

Применение теории бифуркаций к анализу устойчивости импульсных стабилизаторов напряжения повышающего типа

А.А. Вороной, Р.М. Закиров, Д.В. Мишин

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Российская Федерация, г. Самара
ул. Л. Толстого, 23

В данной статье рассмотрено применение теории бифуркации к импульсным стабилизаторам напряжения повышающего типа, изучено его поведение, и проанализированы условия устойчивости при варьировании разных параметров системы. Также получены поверхности устойчивости импульсных стабилизаторов напряжения повышающего типа при варьировании разных параметров системы.

Ключевые слова: системы, устойчивость, бифуркация, дроссель, матрица Якоби.

Слово «бифуркация» означает «раздвоение» и употребляется как название любого скачкообразного изменения, происходящего при плавном изменении параметров в любой системе описываемой системой дифференциальных уравнений. В данной статье изучаются бифуркации фазовых портретов систем дифференциальных уравнений на примере импульсного стабилизатора напряжения (ИСН) повышающего типа.

Дифференциальные уравнения, описывающие любые реальные физические системы, всегда содержат параметры, точные значения которых, как правило неизвестны. В нашем случае, ИСН может иметь основные собственные параметры системы, такие, как например сопротивление нагрузки R , значение которых с течением времени может меняться по неизвестным законам. Это не говоря уже о том значения сопротивления резисторов, емкости конденсаторов и индуктивности дросселей не имеют точных значений, и на практике даются в виде диапазонов. Тем более, что при изменении внешних факторов, таких как температура и т. д. реальные значения этих параметров также изменяются. А поскольку, если уравнение, моделирующее физическую систему, оказывается структурно неустойчивым, то есть поведение его решений может качественно измениться при сколь угодно малом изменении правой части, то необходимо понять, какие бифуркации фазового портрета происходят при изменении параметров, и какие соответственно качественные изменения в системе произойдут в связи с этим.

DOI: 10.18469/1810-3189.2019.22.1.50-56

При изучении таких систем, часть переменных, мало меняющихся в ходе процесса, как правило, полагают постоянными. В результате получается система с меньшим количеством переменных, которая и исследуется [1].

1. Решение уравнения состояния

В качестве примера применения теории бифуркации к ИСН, рассмотрим поведение системы повышающего преобразователя, и проанализируем условия устойчивости при варьировании разных параметров системы. Для этого возьмем уравнение состояния для исследуемого повышающего ИСН, упрощенная эквивалентно-функциональная схема которого представлена на рис. 1, с учетом активного сопротивления дросселя [2]:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{d'}{L} \\ \frac{d'}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U, \quad (1)$$

где

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

– переменные состояния; L – индуктивность дросселя, а R_L – его активное сопротивление; C – емкость конденсатора; U – величина входного напряжения; d – коэффициент заполнения; $d' = 1 - d$ – величина смежная коэффициенту заполнения. Если учитывать наличие обратных связей по току дросселя и напряжению нагрузки (или же конденсатора выходного

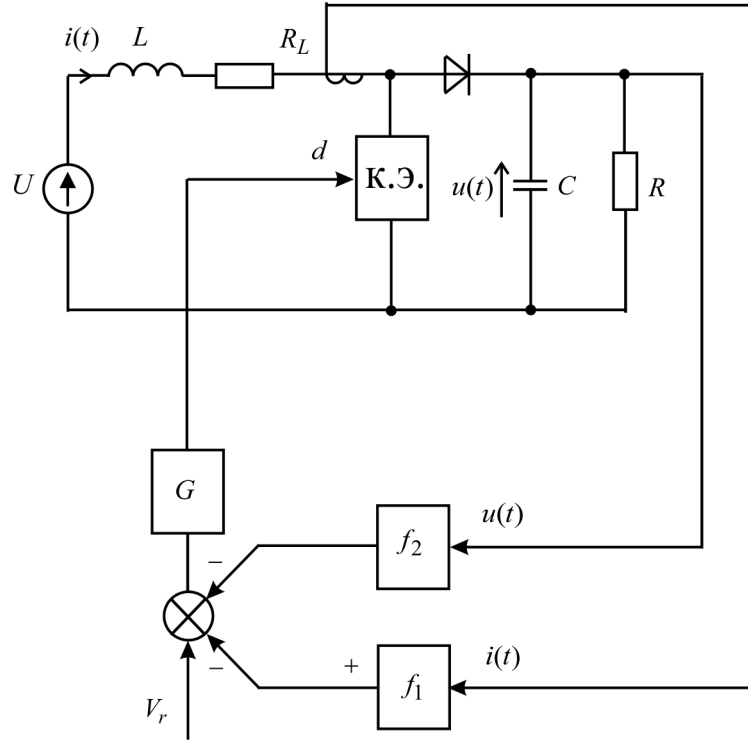


Рис. 1

фильтра), то данная система будет нелинейной, т. к. $d = d(x)$:

$$d = [V_r - (f_1 x_1 + f_2 x_2)] G, \tag{2}$$

где V_r – напряжение опорного источника питания; f_1 и f_2 – коэффициенты обратной связи по току дросселя и напряжению конденсатора соответственно; G – коэффициент ШИМ. Отсюда получим d' :

$$d' = 1 - G [V_r - f_1 x_1 - f_2 x_2], \tag{3}$$

и подставляем полученное выражение в (1), получаем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_L}{L} x_1 - \\ -\frac{1}{L} [1 - G [V_r - f_1 x_1 - f_2 x_2]] x_2 + \frac{U}{L}, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C} [1 - G [V_r - f_1 x_1 - f_2 x_2]] x_1 - \\ -\frac{1}{RC} x_2. \end{cases} \tag{4}$$

Устойчивость подобных систем удобно рассматривать относительно точки расположенной в начале координат. Для этого произведем стандартную в таких случаях замену переменных, которая сместит точку равновесия данной системы в начало координат. Данная замена переменных будет выглядеть следующим образом

$$x = x_0 + \bar{x}, \tag{5}$$

где

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

– точка равновесия; а

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

– отклонение от нее. Далее запишем уравнение состояния в точке равновесия

$$\begin{cases} \dot{x}_{10} = -\frac{R_L}{L} x_{10} - \\ -\frac{1}{L} [1 - G [V_r - f_1 x_{10} - f_2 x_{20}]] x_{20} + \frac{U}{L}, \\ \dot{x}_{20} = \frac{1}{C} [1 - G [V_r - f_1 x_{10} - f_2 x_{20}]] x_{10} - \\ -\frac{1}{RC} x_{20}. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь и далее будем считать, что в точке равновесия коэффициент заполнения $d = d_0 = \text{const}$ равен своему рабочему значению [3]:

$$\begin{aligned} d_0 &= G [V_r - f_1 x_{10} - f_2 x_{20}], \\ d_0' &= 1 - G [V_r - f_1 x_{10} - f_2 x_{20}]. \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом система (6) запишется в более упрощенном виде

$$\begin{cases} \dot{x}_{10} = -\frac{R_L}{L} x_{10} - \frac{d_0'}{L} x_{20} + \frac{U}{L}, \\ \dot{x}_{20} = \frac{d_0'}{C} x_{10} - \frac{1}{RC} x_{20}. \end{cases} \tag{8}$$

Решив эту систему, получим точку равновесия для установившихся значений тока дросселя и выходного напряжения:

$$\begin{aligned} x_{10} &= \frac{U}{R \left(\frac{R_L}{R} + (d_0')^2 \right)}, \\ x_{20} &= \frac{d_0' U}{\frac{R_L}{R} + (d_0')^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее произведем замену (5) в уравнении (4). Теперь учтем, что в точке x_0 вся система (6) обращается в ноль. В этом случае, вычтем систему (6) из полученной системы т. к. обе части системы уравнений (6) равны нулю. В результате получим систему уравнений относительно приращений переменных.

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \frac{1}{L} (R_L - Gf_1 x_{20}) \bar{x}_1 - \\ - \frac{1}{L} (1 - GV_r + Gf_1 x_{10} + 2Gf_2 x_{20}) \bar{x}_2 - \\ - \frac{G}{L} [f_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 + f_2 (\bar{x}_2)^2], \\ \dot{\bar{x}}_2 = \frac{1}{C} [1 - GV_r + Gf_2 x_{20} + 2Gf_1 x_{10}] \bar{x}_1 - \\ - \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} - Gf_2 x_{10} \right) \bar{x}_2 + \\ + \frac{G}{C} [f_1 (\bar{x}_1)^2 + f_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2]. \end{cases} \quad (10)$$

Данная система имеет нелинейный характер в связи с наличием членов $[f_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 + f_2 (\bar{x}_2)^2]$ и $[f_1 (\bar{x}_1)^2 + f_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2]$ в правой части. Однако, в следствии того, что они имеют более высший порядок малости, чем остальные члены, временно линеаризуем систему (10), путем отбрасывания нелинейных членов. Линеаризованная система в упрощенном виде будет выглядеть в следующем виде

$$\dot{\bar{x}} = J\bar{x}, \quad (11)$$

где

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

– матрица Якоби системы (10) со следующими значениями членов:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{1}{L} (R_L - Gf_1 x_{20}), \\ J_{12} &= -\frac{1}{L} (1 - GV_r + Gf_1 x_{10} + 2Gf_2 x_{20}), \\ J_{21} &= \frac{1}{C} [1 - GV_r + Gf_2 x_{20} + 2Gf_1 x_{10}], \end{aligned} \quad (12)$$

$$J_{22} = -\frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} - Gf_2 x_{10} \right).$$

Согласно критерию Ляпунова, неустойчивость возникает, если хотя бы одно из собственных значений матрицы Якоби находится в правых квадрантах комплексной плоскости. Далее выведем уравнение для нахождения собственных значений матрицы Якоби исходя из соотношения $J - \lambda E = 0$, где

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда искомое уравнение $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ будет иметь корни в следующем виде

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}, \quad (13)$$

где $b = -J_{11} - J_{22}$, $c = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$. Для качественного анализа устойчивости системы, рассмотрим все случаи для значений коэффициентов b и c :

- $b > 0$, $c > 0$. В этом случае, при условии $c < \frac{b^2}{4}$, очевидно будет выполняться неравенство $\left| -\frac{b}{2} \right| > \left| \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \right|$, и собственные значения матрицы Якоби будут отрицательные, а следовательно система будет устойчивой. В таком случае и вся система будет устойчивой.

- $b > 0$, $c < 0$. В этом случае при любых значениях b и c будет выполняться неравенство $\left| -\frac{b}{2} \right| < \left| \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \right|$, и одно из собственных значений всегда будет всегда положительным, а система неустойчивой.

- $b > 0$, $c = 0$. Здесь собственные значения будут $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -b$, и очевидно, что при $b > 0$ система будет на границе устойчивости.

- $b < 0$, $c > 0$; $b < 0$, $c < 0$; $b = 0$, $c < 0$. В этих случаях одно из собственных значений матрицы Якоби всегда будет положительным, вне зависимости от знака c , а система соответственно неустойчивой.

- $b = 0$, $c = 0$. В этом случае система будет находиться на границе устойчивости и малейшее изменение значений b или c будет приводить к качественному изменению в системе.

- $b = 0$, $c > 0$. В этом случае собственные значения матрицы Якоби будут иметь чисто мнимый характер, т. е. $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{c}$, а система будет находиться на границе устойчивости.

Из всех вышеперечисленных случаев особо следует выделить только два: $b > 0, c = 0$ и $b = 0, c > 0$, каждый из которых выражает собственную границу неустойчивости. Случай же, когда данные границы условий неустойчивости пересекаются (т. е.) особого рассмотрения не требует, по причине невозможности определения его точного расположения. Но даже если и предположить возможность определения его точного расположения, то его анализ по сути сведется к одному из двух основных случаев.

2. Поведения системы на границе устойчивости

Рассмотрим поведение системы при условии $b > 0, c = 0$. Собственные значения матрицы Якоби будут иметь следующие значения $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -b$, а решение системы будет иметь следующий вид:

$$x_1(t) = \frac{C_1}{a_{21} - a_{22}} + \frac{C_2}{a_{11} + a_{22}} e^{(a_{11} + a_{22})t},$$

$$x_2(t) = \frac{C_1}{a_{11} - a_{12}} - \frac{C_2}{a_{12} + a_{22}} e^{(a_{11} + a_{22})t}.$$

Как видно из формы решений, на границе устойчивости система экспоненциально устремляется к какому-то значению, отличному от нуля, что будет проиллюстрировано ниже. Это говорит том, что происходит быстрый переход тока дросселя и напряжения конденсатора на другое значение, отличного от рабочего установленного. Будем называть это качественное изменение в системе динамической бифуркацией.

Теперь рассмотрим поведение системы на границе устойчивости, определяемой условием $b = 0, c > 0, b = 0, c > 0$. В этом случае корни характеристического уравнения будут иметь чисто мнимый характер, т. е. $\lambda_1 = i\sqrt{c}, \lambda_2 = -i\sqrt{c}$. Общее решение системы д. у. описывающее работу системы будет иметь следующий вид:

$$x_1(t) = C_1 b_{11} e^{i\sqrt{c}t} + C_2 b_{12} e^{-i\sqrt{c}t},$$

$$x_2(t) = C_1 b_{21} e^{i\sqrt{c}t} + C_2 b_{22} e^{-i\sqrt{c}t}.$$

Таким образом мы видим, что решение системы имеет чисто гармонический характер, а значит представляет собой колебания с неизменной амплитудой. Как будет проиллюстрировано далее, фазовые портреты системы на данной границе устойчивости представляют собой замкнутые кривые овального характера (предельные циклы). Будем называть это качественное изменение в системе статической бифуркацией.

3. Условия устойчивости для статической и динамической бифуркаций

Для получения условия устойчивости относительно величины коэффициента обратной связи по напряжению для динамической бифуркации, выразим f_2 из условия $-J_{11} - J_{22} > 0$, и получим:

$$f_2 < \frac{RCd_0'}{L} f_1 + \frac{1}{GU} \left(\frac{R_L}{R} + (d_0')^2 \right) \left(1 + \frac{R_L RC}{L} \right). \quad (14)$$

Теперь отсюда составим уравнение для границы устойчивости

$$D(G_R) = \frac{Cd_0'}{G_R L} f_1 + \frac{1}{GU} \left(G_R R_L + (d_0')^2 \right) \times \left(1 + \frac{R_L C}{G_R L} \right), \quad (15)$$

где $G_R = 1/R$ — величина активной проводимости нагрузки.

Для получения условия устойчивости относительно величины коэффициента обратной связи по напряжению для статической бифуркации выразим f_2 из условия $J_{11} J_{22} - J_{21} J_{12} > 0$, и получим:

$$f_2 < \frac{2d_0' f_1 + \frac{R}{GU} \left(\frac{R_L}{R} + (d_0')^2 \right)^2}{R_L - R (d_0')^2}. \quad (16)$$

Теперь отсюда составим уравнение для границы устойчивости

$$S(G_R) = \frac{2d_0' f_1 + \frac{1}{G_R GU} \left(R_L G_R + (d_0')^2 \right)^2}{R_L - \frac{(d_0')^2}{G_R}}. \quad (17)$$

Таким образом, получены границы устойчивости для статической и динамической бифуркаций относительно многих параметров системы, в том числе и относительно величины проводимости нагрузки G_R .

4. Численные результаты

Для получения численных результатов, была использована система со следующими основными параметрами: $U = 10$ В, $d_0' = 0.4$, $C = 600$ мкФ, $L = 2$ мГн, $f_1 = 0.8$ Ом, $G = 0.5$ В⁻¹, $R_L = 2$ Ом [4].

Как видно из (15) и (17) граница устойчивости для динамической бифуркации зависит от величин C и L , а точнее от их соотношения C/L , а для статической бифуркации нет. Как показал анализ, при варьировании соотношения C/L

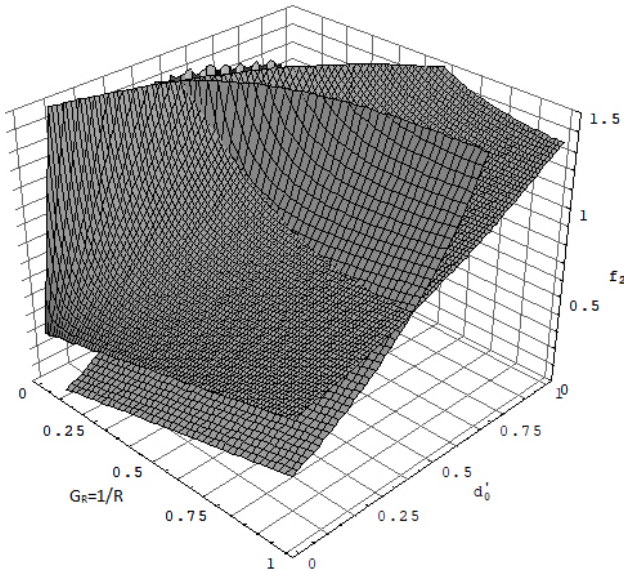


Рис. 2

поверхность устойчивости поднимается или опускается целиком, вне зависимости от изменения других параметров системы.

На рис. 2 и рис. 3 изображены поверхности статической и динамических неустойчивостей при варьировании коэффициента заполнения d_0' и коэффициента обратной связи по току f_1 соответственно и величины проводимости нагрузки G_R . Из рис. 2 видно, что для системы с данными параметрами пересечение поверхностей статической и динамической бифуркаций происходит при величине коэффициента заполнения $d_0' \approx 0.4$. Из рис. 3 видно, что при достаточно больших величинах коэффициента обратной связи по току f_1 наблюдается двукратное пересечение поверхностей бифуркаций. В связи с этим рассмотрим поведение системы при фиксированных коэффициентах заполнения $d_0' = 0.4$ и обратной связи по току дросселя $f_1 = 0.8$ более подробно (рис. 4). Здесь кривая 1 это граница статической бифуркации, а кривые 2, 2' и 2'' это границы динамических бифуркаций при варьировании соотношения C/L (2 – при $C = 600$ мкФ, 2' – при $C = 750$ мкФ и 2'' – при $C = 450$ мкФ). Из рисунка видно, что при увеличении соотношения C/L граница динамической бифуркации поднимается по всей ширине равномерно, а при уменьшении опускается также равномерно по всей ширине. Наибольший интерес в данном случае будет представлять система со следующими параметрами: $U = 10$ В, $d_0' = 0.4$, $C = 600$ мкФ, $L = 2$ мГн, $f_1 = 0.8$ Ом, $G = 0.5$ В⁻¹. Граница устойчивости для данной системы будет описываться динамической бифуркаций (кривой 2) за исключением участка а-б, где устойчивость бу-

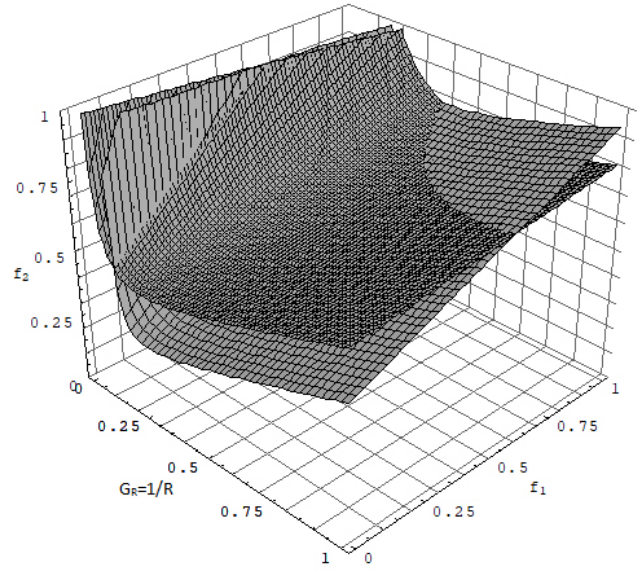


Рис. 3

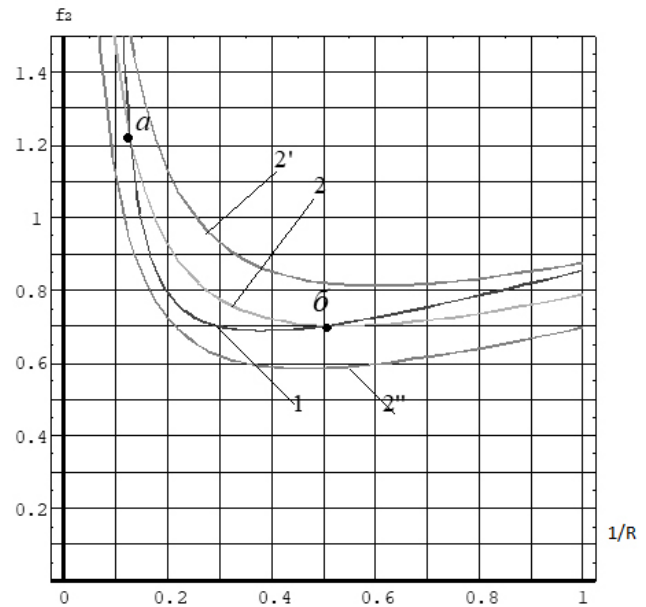
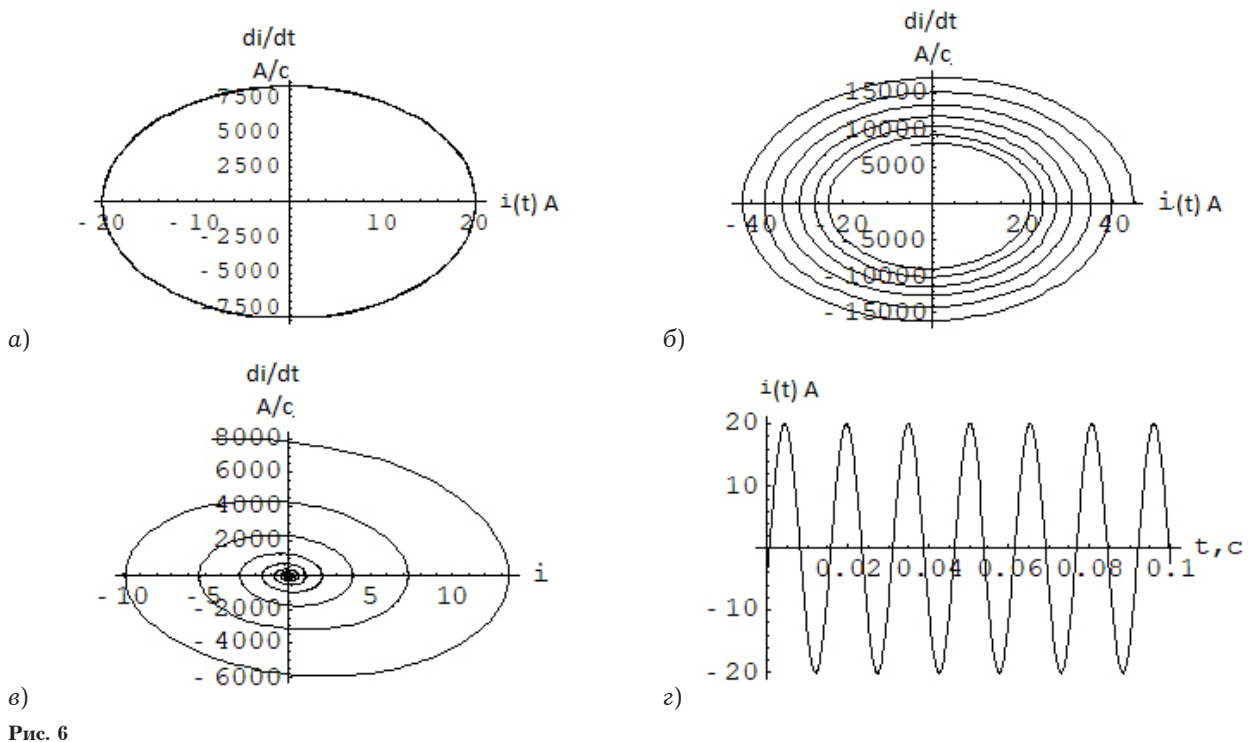
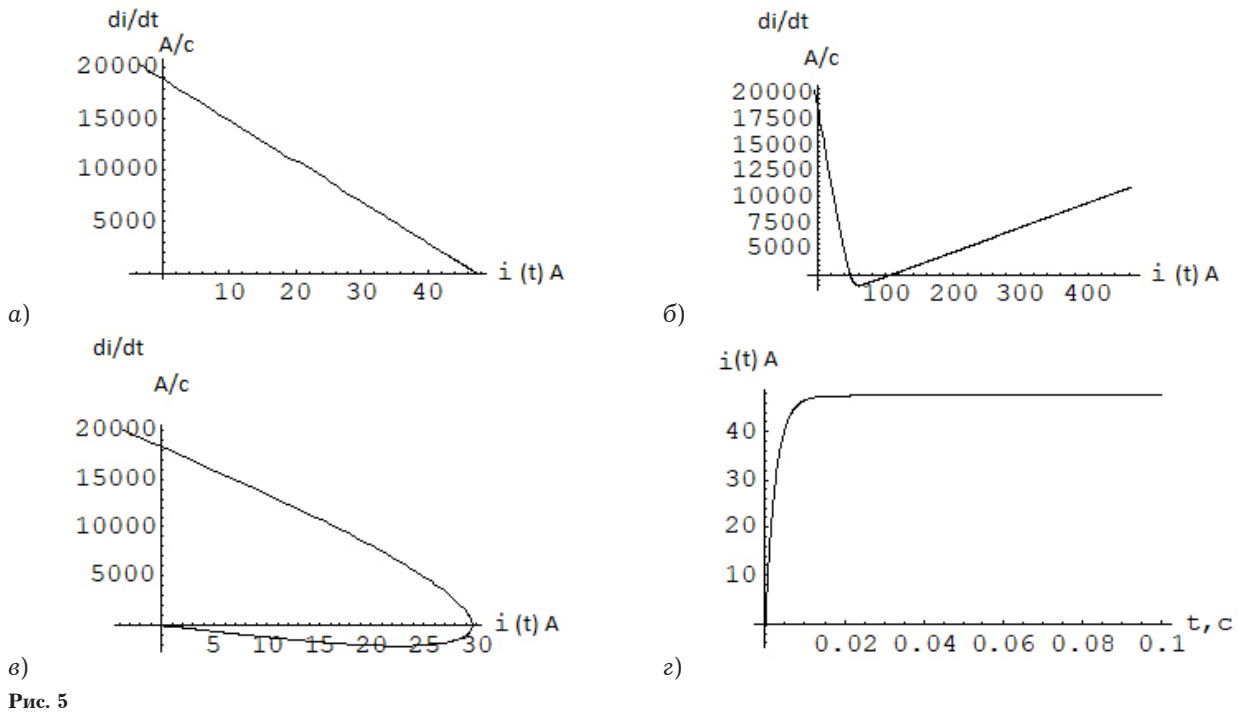


Рис. 4

дет определяться статической бифуркацией (кривая 1). Теперь изучим поведение системы при нарушении границы устойчивости на разных участках (при $R = 5$ Ом ($G_R = \frac{1}{R} = 0.2$ Сим) для статической, и при $R = 1.25$ Ом ($\frac{1}{R} = 0.8$ Сим) для динамической бифуркаций). На рис. 5, а-в изображены фазовые траектории для тока дросселя при прохождении границы устойчивости для $G_R = \frac{1}{R} = 0.2$ Сим (статическая бифуркация). На рис. 5, а изображена фазовая траектория на границе устойчивости, на рис. 5, б для неустойчивой, а на рис. 5, в для устойчивой систем. Поведение тока дросселя на границе устойчивости для данных параметров отображено на рис. 5, г.



На рис. 6, а-в изображены фазовые траектории для тока дросселя при прохождении границы устойчивости для $G_R = \frac{1}{R} = 0.8$ Сим (динамическая бифуркация). На рис. 6, а изображена фазовая траектория на границе устойчивости, на рис. 6, б для неустойчивой, а на рис. 6, в для устойчивой систем. Поведение тока дросселя на границе устойчивости для данных параметров отображено на рис. 6, г.

Из вышеприведенных рисунков видно, что при прохождении границы устойчивости для статической бифуркации наблюдается явление скачка тока дросселя, а при прохождении границы устойчивости для статической бифуркации наблюдаются незатухающие колебания тока дросселя. Отсюда можно сделать вывод, что при проектировании системы следует рассчитать статические и динамические бифуркации, дабы в последующем скорректировать значение

соотношения C / L , т. о. чтобы граница устойчивости определялась статической или динамической бифуркацией однозначно. Тогда можно однозначно предсказать поведение системы при нарушении ее устойчивости.

Список литературы

1. Теория бифуркаций / В.И. Арнольд [и др.]. М.: Итоги науки и техники, 1992. 202 с.
2. Коржавин О.А. Динамические характеристики импульсных полупроводниковых преобразователей и стабилиза-

торов постоянного напряжения. М.: Радио и связь, 1997. 300 с.

3. Дмитриков В.Ф., Шушпанов Д.В. Устойчивость и электромагнитная совместимость устройств и систем электропитания. М.: Горячая линия – Телеком, 2018. 540 с.
4. Дмитриков В.Ф., Шушпанов Д.В. Основные научные проблемы построения отечественных агрегатированных (сложных) приборов и распределенных систем вторичного электропитания и причины отставания их характеристик от современных зарубежных аналогов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21. № 3. С. 7–11.

Application of the theory of bifurcations to the analysis of the stability of impulse voltage stabilizers of a rising type

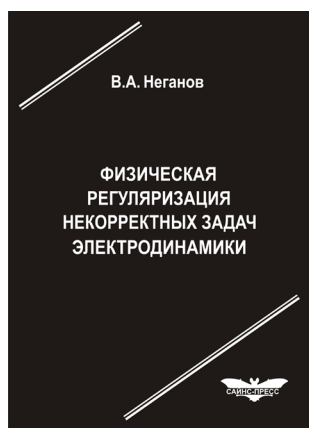
A.A. Voronoi, R.M. Zakirov, D.V. Mishin

This article discusses the application of the theory of bifurcation to pulsed voltage up-stabilizers, studied its behavior, and analyzed the stability conditions for varying various parameters of the system. Also obtained are surfaces of stability of pulsed voltage up-regulators with varying various system parameters.

Keywords: systems, stability, bifurcation, choke, Jacobi matrix.

Неганов, В.А.

Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики: линии передачи, антенны, дифракция электромагнитных волн / В.А. Неганов. – М.: САЙНС-ПРЕСС, 2008. – 432 с., 122 ил.



ISBN 978-5-88070-161-2

УДК 537.87

ББК 32.84

Н 41

Изложены основы физической регуляризации некорректных задач электродинамики, связанной с особенностями физических и математических моделей задач (физические допущения, некорректные математические выкладки, отсутствие предельного перехода). Подход, по мнению автора, обладает большими возможностями, чем метод регуляризации Тихонова А.Н. интегральных уравнений Фредгольма первого рода, названный в книге методом математической регуляризации. Метод физической регуляризации (МФР) применен к анализу волноведущих и излучающих структур, а также задачам дифракции электромагнитных волн на некоторых телах. МФР позволил впервые корректно осуществить анализ полей в ближних зонах некоторых антенн, устранить несамосогласованное приближение Кирхгофа в задачах дифракции, установить связь поверхностной плотности тока проводимости с напряженностями электрического и магнитного полей для диполя Герца и т. п.

Для специалистов в области радиотехники и радиофизики СВЧ, электромагнитной совместимости РТС, математической теории дифракции и математического моделирования электродинамических структур самого широкого назначения. Может быть полезна преподавателям вузов, докторантам, аспирантам и студентам старших курсов соответствующих специальностей.