

## Гармоническая модель нелинейного резонанса в дискретном времени

В.В. Зайцев<sup>1</sup>, А.Н. Шилин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Самарский национальный исследовательский университет им. акад. С.П. Королева  
443086, Российская Федерация, г. Самара  
Московское шоссе, 34

<sup>2</sup> АО «РКЦ «Прогресс»  
443009, Российская Федерация, г. Самара  
ул. Земеца, 18

Нелинейность колебательной системы является источником высших гармоник основной частоты. Гармоники искажают форму колебаний и усложняют их динамику. В работе предложена новая математическая модель классического нелинейного явления – нелинейного резонанса. Модель описывает резонанс в дискретном времени. Ее особенность состоит в строгой монохроматичности вынужденных колебаний нелинейного осциллятора. В основе модели лежит популярный в прикладной теории нелинейных колебаний метод эквивалентной (гармонической) линеаризации. Свойство монохроматичности дискретных колебаний подтверждено в рамках численного эксперимента.

*Ключевые слова:* нелинейный резонанс, спектр нелинейных колебаний, уравнение Дюффинга, гармоническая линеаризация, дискретное время, разностные уравнения, дискретный осциллятор Дюффинга.

1. Вынужденные колебания нелинейных осцилляторов в окрестности резонанса (нелинейного резонанса) сопровождаются интенсивной генерацией высших гармоник частоты возбуждения [1], что усложняет динамику колебаний в нелинейной системе по сравнению с ее линейным вариантом. При этом гармонический состав и амплитуды гармоник во многом зависят от вида нелинейности системы. Классической математической моделью нелинейного резонанса является уравнение с кубической нелинейностью – уравнение Дюффинга [2; 3]. Физическое воплощение этой модели (осциллятор Дюффинга) легко найти, например, в радиотехнике – колебательный контур с нелинейной реактивностью [4; 5]. Также и обычный гравитационный маятник при углах отклонения  $\varphi \sim 1$  дает нам пример этого осциллятора.

Гармонический режим осциллятора Дюффинга в прикладной теории нелинейных колебаний рассматривается лишь как приближенное решение одноименного уравнения. Это (первое) приближение реализуется рядом асимптотических методов, в частности, методами гармонической линеаризации, медленно меняющихся амплитуд, усреднения [6]. Первый из них позволяет сформулировать уравнение движения линеаризованного осциллятора Дюффинга. Если теперь

этот линеаризованный осциллятор использовать в качестве аналогового прототипа в процессе временной дискретизации, то синтезированный по нему гармонический дискретный осциллятор Дюффинга (гармонический ДОД) можно рассматривать как самостоятельный объект нелинейной динамики в дискретном времени (ДВ-НД). Ожидается, что установившиеся вынужденные колебания в такой ДВ-системе свободны от высших гармоник частоты внешнего воздействия. Ниже намеченный подход находит практическое воплощение.

2. При проектировании (синтезе) объектов ДВ-НД по аналоговым прототипам способ дискретизации времени существенным образом влияет на результат проектирования. Наиболее широко используется дискретизация на основе конечно-разностного метода Эйлера (см., например, [7]). Тем не менее, в работах [8; 9] показано, что для осцилляторов томсоновского типа лучшие результаты дает физически обоснованное сочетание методов конечных разностей и медленно меняющихся амплитуд.

Применим вариант физически обоснованной дискретизации для синтеза гармонического ДОД. Базовым объектом линейной динамики в непрерывном времени (НВ-динамики) будем

считать диссипативный осциллятор с уравнением движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \cos(\omega_s t), \quad (1)$$

где  $\omega_0$  и  $Q$  – собственная частота и добротность осциллятора;  $\omega_s$  – частота внешнего воздействия с единичной амплитудой.

Требование сохранения импульсного отклика при переходе к дискретному времени в аналоговой системе (1) приводит нас к ДВ-осциллятору с разностным уравнением движения в дискретном времени  $n$ :

$$x_n - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0) x_{n-1} + \alpha^2 x_{n-2} = E \cos(2\pi\Omega_s(n-1)). \quad (2)$$

Здесь  $\Omega_0$  и  $\Omega_s$  – нормированные на частоту дискретизации частоты  $\omega_0$  и  $\omega_s$ ;  $\alpha = \exp(-\pi\Omega_0 / Q)$  – параметр диссипации;  $E = 2\pi\Omega_0 \alpha \sin(2\pi\Omega_0)$ .

В осцилляторе Дюффинга уравнением движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 (1 + 2\mu x^2) x = \omega_0^2 \cos(\omega_s t) \quad (3)$$

определим мгновенную частоту

$$\omega(t) = \omega_0 \sqrt{1 + 2\mu x^2(t)}.$$

Здесь  $\mu$  – коэффициент реактивной нелинейности. Тогда, используя метод параметрического синтеза, по аналогии с уравнением (2) можно записать уравнение движения ДОД в виде [10]

$$x_n - 2\alpha \cos\left(2\pi\Omega_0 \sqrt{1 + 2\mu x_{n-1}^2}\right) x_{n-1} + \alpha^2 x_{n-2} = E \cos(2\pi\Omega_s(n-1)). \quad (4)$$

При проектировании гармонического ДОД в качестве аналогового прототипа возьмем гармонически линеаризованный осциллятор (3), определяемый линеаризованным уравнением Дюффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 (1 + 2\mu_e a^2) x = \omega_0^2 \cos(\omega_s t). \quad (5)$$

где амплитуда осцилляций  $a = \sqrt{x^2 + (\dot{x} / \omega_s)^2}$ ,  $\mu_e = (3/4)\mu$ . В приближении метода гармонической линеаризации скорость осцилляций  $y = \dot{x} / \omega_s$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 (1 + 2\mu_e a^2) y = -\omega_0^2 \sin(\omega_s t). \quad (6)$$

Введя в рассмотрение комплексную осциллирующую переменную  $z = x + jy$  и почленно сложив (5) и (6), получим уравнение

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 (1 + 2\mu_e |z|^2) z = \omega_0^2 \exp(-j\omega_s t). \quad (7)$$

Переход к дискретному времени в (7), проведенный аналогично переходу (3) → (4), дает уравнение

$$z_n - 2\alpha \cos\left(2\pi\Omega_0 \sqrt{1 + 2\mu_e |z_{n-1}|^2}\right) z_{n-1} + \alpha^2 z_{n-2} = E \exp(-j2\pi\Omega_s(n-1)). \quad (8)$$

Естественным ограничением на величину параметра нелинейности  $\mu$  в (8) при его отрицательных значениях является неравенство  $\mu |z|^2 > -1$ . В противном случае не имеет особого смысла говорить о мнимой мгновенной частоте. Если же принять более жесткое ограничение  $|\mu |z|^2| \ll 1$ , то с точностью до членов первого порядка малости по этому параметру уравнение (8) можно заменить более простым:

$$z_n - 2\alpha \cos\left(2\pi\Omega_0 (1 + \mu_e |z_{n-1}|^2)\right) z_{n-1} + \alpha^2 z_{n-2} = E \exp(-j2\pi\Omega_s(n-1)). \quad (9)$$

Возможно и дальнейшее упрощение уравнения (9) путем разложения по малому параметру  $\cos(\epsilon)$  в его левой части:

$$z_n - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0) z_{n-1} + \alpha^2 z_{n-2} + \lambda |z_{n-1}|^2 z_{n-1} = E \exp(-j2\pi\Omega_s(n-1)). \quad (10)$$

где эффективный параметр нелинейности  $\lambda = 4\pi\Omega_0 \alpha \sin(2\pi\Omega_0) \mu_e$ . Впрочем, если принять (10) в качестве самостоятельного уравнения, то параметр  $\lambda$  можно считать независимым.

Таким образом, уравнения (8)–(10) представляют собой варианты гармонической модели нелинейного резонанса в дискретном времени – гармонического ДОД. Отметим, что уравнения (8) и (9) содержат нелинейность в мультипликативной форме, в то время как (10) – уравнение с аддитивной нелинейностью.

3. Приведем ряд результатов анализа колебаний дискретного осциллятора (9), подтверждающих, в частности, их гармоничность.

На рис. 1 сплошной линией показаны амплитудные спектры колебаний в осцилляторе (9) и пунктирной – в осцилляторе (4). Параметры осцилляторов и внешнего воздействия:  $\Omega_0 = 0.12$ ,  $Q = 20$ ,  $\mu = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\Omega_s = 0.13$ ,  $E = 1$ . Спектральные оценки проведены 1024-точечным дискрет-

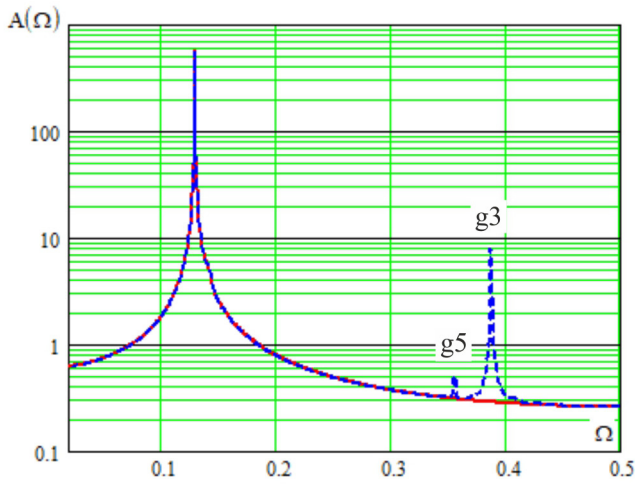


Рис. 1. Амплитудные спектры колебаний

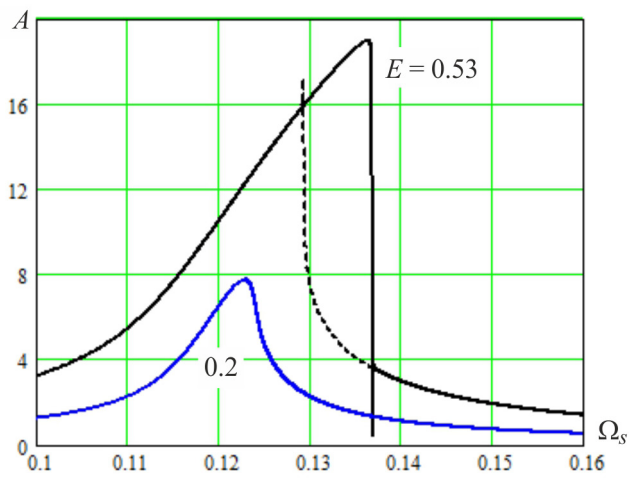


Рис. 2. Резонансные характеристики гармонического ДОД

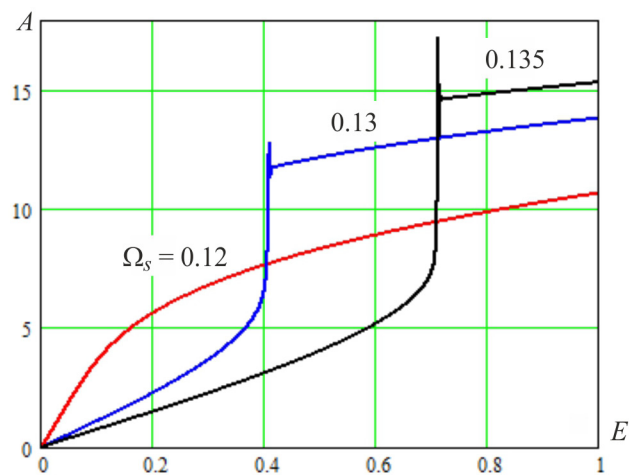


Рис. 3. Амплитудные характеристики гармонического ДОД

ным преобразованием Фурье. В спектре колебаний осциллятора (4), в отличие от осциллятора (9), отчетливо видны третья (g3) и пятая (подменная, g5) гармоники. Таким образом, гармоничность ДОД (9) находит подтверждение в рамках численного эксперимента.

Рис. 2 демонстрирует характерное свойство нелинейного резонанса – асимметрию и гистерезис частотных характеристик.

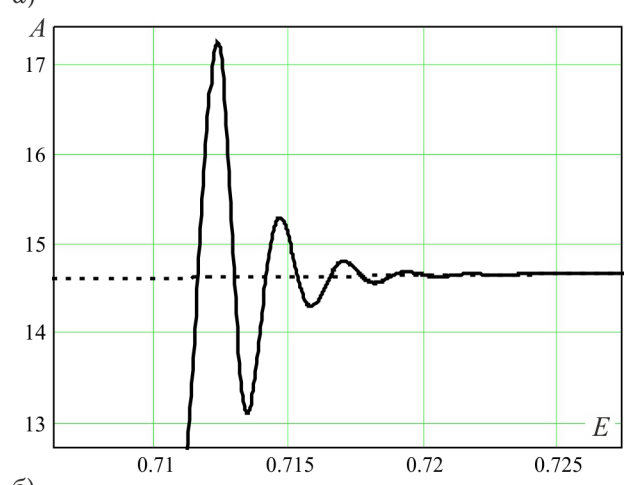
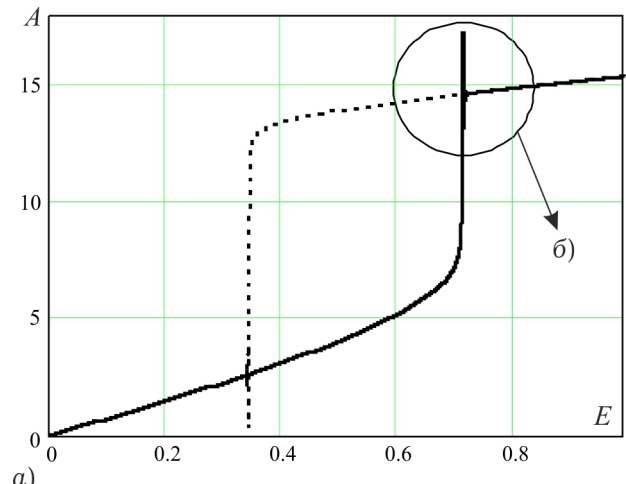


Рис. 4. Гистерезис и переходной процесс

резис частотных характеристик. Графики получены в режиме квазистатического изменения частоты внешнего воздействия. Ветвь характеристики, изображенная пунктирной линией, соответствует понижению частоты.

Зависимости амплитуды установившихся колебаний осциллятора с нелинейностью  $\mu = 0.001$  от амплитуды внешнего воздействия на различных частотах иллюстрируют графики на рис. 3. Эти амплитудные характеристики получены при квазистатическом увеличении амплитуды воздействия.

Гистерезис амплитудной характеристики на частоте  $\Omega_s = 0.135$  показан на рис. 4, а. В областях быстрых переходов между ветвями характеристики наблюдаются переходные процессы, подобные изображенному на рис. 4, б.

Таким образом, гармонический ДОД в форме (9), равно как в формах (8) и (10), отображает основные свойства нелинейного резонанса.

4. Представленные результаты (см., также, [11]) позволяют утверждать, что путем совмест-

ного использования методов теории нелинейных колебаний и синтеза дискретных систем удается ввести в рассмотрение новые объекты ДВ–НД, характеристики которых с одной стороны подобны характеристикам аналоговых прототипов, а с другой – демонстрируют эффекты, не наблюдаемые в непрерывном времени.

### Список литературы

1. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.
2. Найфе А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 356 с.
3. Kovacic I, Brennan M.J. The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour. N.-Y.: John Wiley & Sons, 2011. 386 p.
4. Основы теории колебаний. Изд 2-е, перераб. / под ред. В.В. Мигулина. М.: Наука, 1988. 392 с.
5. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. Изд. 2-е. М.: Физматлит, 2005. 292 с.
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 4-е, испр. и доп. М.: Наука, 1974. 504 с.
7. Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В. Бифуркация Богданова – Такенса: от непрерывной к дискретной модели // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17. № 6. С. 64–83.
8. Зайцев В.В., Федюнин Э.Ю., Шилин А.Н. Конечные разности в задаче синтеза нелинейных ДВ-осцилляторов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. Т. 20. № 2. С. 35–41.
9. Зайцев В.В. Дискретный осциллятор Ван дер Поля: Конечные разности и медленные амплитуды // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25. № 6. С. 70–78.
10. Зайцев В. В., Шилин А.Н., Юдин А.Н. Отображение осциллятора Дюффинга в дискретном времени // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17. № 2. С. 40–43.
11. Зайцев В.В., Федюнин Э.Ю. Генератор монохроматических автоколебаний в дискретном времени // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21. № 1. С. 54–57.

---

## The harmonic model of a nonlinear resonance in discrete time

*V.V. Zaitsev, A.N. Shilin*

The nonlinearity of oscillatory system is a source of the higher harmonics of the base frequency. Harmonics distort a form of oscillations and complicate their dynamics. In work the new mathematical model of the classical nonlinear phenomenon – a nonlinear resonance is offered. The model describes a resonance in discrete time. Her feature consists in strict monochromatic of the compelled oscillations of the nonlinear oscillator. The method of equivalent (harmonious) linearization, popular in the applied theory of nonlinear oscillations, is the cornerstone of model. The property of monochromaticity of discrete oscillations is confirmed within the numerical experiment.

*Keywords:* nonlinear resonance, spectrum of nonlinear oscillations, Duffing equation, harmonious linearization, discrete time, difference equations, discrete Duffing oscillator.

---