти к несмещенной оценке информационного параметра  $b(\lambda) = \lambda$ .

В качестве примера определим величину смещения, вызываемую воздействием на полезный сигнал  $s(\lambda, t_h)$  мультипликативной помехи  $\eta(t_h)$ , описываемой ПРВ Накагами:

$$\begin{aligned} W(U) &= \\ &= (2/\Gamma(m)) (m/\Omega)^m U^{2m-1} \exp\{-mU^2/\Omega\}, \\ U &\geq 0, \end{aligned}$$

где

$$m = \Omega^2 / \langle (U^2 - \Omega^2)^2 \rangle \geq 0,5,$$

$\Omega = \langle U^2 \rangle$  – параметры распределения.

Считаем, что помеха и оцениваемый параметр между собой независимы. В этом случае величина смещения определяется математическим ожиданием модулирующей помехи и будет зависеть лишь от параметров ее распределения:

$$\Delta = m_1 = \frac{\Gamma(m+0,5)(\Omega/m)^{0,5}}{\Gamma(m)}. \quad (20)$$

Отметим, что параметр распределения  $m$  в этом случае может служить мерой глубины флюктуаций интенсивности мультипликативной

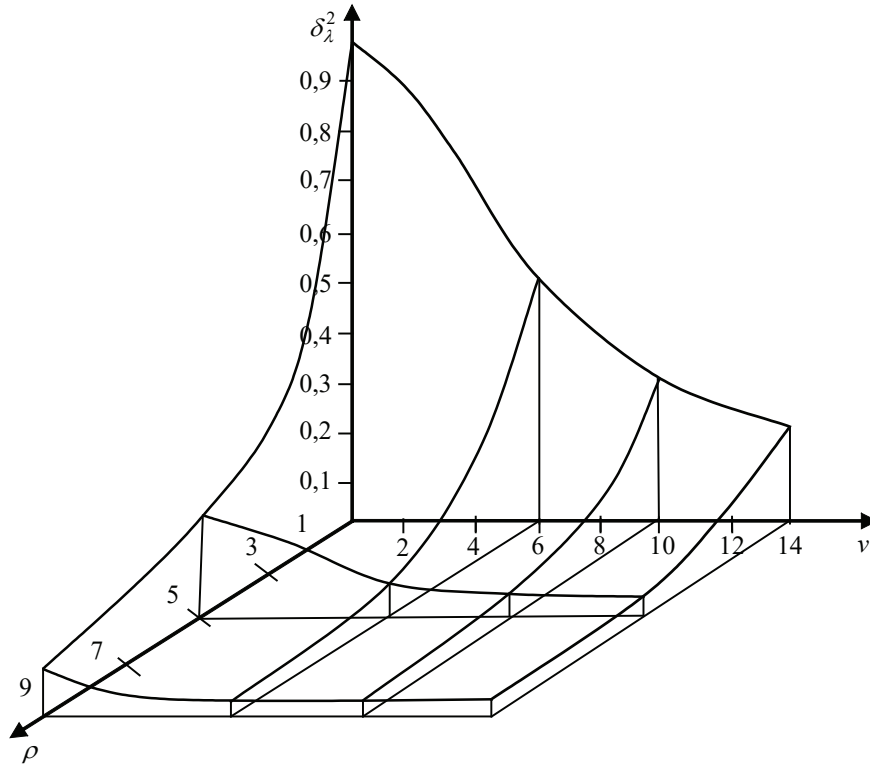


Рис. 1. Зависимости приведенной погрешности  $\delta_\lambda^2$  от приведенного обобщенного ОСП  $\rho$  и параметра  $\nu$

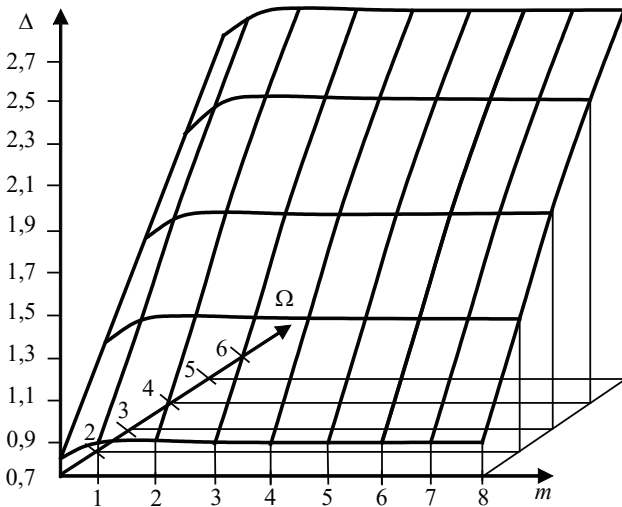


Рис. 2. Зависимости смещения оценки  $\Delta$  информационного параметра от параметров  $m$  и  $\Omega$  распределения Накагами

помехи, определяемый как отношение квадрата средней мощности воздействующей помехи  $\Omega = m_1 \{ \eta^2 \} = \langle \eta^2 \rangle$  к ее дисперсии [28; 29]:

$$m = \frac{[m_1 \{ \eta^2 \}]^2}{m_1 \{ \eta^4 \} - [m_1 \{ \eta^2 \}]^2},$$

где  $m_1 \{ \eta^n \}$  – начальный момент  $n$ -го порядка интенсивности мультипликативной помехи.

На рис. 2 приведены зависимости  $\Delta = f(m, \Omega)$ , характеризующие величину смещения от пара-

метров распределения мультипликативной помехи.

Как видно из выражения (20) и приведенных зависимостей, с увеличением параметра  $\Omega$ , характеризующего среднюю мощность мультипликативной помехи, величина смещения также возрастает. При изменении глубины флуктуации интенсивности мультипликативной помехи, определяемой значением параметра  $m$ , в диапазоне от 0,5 до 1 смещение практически не меняется. Таким образом, если известны параметры распределения мультипликативной помехи, то можно определить вносимую ею величину смещения, после чего, как это было показано выше, если смещение не зависит от оцениваемого параметра, легко перейти к несмещенной оценке информационного параметра.

Рассмотрим далее оценку информационного параметра на фоне коррелированной мультипликативной помехи. Для упрощения расчетов с сохранением получаемых результатов примем, что оценка имеет несмещенный характер. Считаем, что помеха описывается переходной ПРВ  $W_\eta(\eta|\eta_{h-1})$ . Как уже отмечалось в начале статьи, измерение (оценка) информационного параметра на интервале  $[0, T]$  ведется в дискретном времени, причем  $\lambda = \lambda_h = \lambda_{h-1}$ . ЛПФ существует и определяется выражением:

$$B_{\eta}(\eta) = \ln W_{\eta} \left\{ y(t_h) / s(\hat{\lambda}, t_h) \middle| y(t_{h-1}) / s(\hat{\lambda}, t_{h-1}) \right\} \times \left| s^{-1}(\hat{\lambda}, t_h) \right|,$$

где

$$\frac{y(t_{h-i})}{s(\hat{\lambda}, t_{h-i})} = \eta_{h-i}; \quad i = 0, 1.$$

Считаем, что функция правдоподобия удовлетворяет условиям регулярности:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \lambda} B_{\eta}(\eta) \right\rangle = 0;$$

$$\left\langle \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} B_{\eta}(\eta) \right\rangle = \left\langle \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} B_{\eta}(\eta) \right]^2 \right\rangle.$$

Воспользовавшись методикой, подробно рассмотренной при выводе апостериорной погрешности измерения информационных параметров на фоне коррелированных аддитивных негауссовских помех [21], и, опуская громоздкие математические выкладки, запишем:

$$\tilde{B}_{\lambda}^{\eta} = \text{tr}[IP] = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 I_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (21)$$

где  $I_{\alpha\beta}$  – составляющие информационной матрицы, элементы которой равны:

$$\text{при } \alpha = \beta: I_{11} = I_{22} = \left[ I_{D,\alpha\beta}^{\eta} - 1 \right];$$

$$\text{при } \alpha \neq \beta: I_{12} = I_{21} = I_{D,\alpha\beta}^{\eta}; \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Здесь  $I_{D,\alpha\beta}^{\eta}$  – составляющие матрицы Фишеровской информации относительно мультипликативной помехи, заключенные в переходной ПРВ  $W_{\eta}(\eta_h | \eta_{h-1})$ ;  $P_{ij}$  – элементы матрицы  $\|P\|$ :

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha = \beta: P_{\alpha\alpha} &= \sigma_{k,i}^2 = \tilde{K}_i^2 = \\ &= H^{-1} \sum_{i=1}^H \left[ s'_{\lambda}(\hat{\lambda}_{h-i}) s^{-1}(\hat{\lambda}_{h-i}) \right]^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } \alpha \neq \beta: P_{\alpha\beta} &= R_k = \tilde{K}_i \tilde{K}_j = \\ &= \sum_{i=1}^H s'_{\lambda}(\hat{\lambda}_h) s^{-1}(\hat{\lambda}_h) s'_{\lambda}(\hat{\lambda}_{h-i}) s^{-1}(\hat{\lambda}_{h-i}). \end{aligned}$$

Выражение для определения нижней границы неравенства Крамера – Рао при несмещенной оценке, будет иметь такой же вид, как и в случае оценки на фоне аддитивной коррелированной помехи.

При оценке по максимуму апостериорной ПРВ:

$$\sigma_{\lambda,k\eta}^2 \geq \left[ \text{tr}[IP] + I_{\Phi}^{\lambda} \right]^{-1}.$$

При оценке по максимуму правдоподобия:

$$\sigma_{\lambda,k\eta}^2 \geq \left[ \text{tr}[IP] \right]^{-1}.$$

Так как [21]

$$I_{\Phi,h} \{ W_{\Pi}(\Pi_h) \leq I_{\Phi,k} \{ W_{\Pi}(\Pi_h | \Pi_{h-1}) \},$$

где  $I_{\Phi,h}$  и  $I_{\Phi,k}$  – соответственно, количество информации по Фишеру, содержащаяся в одномерной  $W_{\Pi}(\Pi_h)$  и переходной  $W_{\Pi}(\Pi_h | \Pi_{h-1})$  ПРВ помехи, то можно показать, что

$$\left| \tilde{B}_{\lambda,k}^{\Pi} \right| > \left| \tilde{B}_{\lambda,h}^{\Pi} \right|.$$

Здесь  $\tilde{B}_{\lambda,k}^{\Pi}$  и  $\tilde{B}_{\lambda,h}^{\Pi}$  – соответственно, вторые производные ЛФП по информационному параметру при воздействии коррелированной мультипликативной помехи и помехи с независимыми значениями.

Тогда, с учетом (21) можно записать, что:

$$\sigma_{\lambda,k\eta}^2 < \sigma_{\lambda,\eta}^2. \quad (22)$$

В результате, как видно из (22), при учете корреляции мультипликативной помехи апостериорная погрешность измерения информационных параметров уменьшается, что ведет к увеличению точности их оценки, что полностью совпадает с результатами известных работ, например, изложенными в [13].

Нетрудно видеть, что, повторив выше изложенные рассуждения для случая одновременной оценки нескольких информационных параметров на фоне коррелированных мультипликативных помех, приходим к одному и тому же выводу, что при наличии в радиолокационном измерителе канала оценки мультипликативной помехи учет корреляции модулирующей помехи позволяет повысить потенциальную точность измеряемых параметров.

## Заключение

Таким образом, осуществлена оценка точности измерения информационных параметров полезных сигналов, содержащих информацию о параметрах движения объектов на фоне коррелированных негауссовских аддитивных и мультипликативных помех. Показано, что учет негауссовского характера воздействующей коррелированной аддитивной помехи приводит к значительному повышению точности измерения параметров сигнала. В частности, увеличение коэффициента корреляции приводит к увеличению обобщенного ОСП, что, в свою очередь, ведет к повышению потенциальной точности измерения параметров.

Рассмотрены граничные значения неравенства Крамера – Рао для совместной и раздельной оценки информационных параметров полезного сигнала на фоне коррелированных мультипликативных помех. Показано, что в общем

случае мультипликативная помеха ведет к смещению оцениваемых информационных параметров, причем, чем больше величина смещения, тем точность измерения хуже. Учет смещения, вызванный модулирующей помехой, позволяет перейти к несмещенным оценкам. Показано, что учет корреляции мультипликативной помехи ведет к уменьшению погрешности измерения оцениваемых параметров.

### Список литературы

1. Финкельштейн М.И. Основы радиолокации. М.: Радио и связь, 1983. 536 с.
2. Radar handbook / ed. by M.I. Skolnik. 2nd ed. N.-Y.: McGraw-Hill, 1990. 1199 p.
3. Родимов А.П., Поповских В.В. Статистическая теория поляризационно-временной обработки сигналов и помех. М.: Радио и связь, 1984. 272 с.
4. Радиолокационные характеристики летательных аппаратов / М.Е. Марганов [и др.]; под ред. Л.Т. Тучкова. М.: Радио и связь, 1985. 236 с.
5. Фалькович С.Е., Хомяков Э.Н. Статистическая теория измерительных радиосистем. М.: Сов. радио, 1981. 288 с.
6. Extended object tracking using a radar resolution model / L. Hammarstrand [et al.] // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 2012. Vol. 48. № 3. P. 2371–2386.
7. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Оценка погрешности измерения параметров движения протяженных объектов в условиях изменяющейся дальности // Известия вузов. Радиоэлектроника. 2015. Т. 58. № 1. С. 26–37.
8. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Статистические характеристики сигналов и помех при обнаружении и измерении параметров движения протяженных объектов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2015. Т. 18. № 1. С. 60–67.
9. Островитянов Р.В., Басалов Ф.А. Статистическая теория радиолокации протяженных целей. М.: Радио и связь, 1982. 232 с.
10. Фельдман Ю.И., Мандуровский И.А. Теория флуктуаций локационных сигналов, отраженных распределенными целями. М.: Радио и связь, 1983. 222 с.
11. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Измерение информационных параметров сигнала в условиях воздействия аддитивных негауссовских коррелированных помех // Автометрия. 2016. Т. 52. № 6. С. 22–28.
12. Kassam S.A. Signal Detection in Non-Gaussian Noise. N.-Y.: Springer Verlag, 1989. 242 p.
13. Кремер И.Я., Владимиров В.И., Карпунин В.И. Модулирующие (мультипликативные) помехи и прием радиосигналов / под ред. И.Я. Кремера. М.: Сов. радио, 1972. 480 с.
14. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Идентификация параметров распределения аддитивных и мультипликативных негауссовских помех Автометрия. 2017. Т. 53. № 3. С. 36–43.
15. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Статистические характеристики смеси сигнала и аддитивно-мультипликативных помех с негауссовским характером распределения // Радиотехника. 2017. № 1. С. 95–102.
16. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.
17. Тихонов В.И., Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М.: Сов. радио, 1975. 704 с.
18. Левин Б.Р. Теоретические основы статической радиотехники; 3-е изд., перераб. и доп. М.: Сов. радио, 1989. 656 с.
19. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника; 2-е изд. перераб. и доп. М.: Сов. радио, 1982. 624 с.
20. Валеев В.Г. Помехоустойчивость радиотехнических измерительных систем. Свердловск: Изд-во УПИ, 1987. 101 с.
21. Артюшенко В.М. Обработка информационных параметров сигнала в условиях аддитивно-мультипликативных негауссовских помех. М.: ФГБОУ ВПО ФТА; изд-во «Канцлер», 2014. 298 с.
22. Валеев В.Т., Сосулин Ю.Г. Обнаружение слабых когерентных сигналов в коррелированных негауссовских помехах // Радиотехника и электроника. 1969. Т. 14. № 2. С. 230–238.
23. Валеев В.Г. Оптимальная оценка параметров сигнала при наличии негауссовских помех // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. № 2. С. 135–146.
24. Вайштейн Л.А., Зубаков В.Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М.: Сов. радио, 1960. 449 с.
25. Новоселов О.Н., Фомин А.Ф. Основы теории и расчета информационно-измерительных систем: 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
26. Обработка и преобразование сигналов в радиотехнических и инфокоммуникационных системах / под ред. В.И. Воловача. М.: Радио и связь, 2014. 448 с.
27. Бакут П.А., Логинов В.П., Шумилов Ю.П. Методы определения границ точности в задачах оценивания неизвестных параметров // Зарубежная радиоэлектроника. 1978. № 5. С. 3–36.
28. Долуханов М.П. Флуктуационные процессы при распространении радиосвязи. М.: Связь, 1971. 360 с.
29. Билетов М.В., Вассерштейн И.С., Рыльский В.В. Обнаружение радиолокационных сигналов при флуктуациях их интенсивности по закону Накагами // Радиотехника. 1976. Т. 31. № 1. С. 16–19.



## Estimation of influence of correlated non-Gaussian noise on measuring accuracy of signal information parameters

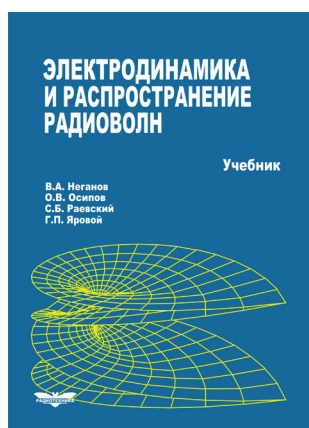
*V.M. Artyushenko, V.I. Volovach, V.N. Budilov*

The potential measuring accuracy of the signal information parameters on background of non-Gaussian correlated additive and multiplicative noise in short range conditions is estimated. It is shown that the accuracy of measuring of signal parameters increases with increasing difference between the probability density distribution of the estimated parameter and the influencing noise from the Gaussian one. It is noted that the increase in the correlation coefficient leads to increase in the generalized signal-to-noise ratio and the accuracy of measurement of information parameters. It is shown that the multiplicative noise leads to bias of the estimated parameters of motion, and accounting the bias allows you to move to unbiased estimates.

*Keywords:* extended object, non-Gaussian additive noise, non-Gaussian multiplicative noise, signal-to-noise ratio, measurement error.

**Неганов, В.А.**

**Электродинамика и распространение радиоволн:** учебник / В.А. Неганов [и др.]; под ред. В.А. Неганова и С.Б. Раевского. – Изд. 4-е, доп. и перераб. – М.: Радиотехника, 2009. – 744 с.



**ISBN 978-5-88070-154-4**

УДК 537.87(075.3)

ББК 22.3

Н 41

Книга написана активно работающими в области электродинамики учеными. Излагаются теория электромагнитного поля с акцентом на радиотехническую электродинамику и анализ волновых процессов; рассматриваются отражение и преломление волн, излучение и дифракция; описываются основные закономерности распространения электромагнитных волн в различных безграничных средах (изотропных, анизотропных, диспергирующих, неоднородных), в направляющих и резонансных структурах, в природных условиях. Обсуждаются методы математического моделирования в электродинамике, опирающегося на применение ЭВМ.

Отличительной особенностью книги является обсуждение современных проблем электродинамики: расчет электромагнитных волн в ближних зонах излучающих структур (самосогласованный метод расчета), комплексных волн в волноведущих структурах и др.

*Предназначается для студентов радиотехнических и радиофизических специальностей вузов, а также инженеров-радиотехников и радиофизиков.*