

Распространение электромагнитных ТЕ- и ТМ-волн в плоском волноводе, покрытом графеном, с учетом нелинейности

Ю.Г. Смирнов , С.В. Тихов 

Пензенский государственный университет
440026, Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40

Аннотация – Обоснование. Волноводные свойства различных структур с графеном имеют большое значение для практических приложений и изучались во многих работах. Во всех таких исследованиях графен характеризовался, как правило, линейной поверхностной проводимостью. Однако если интенсивность электромагнитной волны велика, то взаимодействие графена с ней становится нелинейным; в этом случае графен более корректно описывать нелинейной проводимостью. **Цель.** Данная работа направлена на исследование влияния кубической нелинейности графена, отвечающей так называемым эффектам самовоздействия (не влияющим на частоту падающей волны), на распространение ТЕ- и ТМ-поляризованных волн в структуре, представляющей собою плоский диэлектрический слой, покрытый с одной стороны графеном. **Методы.** В рамках данного исследования свойства волноведущей структуры изучаются, используя преимущественно аналитический подход. Так, из уравнений Максвелла, материальных уравнений и граничных условий выводится пара дисперсионных уравнений для ТЕ- и ТМ-поляризованных волн, и затем исследуется их разрешимость. Кроме того проводятся и некоторые численные эксперименты. **Результаты.** В работе получены в явном виде дисперсионные уравнения исследуемой волноведущей структуры для ТЕ- и ТМ-поляризованных волн. При исследовании аналитически полученных уравнений найдены условия для параметров волновода, обеспечивающие существование заданного числа волноводных мод. Получены некоторые численные результаты, дающие представление о том, как нелинейные эффекты влияют на распространяющиеся в структуре электромагнитные волны. **Заключение.** Полученные в данном исследовании результаты обнаруживают два эффекта, связанных с кубической нелинейностью графена. Во-первых, в плоском диэлектрическом слое с графеновым покрытием в сильном нелинейном режиме распространяются ТЕ-волны с большей длиной волны и ТМ-волны с меньшей длиной волны по сравнению с ТЕ- и ТМ-волнами, которые распространяются в той же структуре в линейном режиме. Сильная кубическая нелинейность приводит к большей локализации электромагнитной волны внутри волноведущей структуры.

Ключевые слова – электромагнитные волны; диэлектрический волновод; плоский слой; графен; нелинейная проводимость; уравнения Максвелла; дисперсионное уравнение.

Введение

В настоящее время большое внимание уделяется изучению двумерных материалов и двумерных электронных компонентов. Среди прочих двумерных материалов особое место занимает графен, полученный экспериментально в 2004 г. Геймом и Новоселовым [1]. Графен представляет собой слой атомов углерода, образующих гексагональную решетку. Благодаря своей особой структуре графен обладает рядом уникальных электрических, тепловых, механических и оптических свойств, которые делают его весьма перспективным для различных применений [2]. Так, в фотонике и оптоэлектронике активно изучаются волноведущие структуры с графеном самых разных форм, начиная от простых прямоугольных и круглых цилиндрических волноводов и заканчивая волноводами весьма экзотических конфигураций, которые могут служить эффективными фотодетекторами, модуляторами, поляризаторами, сенсорами и т. д. [3].

Одним из наиболее важных свойств графена является его способность взаимодействовать с электромагнитными волнами в широком диапазоне частот, в частности в диапазоне частот от 0,1 до 10 ТГц. Как известно, терагерцовые технологии находят широкое применение в различных областях науки и техники. Так, например, они используются для химического и биологического зондирования, формирования изображений в ближней зоне, спектроскопии, телекоммуникации и т. д. Однако разработка эффективных электрических компонентов, способных обрабатывать и передавать ТГц-волны, до сих пор остается серьезной проблемой, тормозящей развитие ТГц-технологий. Считается, что графен, обладающий почти чисто мнимой поверхностной проводимостью в этом диапазоне частот, может быть полезен для решения указанной проблемы [4; 5].

В работах [6; 7] впервые было теоретически предсказано, что графен должен обладать силь-

ной кубической нелинейностью, обусловленной взаимодействием носителей заряда в графене с электромагнитным полем. С тех пор множество исследований выявили различные нелинейные свойства графена, включая насыщающееся поглощение и нелинейное преломление, генерацию высших гармоник и генерацию комбинационных гармоник. В частности, на технологически важных ТГц-частотах экспериментально были обнаружены насыщение поглощения в легированном графене [8] и генерация третьей гармоники [9].

В данной работе исследуется распространение монохроматических терагерцовых ТЕ- и ТМ-поляризованных волн в плоском диэлектрическом слое, покрытом с одной стороны слоем графена. Как известно, волноводные свойства графен-интегрированных структур имеют большое значение для различных приложений и исследовались многими авторами [10–16]. Так, в работах [10–12] изучалась возможность распространения ТЕ- и ТМ-поляризованных волн, локализованных на слое графена, с дисперсией в терагерцовом диапазоне электромагнитного излучения. Распространение электромагнитных волн, локализованных в плоской структуре, образованной двумя графеновыми слоями и разделяющим их тонким слоем диэлектрика, рассматривалось в работах [13–15]. В работе [16] авторы исследуют распространение электромагнитных волн в структуре, состоящей из набора чередующихся слоев диэлектрика и графена.

Настоящая работа имеет следующую важную особенность. Мы учитываем нелинейное взаимодействие графена с электромагнитной волной. Точнее, мы предполагаем, что проводимость графена представляет собой сумму двух членов: первый – константа, а второй зависит от квадрата модуля тангенциальной составляющей электрического поля. Такая нелинейность отвечает так называемым эффектам самовоздействия в графене. Другие нелинейные эффекты, такие как генерация высших гармоник, в нашем исследовании не рассматриваются. В работе получено дисперсионное уравнение, позволяющее для волновода с заданными характеристиками определить его постоянные распространения. Следует отметить, что для получения дисперсионного уравнения в явном виде мы вынуждены наложить некоторые ограничения на проводимость графена, которые более подробно обсуждаются ниже. Тем не менее дисперсионное уравнение, записанное в явном виде, является важным результатом. Исследуя это уравнение численно или аналитически, можно

определить свойства рассматриваемой волнующей структуры.

1. Электродинамическая постановка задачи

Рассмотрим монохроматические ТЕ- и ТМ-поляризованные электромагнитные волны

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{i\gamma z - i\omega t}, \quad (1)$$

где ω есть круговая частота; γ – волновое число (постоянная распространения); \mathbf{E} и \mathbf{H} есть комплексные амплитуды (причем компоненты векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} зависят лишь от одной (поперечной) пространственной координаты x), распространяющиеся в плоском диэлектрическом волноводе $\Sigma = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq h\}$, расположенном между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$. На границе $x = h$ волновода находится слой графена.

Волновод Σ заполнен однородной изотропной средой, характеризующейся постоянной диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Полупространства $x < 0$ и $x > h$ заполнены однородными изотропными средами, которые характеризуются постоянными диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_3 соответственно, причем $1 < \epsilon_1 \leq \epsilon_3 < \epsilon_2$. Всюду магнитная проницаемость $\mu = \mu_0$, где μ_0 есть магнитная постоянная.

Комплексные амплитуды \mathbf{E} , \mathbf{H} удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\text{rot} \mathbf{H} = -i\omega \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}, \quad \text{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}, \quad (2)$$

где ϵ_0 есть диэлектрическая постоянная и

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1, & x < h, \\ \epsilon_2, & 0 < x < h, \\ \epsilon_3, & x > h. \end{cases}$$

Амплитуды \mathbf{E} , \mathbf{H} удовлетворяют условию затухания на бесконечности. Касательная составляющая вектора \mathbf{E} непрерывна на обеих границах волновода. Касательная составляющая вектора \mathbf{H} непрерывна на границе $x = 0$, но терпит разрыв на границе $x = h$ с графеном так, что справедлива формула

$$\left[\mathbf{n}, \mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^- \right]_{x=h} = \sigma_g \mathbf{E}_\tau|_{x=h},$$

где скобка $[*,*]$ обозначает векторное произведение, $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$ есть единичный вектор нормали, направленный вдоль оси x , величины \mathbf{H}^+ и \mathbf{H}^- есть значения магнитного поля над и под поверхностью $x = h$ соответственно, величина σ_g – поверхностная проводимость графена, \mathbf{E}_τ – касательная составляющая электрического поля.

Проводимость графена σ_g описывается формулой

$$\sigma_g = \sigma^{(1)} + \sigma^{(3)} |\mathbf{E}_\tau|^2,$$

где $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(3)}$ есть некоторые постоянные [6; 7].

Линейная часть $\sigma^{(1)}$ проводимости графена определяется по формуле

$$\sigma^{(1)} = i \text{Im} \sigma_{\text{intra}}, \quad (3)$$

и $\sigma_{\text{intra}} \equiv \sigma_{\text{intra}}(\omega, \mu_c, T)$ вычисляется по формуле

$$\sigma_{\text{intra}} = \frac{2ie^2 k_b T}{\pi \hbar^2 (\omega + i\tau^{-1})} \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\mu_c}{2k_b T} \right) \right],$$

где e есть заряд электрона; k_b – постоянная Больцмана, \hbar есть приведенная постоянная Планка; μ_c – химический потенциал; T – температура и τ – время релаксации носителей заряда в графене [17; 18]. Подчеркнем, что используемая нами формула для линейной проводимости графена является «приближенной». Во-первых, она не содержит слагаемого, отвечающего межзонной проводимости в графене. Это оправдано при энергиях фотонов $\hbar\omega < 2\mu_c$, поскольку межзонные переходы в этом случае заблокированы в силу принципа запрета Паули [19]. Указанное неравенство, как правило, выполняется в терагерцовом диапазоне частот. Во-вторых, мы пренебрегаем действительной частью внутризонной проводимости графена или, другими словами, не учитываем поглощения в графене. Это допустимо в терагерцовом диапазоне частот, где графен обладает сильным плазмонным откликом и гораздо меньшими потерями. Кроме того, отметим, что мнимая часть внутризонной проводимости положительна в терагерцовом диапазоне частот.

Для вычисления нелинейного коэффициента $\sigma^{(3)}$ предлагаются разные формулы [6; 7; 20]. В данном исследовании мы будем использовать формулу, представленную в работе [7]. В соответствии с ней

$$\sigma^{(3)} = -i \frac{3e^4 v_F^2}{32\omega^3 \hbar^2 \mu_c}, \quad (4)$$

где $v_F \approx c/300$ есть скорость Ферми в графене, а c есть скорость света в вакууме.

Задача заключается в нахождении таких значений волнового числа $\gamma = \gamma'$, при которых существует электромагнитное поле (1), удовлетворяющее системе уравнений Максвелла (2), условию затухания на бесконечности и всем приведенным выше условиям сопряжения. Числа $\gamma = \gamma'$ называются *постоянными распространения* волновода.

Знание полного набора постоянных распространения необходимо при проектировании волноводных структур.

Ниже будем использовать следующие обозначения:

$$\theta_1(\gamma) = \sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \epsilon_1}, \quad \theta_2(\gamma) = \sqrt{k_0^2 \epsilon_2 - \gamma^2}, \quad (5)$$

$$\theta_3(\gamma) = \sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \epsilon_3},$$

где

$$k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0. \quad (6)$$

2. ТЕ-волны

Пусть электромагнитные волны (1) ТЕ-поляризованы, т. е. комплексные амплитуды \mathbf{E} и \mathbf{H} имеют вид

$$\mathbf{E} = (0, E_y(x), 0), \quad \mathbf{H} = (H_x(x), 0, H_z(x)).$$

В этом случае задача о распространении электромагнитных волн сводится к задаче $\mathcal{P}_{\text{ТЕ}}$, которая заключается в нахождении $\gamma = \hat{\gamma} > k_0 \sqrt{\epsilon_3}$, таких, что существует решение $Y \equiv Y(x; \hat{\gamma})$ дифференциального уравнения

$$\gamma^2 Y(x) - Y''(x) = k_0^2 \epsilon_2 Y(x),$$

где $Y(x) := E_y(x)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$Y'(0) - \theta_1(\gamma) Y(0) = 0, \quad (7)$$

$$Y'(h) + \theta_3(\gamma) Y(h) = -120\pi i k_0 (\sigma^{(1)} + \sigma^{(3)} Y^2(h)) Y(h),$$

где θ_1 , θ_3 и k_0 определены в (5) и (6) соответственно.

Кроме того, мы вводим дополнительное условие для нахождения дискретного набора решений задачи, что соответствует физическому процессу распространения волн в волноводных структурах. В качестве такого условия выберем

$$Y(0) = A_{\text{ТЕ}},$$

где $A_{\text{ТЕ}}$ есть некоторая постоянная.

Задачу $\mathcal{P}_{\text{ТЕ}}$ можно отнести к специальному классу задач на собственные значения с некоторым дополнительным условием. Число $\hat{\gamma}$, являющееся решением задачи $\mathcal{P}_{\text{ТЕ}}$, будем называть *собственным значением* задачи $\mathcal{P}_{\text{ТЕ}}$, а функцию $Y(x; \hat{\gamma})$ будем называть *собственной функцией* задачи $\mathcal{P}_{\text{ТЕ}}$.

Поскольку условие (7) содержит кубический член $Y^3(h)$, то задача $\mathcal{P}_{\text{ТЕ}}$ является нелинейной. Она представляет новый класс нелинейных задач с нелинейными граничными условиями.

Если в (7) положить $\sigma^{(3)} = 0$, то задача $\mathcal{P}_{\text{ТЕ}}$ вырождается в линейную задачу. Назовем ее зада-

чей $\mathcal{P}_{\text{TE}}^0$. Подчеркнем, что условие (7) в линейной задаче $\mathcal{P}_{\text{TE}}^0$ не требуется и потому может быть опущено.

Задача $\mathcal{P}_{\text{TE}}^0$ так же, как и задача \mathcal{P}_{TE} , описывает распространение монохроматической ТЕ-поляризованной волны в плоском диэлектрическом волноводе, покрытом слоем графена, который характеризуется линейной поверхностной проводимостью.

Решая представленное выше уравнения и используя краевые условия, получаем для задачи \mathcal{P}_{TE} дисперсионное уравнение вида

$$\text{ctg}\theta_2 h = -\frac{\varphi_1}{\theta_2 \varphi_2}, \quad (8)$$

где θ_2 показана в (3), а $\varphi_1 \equiv \varphi_1(\gamma)$, $\varphi_2 \equiv \varphi_2(\gamma)$ определяются как

$$\begin{aligned} \varphi_1(\gamma) &= -\theta_2^2 + \theta_1 \theta_3 - k_0 |\bar{\sigma}_1| \theta_1 + \\ &+ k_0 \alpha \theta_1 \theta_2^{-2} (\theta_1^2 \sin^2 \theta_2 h + 3\theta_2^2 \cos^2 \theta_2 h), \\ \varphi_2(\gamma) &= \theta_1 + \theta_3 - k_0 |\bar{\sigma}_1| + \\ &+ k_0 \alpha \theta_2^{-2} (3\theta_1^2 \sin^2 \theta_2 h + \theta_2^2 \cos^2 \theta_2 h); \end{aligned}$$

здесь $\bar{\sigma}_1 = 120\pi\sigma^{(1)}$, $\alpha = |\bar{\sigma}_3| A_{\text{TE}}^2$, $\bar{\sigma}_3 = 120\pi\sigma^{(3)}$, где A_{TE} есть значение касательной компоненты вектора \mathbf{E} на границе $x = 0$. Дисперсионное уравнение (8) позволяет для ТЕ-волны заданной частоты и волновода заданной толщины определить постоянные распространения волновода (прочие параметры также считаются фиксированными).

Касательная компонента электрического поля $Y(x)$ вычисляется по формуле

$$Y(x) = A_{\text{TE}} \theta_2^{-1} (\theta_1 \sin \theta_2 x + \theta_2 \cos \theta_2 x).$$

Задача \mathcal{P}_{TE} исследована в работе [21], где получено дисперсионное уравнение, аналогичное уравнению (8). Однако в работе [21] дисперсионное уравнение записано несколько в ином виде, а именно, используя величины, нормированные на k_0 , см. формулу (6), что может быть неудобно для таких расчетов, в которых фиксирована толщина волновода и изменяется частота электромагнитной волны. Уравнение (8) этого недостатка не имеет.

Исследуя уравнение (8), можно получить достаточные условия для параметров волновода, при которых в нем могут распространяться монохроматические ТЕ-поляризованные электромагнитные волны. Следующие два утверждения дают такие условия.

Утверждение 1. Пусть $n > 0$ есть некоторое целое число. Если параметры волновода Σ удовлетворяют условиям

$$\varepsilon_3 \geq |\bar{\sigma}_1|^2 + \varepsilon_1, \quad h \geq \frac{\pi(n+1)}{\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}} k_0^{-1},$$

то существует по крайней мере n постоянных распространения $\hat{\gamma}_n \in \Gamma := (\sqrt{k_0 \varepsilon_3}, \sqrt{k_0 \varepsilon_2})$, отвечающих n собственным модам волновода Σ .

Утверждение 2. Пусть $n > 0$ есть некоторое целое число. Если параметры волновода Σ удовлетворяют условиям

$$\alpha \geq |\bar{\sigma}_1|, \quad h \geq \frac{\pi(n+1)\sqrt{3\alpha + |\bar{\sigma}_1|}}{\sqrt{3\alpha(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}} k_0^{-1},$$

то существует по крайней мере n постоянных распространения $\hat{\gamma}_n \in \Gamma := (\sqrt{k_0 \varepsilon_3}, \sqrt{k_0 \varepsilon_2})$, отвечающих n собственным модам волновода Σ .

Стоит отметить, что второе условие в последней формуле можно заменить более грубым, но в то же время и более простым неравенством вида

$$h \geq \frac{2\pi(n+1)}{\sqrt{3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}} k_0^{-1}.$$

3. ТМ-волны

Пусть электромагнитные волны (1) ТМ-поляризованы, т. е. комплексные амплитуды \mathbf{E} и \mathbf{H} имеют вид

$$\mathbf{E} = (E_x(x), 0, E_z(x)), \quad \mathbf{H} = (0, H_y(x), 0).$$

В этом случае задача о распространении электромагнитных волн сводится к задаче \mathcal{P}_{TM} , которая заключается в нахождении $\gamma = \hat{\gamma} > k_0 \sqrt{\varepsilon_3}$, таких, что существуют функции $X \equiv X(x; \hat{\gamma})$, $Z \equiv Z(x; \hat{\gamma})$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} -Z'' + \gamma X' = k_0^2 \varepsilon_2 Z, \\ -Z' + \gamma X = k_0^2 \gamma^{-1} \varepsilon_2 X, \end{cases}$$

где $X := iE_x(x)$, $Z := E_z(x)$, и краевым условиям

$$\varepsilon_2 \theta_1(\gamma) X(0) - \varepsilon_1 \gamma Z(0) = 0, \quad (9)$$

$$\varepsilon_2 \theta_3(\gamma) X(h) + \varepsilon_3 \gamma Z(h) =$$

$$= -120\pi k_0^{-1} \gamma \theta_3(\gamma) (\sigma^{(1)} + \sigma^{(3)} Z^2(h)) Z(h),$$

где $\theta_1(\gamma)$, $\theta_3(\gamma)$ и k_0 определены выше.

Кроме того, мы вводим дополнительное условие для нахождения дискретного набора решений задачи, что соответствует физическому процессу распространения волн в волноводных структурах. В качестве такого условия выберем

$$X(0) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} A_{\text{TM}},$$

где A_{TM} есть некоторая постоянная.

Задачу \mathcal{P}_{TM} так же, как и задачу \mathcal{P}_{TE} , можно отнести к специальному классу задач на собственные значения, где вводится некоторое дополнительное условие. Число $\hat{\gamma}$ будем называть *собственным значением* задачи \mathcal{P}_{TM} , а функции $X(x; \hat{\gamma})$, $Z(x; \hat{\gamma})$ – *собственными функциями* задачи \mathcal{P}_{TM} .

Если в (9) положить $\sigma^{(3)} = 0$, то задача \mathcal{P}_{TM} вырождается в линейную задачу, которую назовем задачей $\mathcal{P}_{\text{TM}}^0$. Заметим, что условие (9) в линейной задаче $\mathcal{P}_{\text{TM}}^0$ не требуется и потому может быть опущено.

Задача $\mathcal{P}_{\text{TM}}^0$ так же, как и задача \mathcal{P}_{TM} , описывает распространение монохроматической ТМ-поляризованной волны в плоском диэлектрическом волноводе, покрытом слоем графена, который характеризуется линейной поверхностной проводимостью.

Решая указанную выше систему уравнений и используя краевые условия, получаем для задачи \mathcal{P}_{TM} дисперсионное уравнение вида

$$\text{ctg} \theta_2 h = \frac{\Psi_1}{\varepsilon_2 \theta_2 \Psi_2}, \quad (10)$$

где $\Psi_1 \equiv \Psi_1(\gamma)$, $\Psi_2 \equiv \Psi_2(\gamma)$ определяются как

$$\begin{aligned} \Psi_1(\gamma) = & \varepsilon_1 \left(k_0^2 \varepsilon_3 \theta_2^2 - k_0 |\bar{\sigma}_1| \theta_2^2 \theta_3 \right) + \\ & + k_0 \beta \frac{\varepsilon_1 \theta_2^2 \theta_3}{\varepsilon_2^2 \gamma^2} \left(\varepsilon_1^2 \theta_2^2 \sin^2 \theta_2 h + 3 \varepsilon_2^2 \theta_1^2 \cos^2 \theta_2 h \right) - \\ & - k_0^2 \varepsilon_2^2 \theta_1 \theta_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(\gamma) = & k_0^2 \varepsilon_1 \theta_3 + \theta_1 \left(k_0^2 \varepsilon_3 - k_0 |\bar{\sigma}_1| \theta_3 \right) + \\ & + k_0 \beta \frac{\theta_1 \theta_3}{\varepsilon_2^2 \gamma^2} \left(\varepsilon_2^2 \theta_1^2 \cos^2 \theta_2 h + 3 \varepsilon_1^2 \theta_2^2 \sin^2 \theta_2 h \right); \end{aligned}$$

здесь $\beta = |\bar{\sigma}_3| A_{\text{TM}}^2$, и A_{TM} – значение нормальной составляющей \mathbf{E} слева от границы $x=0$, другие величины определены выше.

Компоненты электрического поля $X(x)$ и $Z(x)$ определяются по формулам:

$$X(x) = \frac{A_{\text{TM}}}{\varepsilon_2 \theta_2} (\theta_1 \varepsilon_2 \sin \theta_2 x + \varepsilon_1 \theta_2 \cos \theta_2 x),$$

$$Z(x) = \frac{A_{\text{TM}}}{\varepsilon_2 \gamma} (\varepsilon_2 \theta_1 \cos \theta_2 x - \varepsilon_1 \theta_2 \sin \theta_2 x).$$

Исследуя уравнение (10), можно получить достаточные условия для параметров волновода, при которых в нем могут распространяться монохроматические ТМ-поляризованные электромагнит-

ные волны. Действительно, имеют место утверждения 3 и 4.

Утверждение 3. Пусть $n > 0$ есть некоторое целое число. Если параметры волновода Σ удовлетворяют условиям:

$$\varepsilon_3 \geq |\bar{\sigma}_1| \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}, \quad h \geq \frac{(n+1)\pi}{\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}} k_0^{-1},$$

то существует не менее n постоянных распространения $\hat{\gamma}_n \in \Gamma$, отвечающих собственным модам волновода Σ .

Утверждение 4. Пусть $n > 0$ есть некоторое целое число. Если параметры волновода Σ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 \geq & \frac{\varepsilon_1 \beta}{\beta - |\bar{\sigma}_1|}, \quad \beta - |\bar{\sigma}_1| > 0, \\ h \geq & \frac{2\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} (3\beta \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 |\bar{\sigma}_1|) \pi (n+1)}{3\beta \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 - \varepsilon_3 (\varepsilon_2^2 |\bar{\sigma}_1| + 3\beta \varepsilon_1^2)} k_0^{-1}, \end{aligned}$$

то существует по крайней мере n постоянных распространения $\hat{\gamma}_n \in \Gamma$, отвечающих собственным модам волновода Σ .

4. Численные результаты

Ниже представлены некоторые численные результаты.

В вычислениях мы использовали следующие значения для диэлектрических проницаемостей: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 11,7$, $\varepsilon_3 = 2,1025$. Проницаемостью $\varepsilon_2 = 11,7$ обладает кремний (Si), а проницаемостью $\varepsilon_3 = 2,1025$ обладает диоксид кремния (SiO₂) [22; 23].

Для нахождения $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(3)}$ соответственно по формулам (3) и (4) использовались следующие параметры: $\mu_c = 0,2$ eV, $T = 300$ К, $\tau = 10$ ps. Время релаксации τ носителей заряда в графене выбрано в соответствии с [24].

На рис. 1–4 представлены дисперсионные кривые для рассматриваемого плоского волновода с графеновым покрытием. Как известно, дисперсионные кривые строятся как зависимость волнового числа (постоянной распространения) либо от частоты волны ω либо от толщины волновода h . Мы построили обе эти зависимости. На рис. 1 и 2 представлена зависимость $\gamma \equiv \gamma(\omega)$ при фиксированной толщине волновода, а на рис. 3 и 4 отражена зависимость $\gamma \equiv \gamma(h)$ при фиксированной частоте электромагнитной волны.

Вертикальная прямая $\omega/2\pi = 4$ на рис. 1, 2 отвечает, соответственно, ТЕ- и ТМ-поляризованным волнам с частотой 4 ТГц. Вертикальная прямая

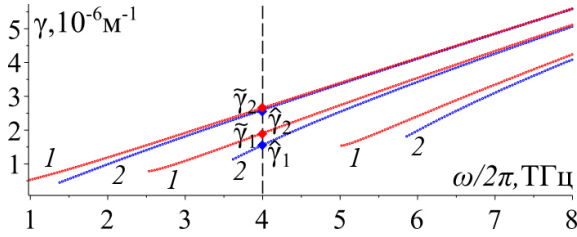


Рис. 1. Дисперсионные кривые задач \mathcal{P}_{TE}^0 (1) и \mathcal{P}_{TE} (2) для волновода толщиной $h = 20$ мкм. Ромбами обозначены постоянные распространения $\hat{\gamma}_1 \approx 1,54$, $\hat{\gamma}_2 \approx 2,59$ (в нелинейном режиме) и $\tilde{\gamma}_1 \approx 1,89$, $\tilde{\gamma}_2 \approx 2,64$ (в линейном режиме) волновода

Fig. 1. Dispersion curves of problems \mathcal{P}_{TE}^0 (1) and \mathcal{P}_{TE} (2) for a waveguide of thickness $h = 20$ μm . Diamonds denote propagation constants $\hat{\gamma}_1 \approx 1,54$, $\hat{\gamma}_2 \approx 2,59$ (in the nonlinear regime) and $\tilde{\gamma}_1 \approx 1,89$, $\tilde{\gamma}_2 \approx 2,64$ (in the linear one) of the waveguide

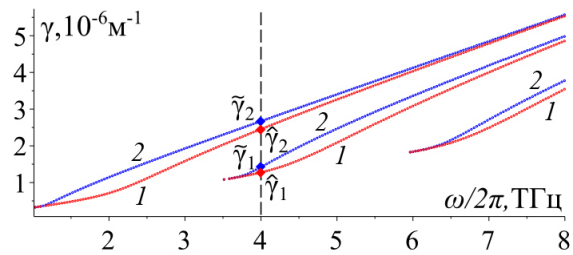


Рис. 2. Дисперсионные кривые задач \mathcal{P}_{TM}^0 (1) и \mathcal{P}_{TM} (2) для волновода толщиной $h = 20$ мкм. Ромбами обозначены постоянные распространения $\hat{\gamma}_1 \approx 1,4$, $\hat{\gamma}_2 \approx 2,65$ (в нелинейном режиме) и $\tilde{\gamma}_1 \approx 1,25$, $\tilde{\gamma}_2 \approx 2,42$ (в линейном режиме) волновода

Fig. 2. Dispersion curves of problems \mathcal{P}_{TM}^0 (1) and \mathcal{P}_{TM} (2) for a waveguide of thickness $h = 20$ μm . Diamonds denote propagation constants $\hat{\gamma}_1 \approx 1,4$, $\hat{\gamma}_2 \approx 2,65$ (in the nonlinear regime) and $\tilde{\gamma}_1 \approx 1,25$, $\tilde{\gamma}_2 \approx 2,42$ (in the linear one) of the waveguide

$h = 20$ мкм на рис. 3, 4 соответствует волноводу толщиной 20 мкм. Точки пересечения дисперсионных кривых с этими прямыми, обозначенные на рисунках ромбами, являются постоянными распространения волновода.

На рис. 5–7 представлены компоненты электрического поля – функция E_y в случае ТЕ-поляризации и E_x , E_z в случае ТМ-поляризации – для постоянных распространения, отмеченных на рис. 1–4 ромбами.

Заключение

В данной работе, используя аналитический подход, исследовано распространение монохроматических ТЕ- и ТМ-поляризованных электромагнитных волн в плоском диэлектрическом слое, покрытом графеном. Важной особенностью данного исследования является учет кубической нелинейности графена, отвечающей так называемым эффектам самовоздействия, которые не влияют на частоту падающей электромагнитной волны.

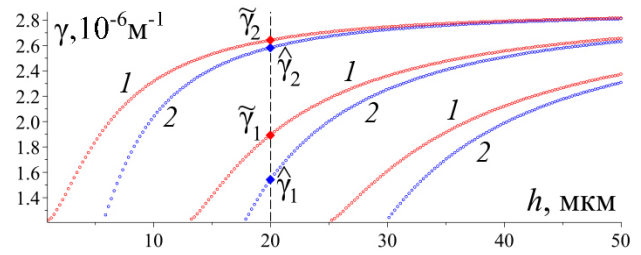


Рис. 3. Дисперсионные кривые задач \mathcal{P}_{TE}^0 (1) и \mathcal{P}_{TE} (2) для электромагнитной волны с частотой $\omega = 8\pi$ ТГц. Ромбами обозначены постоянные распространения $\hat{\gamma}_1 \approx 1,54$, $\hat{\gamma}_2 \approx 2,59$ (в нелинейном режиме) и $\tilde{\gamma}_1 \approx 1,89$, $\tilde{\gamma}_2 \approx 2,64$ (в линейном режиме) волновода

Fig. 3. Dispersion curves of problems \mathcal{P}_{TE}^0 (1) and \mathcal{P}_{TE} (2) for an electromagnetic wave with frequency $\omega = 8\pi$ THz. Diamonds denote propagation constants $\hat{\gamma}_1 \approx 1,54$, $\hat{\gamma}_2 \approx 2,59$ (in the nonlinear regime) and $\tilde{\gamma}_1 \approx 1,89$, $\tilde{\gamma}_2 \approx 2,64$ (in the linear one) of the waveguide

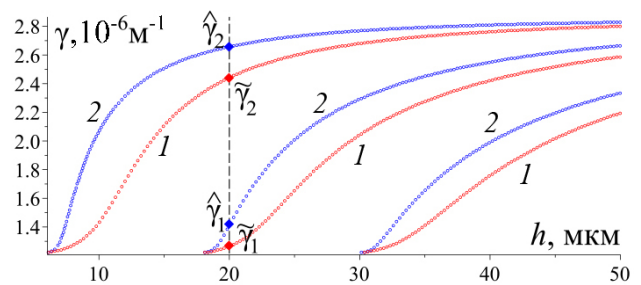


Рис. 4. Дисперсионные кривые задач \mathcal{P}_{TM}^0 (1) и \mathcal{P}_{TM} (2) для электромагнитной волны с частотой $\omega = 8\pi$ ТГц. Ромбами обозначены постоянные распространения $\hat{\gamma}_1 \approx 1,4$, $\hat{\gamma}_2 \approx 2,65$ (в нелинейном режиме) и $\tilde{\gamma}_1 \approx 1,25$, $\tilde{\gamma}_2 \approx 2,42$ (в линейном режиме) волновода

Fig. 4. Dispersion curves of problems \mathcal{P}_{TM}^0 (1) and \mathcal{P}_{TM} (2) for an electromagnetic wave with frequency $\omega = 8\pi$ THz. Diamonds denote propagation constants $\hat{\gamma}_1 \approx 1,4$, $\hat{\gamma}_2 \approx 2,65$ (in the nonlinear regime) and $\tilde{\gamma}_1 \approx 1,25$, $\tilde{\gamma}_2 \approx 2,42$ (in the linear one) of the waveguide

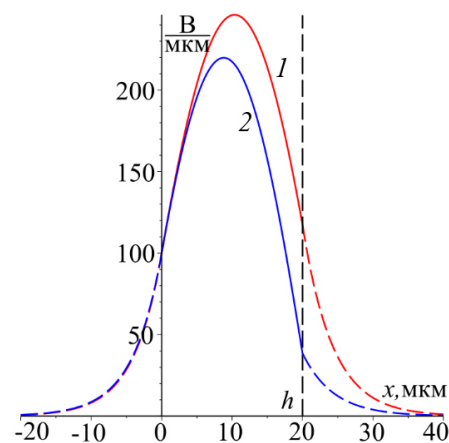


Рис. 5. Касательная компонента E_y электрического поля для постоянной распространения $\hat{\gamma}_1 \approx 1,54$ (2) в нелинейном режиме (задача \mathcal{P}_{TE}) и постоянной распространения $\tilde{\gamma}_1 \approx 1,89$ (1) в линейном режиме (задача \mathcal{P}_{TE}^0), которые отмечены на рис. 1, 3 ромбами на кривых 1 и 2

Fig. 5. Tangential component E_y of electric field for propagation constant $\hat{\gamma}_1 \approx 1,54$ (2) in the nonlinear regime (problem \mathcal{P}_{TE}) and propagation constant $\tilde{\gamma}_1 \approx 1,89$ (1) in the linear regime (problem \mathcal{P}_{TE}^0) which are denoted in figs. 1, 3 by diamonds on line 1 and 2

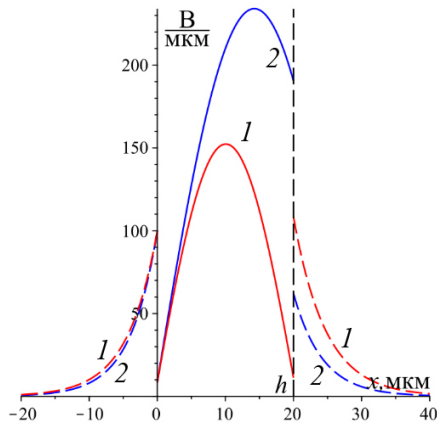


Рис. 6. Компонента iE_x электрического поля для постоянной распространения $\hat{\gamma}_2 \approx 2,65$ (2) в нелинейном режиме (задача \mathcal{P}_{TM}) и постоянной распространения $\tilde{\gamma}_2 \approx 2,44$ (1) в линейном режиме (задача $\mathcal{P}_{\text{TM}}^0$), которые отмечены на рис. 2, 4 ромбами на кривых 1 и 2

Fig. 6. Component iE_x of the electric field for propagation constant $\hat{\gamma}_2 \approx 2,65$ (2) in the nonlinear regime (problem \mathcal{P}_{TM}) and propagation constant $\tilde{\gamma}_2 \approx 2,44$ (1) in the linear regime (problem $\mathcal{P}_{\text{TM}}^0$) which are denoted in figs. 2, 4 by diamonds on line 1 and 2

В работе получены в явном виде пара дисперсионных уравнений (для ТЕ- и ТМ-волн), вполне описывающих волноводные свойства рассматриваемой структуры. При исследовании этих уравнений аналитически найдены условия на параметры волновода, обеспечивающие существование заданного числа волноводных мод.

Численные результаты, представленные в данной работе, дают некоторое представление о том, как нелинейность графена влияет на электромагнитные волны, распространяющиеся в структуре. Например, на рис. 1, 3 видно, что синие дисперсионные кривые задачи \mathcal{P}_{TE} (2) расположены ниже, чем красные дисперсионные кривые задачи $\mathcal{P}_{\text{TE}}^0$ (1). На рис. 2, 4 видно, что синие дисперсионные кривые задачи \mathcal{P}_{TM} (2) расположены выше, чем красные дисперсионные кривые зада-

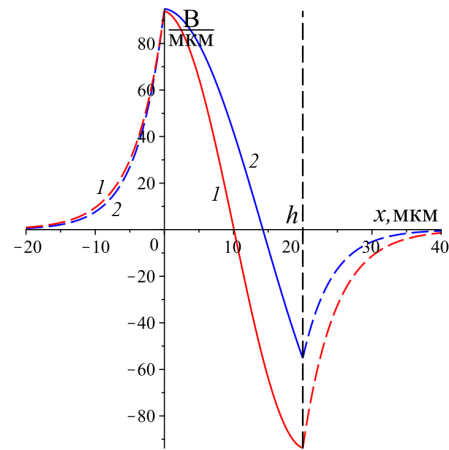


Рис. 7. Компонента E_z электрического поля для постоянной распространения $\hat{\gamma}_2 \approx 2,65$ (2) в нелинейном режиме (задача \mathcal{P}_{TM}) и постоянной распространения $\tilde{\gamma}_2 \approx 2,44$ (1) в линейном режиме (задача $\mathcal{P}_{\text{TM}}^0$), которые отмечены на рис. 2, 4 ромбами на кривых 1 и 2

Fig. 7. Component E_z of the electric field for propagation constant $\hat{\gamma}_2 \approx 2,65$ (2) in the nonlinear regime (problem \mathcal{P}_{TM}) and propagation constant $\tilde{\gamma}_2 \approx 2,44$ (1) in the linear regime (problem $\mathcal{P}_{\text{TM}}^0$) which are denoted in figs. 2, 4 by diamonds on line 1 and 2

чи $\mathcal{P}_{\text{TM}}^0$ (1). Принимая во внимание связь между волновым числом и длиной волны, получаем, что в плоском диэлектрическом волноводе с графеновым покрытием в сильном нелинейном режиме распространяются ТЕ-волны с большей длиной волны и ТМ-волны с меньшей длиной волны по сравнению с ТЕ- и ТМ-волнами, распространяющимися в том же волноводе в линейном режиме. Кроме того, сильная нелинейность графена приводит к большей локализации электромагнитного поля внутри волновода, см. рис. 5–7.

Финансирование

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда [проект № 20-11- 20087; <https://www.rscf.ru/project/23-11-45001>].

Список литературы

1. Geim A.K., Novoselov K.S. The rise of graphene // Nature Materials. 2007. Vol. 6, no. 6. P. 183–191. DOI: <https://doi.org/10.1038/nmat1849>
2. The electronic properties of graphene / A.H. Castro Neto [et al.] // Reviews of modern physics. 2009. Vol. 81, no. 1. P. 109–162. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.109>
3. Graphene-integrated waveguides: Properties, preparation, and applications / K. Chang [et al.] // Nano Research. 2022. Vol. 15, no. 11. P. 9704–9726. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12274-022-4539-4>
4. Ultralow loss graphene-based hybrid plasmonic waveguide with deep-subwavelength confinement / X. He [et al.] // Optics Express. 2018. Vol. 26, no. 8. P. 10109–10118. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.26.010109>
5. Huang C., Huang C. Terahertz waveguides by coupling plasmon polaritons of cylindrical metal wires and a graphene-embedded slot waveguide // Advanced Photonics Research. 2023. Vol. 4, no. 3. P. 2200287. DOI: <https://doi.org/10.1002/adpr.202200287>
6. Mikhailov S.A. Non-linear electromagnetic response of graphene // Europhysics Letters. 2007. Vol. 79, no. 2. P. 27002. DOI: <https://doi.org/10.1209/0295-5075/79/27002>
7. Mikhailov S.A., Ziegler K. Nonlinear electromagnetic response of graphene: frequency multiplication and self-consistent field effects // Journal of Physics: Condensed Matter. 2008. Vol. 20, no. 38. P. 384204. DOI: <https://doi.org/10.1088/0953-8984/20/38/384204>

8. High-field terahertz response of graphene / M.J. Paul [et al.] // *New Journal of Physics*. 2013. Vol. 15, no. 8. P. 085019. DOI: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/8/085019>
9. Extremely efficient terahertz high-harmonic generation in graphene by hot Dirac fermions / H.A. Hafez [et al.] // *Nature*. 2018. Vol. 561, no. 7724. P. 507–511. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0508-1>
10. Graphene surface plasmon polaritons with opposite in-plane electron oscillations along its two surfaces / L. Huawei [et al.] // *Applied Physics Letter*. 2015. Vol. 107, no. 9. P. 091602. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4929886>
11. Choon How G., Hong Son C., Er Ping L. Synthesis of highly confined surface plasmon modes with doped graphene sheets in the midinfrared and terahertz frequencies // *Physical Review B*. 2012. Vol. 85, no. 12. P. 125431. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.85.125431>
12. Nanoscale dielectric-graphene-dielectric tunable infrared waveguide with ultrahigh refractive indices / B. Zhu [et al.] // *Optics Express*. 2013. Vol. 21, no. 14. P. 17089–17096. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.21.017089>
13. Voltage-controlled surface plasmon-polaritons in double graphene layer structures / D. Svintsov [et al.] // *Journal of Applied Physics*. 2013. Vol. 113, no. 5. P. 053701. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4789818>
14. Belonenko M.B., Lebedev N.G., Yanyushkina N.N. Solitons in a system of coupled graphene waveguides // *Physics of the Solid State*. 2012. Vol. 54, no. 1. P. 174–177. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063783412010052>
15. Plasmons in waveguide structures formed by two graphene layers / P.I. Buslaev [et al.] // *JETP Letters*. 2013. Vol. 97, no. 9. P. 535–539. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021364013090063>
16. Evseev D.A., Eliseeva S.V., Sementsov D.I. Waves in a plane graphene - dielectric waveguide structure // *The European Physical Journal Applied Physics*. 2017. Vol. 80, no. 1. P. 10501. DOI: <https://doi.org/10.1051/epjap/2017170167>
17. Hanson G.W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene // *Journal of Applied Physics*. 2008. Vol. 103, no. 6. P. 064302. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2891452>
18. Falkovsky L.A. Optical properties of graphene // *Journal of Physics: Conference Series*. 2008. Vol. 129, no. 1. P. 012004. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/129/1/012004>
19. Carrier relaxation in epitaxial graphene photoexcited near the Dirac point / S. Winnerl [et al.] // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 107, no. 23. P. 237401. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.237401>
20. Cheng J.L., Vermeulen N., Sipe J.E. Third order optical nonlinearity of graphene // *New Journal of Physics*. 2014. Vol. 16, no. 5. P. 053014. DOI: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/16/5/053014>
21. Smirnov Y., Tikhov S. The nonlinear eigenvalue problem of electromagnetic wave propagation in a dielectric layer covered with graphene // *Photonics*. 2023. Vol. 10, no. 5. P. 523. DOI: <https://doi.org/10.3390/photonics10050523>
22. Investigation of the temperature dependence of dielectric relaxation in liquid water by THz reflection spectroscopy and molecular dynamics simulation / C. Ronne [et al.] // *The Journal of Chemical Physics*. 1997. Vol. 107, no. 14. P. 5319–5331. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.474242>
23. Temperature-dependent refractive index of quartz at terahertz frequencies / C.L. Davies [et al.] // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. 2018. Vol. 39, no. 12. P. 1236–1248. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10762-018-0538-7>
24. Graphene-based devices in terahertz science and technology / T. Otsuji [et al.] // *Journal of Physics D: Applied Physics*. 2012. Vol. 45, no. 30. P. 303001. DOI: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/45/30/303001>

Информация об авторах

Смирнов Юрий Геннадьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования Пензенского государственного университета, г. Пенза, Россия.

Область научных интересов: краевые задачи электродинамики, задачи о распространении электромагнитных волн в волноводных структурах, численные методы.

E-mail: smirnovyug@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9040-628X>

SPIN-код (eLibrary): 1415-9378

AuthorID (eLibrary): 8341

ResearcherID (WoS): A-4813-2014

Тихов Станислав Вячеславович, аспирант кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования Пензенского государственного университета, г. Пенза, Россия.

Область научных интересов: электродинамика, волноводы, нелинейные эффекты, нелинейные задачи на собственные значения, дифференциальные уравнения.

E-mail: Tik.Stanislav2015@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8495-0569>

SPIN-код (eLibrary): 7767-2367

AuthorID (eLibrary): 1052340

ResearcherID (WoS): AAF-9412-2019

Physics of Wave Processes and Radio Systems

2023, vol. 26, no. 4, pp. 68–77

Electromagnetic TE- and TM-waves propagation in a plane waveguide covered with graphene characterized by nonlinear conductivity

Yury G. Smirnov , Stanislav V. Tikhov 

Penza State University
40, Krasnaya Street,
Penza, 440026, Russia

Abstract – Background. Guiding properties of waveguiding structures with graphene are of great importance for various applications and have been studied in many papers. In all such studies, graphene was characterized, as a rule, by linear surface conductivity. However, if the intensity of an electromagnetic wave is large enough, the interaction of graphene with the electromagnetic wave becomes nonlinear; in this case, it is more correct to describe graphene by nonlinear conductivity. **Aim.** This work is aimed at studying the influence of cubic nonlinearity of graphene, corresponding to the so-called self-action effects (not affecting the frequency of the incident wave), on the propagation of TE- and TM-polarized waves in the structure, which is a plain dielectric layer covered on one side by graphene. **Methods.** In this study, the guiding properties of the waveguide are studied using primarily an analytical approach. Thus, from Maxwell's equations, material equations and boundary conditions, a couple of dispersion equations for TE- and TM-polarized waves is derived and then its solvability is studied. In addition, some numerical experiments are carried out in the study. **Results.** The dispersion equations of the studied waveguiding structure for TE- and TM-polarized waves are derived in explicit form. Studying analytically obtained equations, conditions for waveguide parameters are found, providing the existence of a given number of waveguide modes. In addition, some numerical results are obtained in the paper, which give an idea of the influence of nonlinear effects on the electromagnetic waves propagating in the structure. **Conclusion.** The results obtained in this paper reveal two effects related to the cubic nonlinearity of graphene. Firstly, in a plain dielectric layer with graphene coating in the strong nonlinear regime TE-waves with longer wavelength and TM-waves with shorter wavelength propagate compared to electromagnetic waves that propagate in the same structure in the linear regime. Secondly, the strong cubic nonlinearity leads to a greater localization of the electromagnetic wave within the waveguiding structure.

Keywords – electromagnetic waves; dielectric waveguide; plain layer; graphene; nonlinear conductivity; Maxwell's equations; dispersion relation.

✉ smirnovyug@mail.ru (Yury G. Smirnov)

 © Yury G. Smirnov, Stanislav V. Tikhov, 2023

References

1. A. K. Geim and K. S. Novoselov, "The rise of graphene," *Nature Materials*, vol. 6, no. 6, pp. 183–191, 2007, doi: <https://doi.org/10.1038/nmat1849>.
2. A. H. Castro Neto et al., "The electronic properties of graphene," *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, no. 1, pp. 109–162, 2009, doi: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.81.109>.
3. K. Chang et al., "Graphene-integrated waveguides: Properties, preparation, and applications," *Nano Research*, vol. 15, no. 11, pp. 9704–9726, 2022, doi: <https://doi.org/10.1007/s12274-022-4539-4>.
4. X. He et al., "Ultralow loss graphene-based hybrid plasmonic waveguide with deep-subwavelength confinement," *Optics Express*, vol. 26, no. 8, pp. 10109–10118, 2018, doi: <https://doi.org/10.1364/OE.26.010109>.
5. C. Huang and C. Huang, "Terahertz waveguides by coupling plasmon polaritons of cylindrical metal wires and a graphene-embedded slot waveguide," *Advanced Photonics Research*, vol. 4, no. 3, p. 2200287, 2023, doi: <https://doi.org/10.1002/adpr.202200287>.
6. S. A. Mikhailov, "Non-linear electromagnetic response of graphene," *Europhysics Letters*, vol. 79, no. 2, p. 27002, 2007, doi: <https://doi.org/10.1209/0295-5075/79/27002>.
7. S. A. Mikhailov and K. Ziegler, "Nonlinear electromagnetic response of graphene: frequency multiplication and self-consistent field effects," *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 20, no. 38, p. 384204, 2008, doi: <https://doi.org/10.1088/0953-8984/20/38/384204>.
8. M. J. Paul et al., "High-field terahertz response of graphene," *New Journal of Physics*, vol. 15, no. 8, p. 085019, 2013, doi: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/8/085019>.
9. H. A. Hafez et al., "Extremely efficient terahertz high-harmonic generation in graphene by hot Dirac fermions," *Nature*, vol. 561, no. 7724, pp. 507–511, 2018, doi: <https://doi.org/10.1038/s41586-018-0508-1>.
10. L. Huawei et al., "Graphene surface plasmon polaritons with opposite in-plane electron oscillations along its two surfaces," *Applied Physics Letter*, vol. 107, no. 9, p. 091602, 2015, doi: <https://doi.org/10.1063/1.4929886>.
11. G. Choon How, C. Hong Son, and L. Er Ping, "Synthesis of highly confined surface plasmon modes with doped graphene sheets in the midinfrared and terahertz frequencies," *Physical Review B*, vol. 85, no. 12, p. 125431, 2012, doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.85.125431>.
12. B. Zhu et al., "Nanoscale dielectric-graphene-dielectric tunable infrared waveguide with ultrahigh refractive indices," *Optics Express*, vol. 21, no. 14, pp. 17089–17096, 2013, doi: <https://doi.org/10.1364/OE.21.017089>.
13. D. Svintsov et al., "Voltage-controlled surface plasmon-polaritons in double graphene layer structures," *Journal of Applied Physics*, vol. 113, no. 5, p. 053701, 2013, doi: <https://doi.org/10.1063/1.4789818>.

14. M. B. Belonenko, N. G. Lebedev, and N. N. Yanyushkina, “Solitons in a system of coupled graphene waveguides,” *Physics of the Solid State*, vol. 54, no. 1, pp. 174–177, 2012, doi: <https://doi.org/10.1134/S1063783412010052>.
15. P. I. Buslaev et al., “Plasmons in waveguide structures formed by two graphene layers,” *JETP Letters*, vol. 97, no. 9, pp. 535–539, 2013, doi: <https://doi.org/10.1134/S0021364013090063>.
16. D. A. Evseev, S. V. Eliseeva, and D. I. Sementsov, “Waves in a plane graphene - dielectric waveguide structure,” *The European Physical Journal Applied Physics*, vol. 80, no. 1, p. 10501, 2017, doi: <https://doi.org/10.1051/epjap/2017170167>.
17. G. W. Hanson, “Dyadic Green’s functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene,” *Journal of Applied Physics*, vol. 103, no. 6, p. 064302, 2008, doi: <https://doi.org/10.1063/1.2891452>.
18. L. A. Falkovsky, “Optical properties of graphene,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 129, no. 1, p. 012004, 2008, doi: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/129/1/012004>.
19. S. Winnerl et al., “Carrier relaxation in epitaxial graphene photoexcited near the Dirac point,” *Physical Review Letters*, vol. 107, no. 23, p. 237401, 2011, doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.237401>.
20. J. L. Cheng, N. Vermeulen, and J. E. Sipe, “Third order optical nonlinearity of graphene,” *New Journal of Physics*, vol. 16, no. 5, p. 053014, 2014, doi: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/16/5/053014>.
21. Y. Smirnov and S. Tikhov, “The nonlinear eigenvalue problem of electromagnetic wave propagation in a dielectric layer covered with graphene,” *Photonics*, vol. 10, no. 5, p. 523, 2023, doi: <https://doi.org/10.3390/photonics10050523>.
22. C. Ronne et al., “Investigation of the temperature dependence of dielectric relaxation in liquid water by THz reflection spectroscopy and molecular dynamics simulation,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 107, no. 14, pp. 5319–5331, 1997, doi: <https://doi.org/10.1063/1.474242>.
23. C. L. Davies et al., “Temperature-dependent refractive index of quartz at terahertz frequencies,” *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*, vol. 39, no. 12, pp. 1236–1248, 2018, doi: <https://doi.org/10.1007/s10762-018-0538-7>.
24. T. Otsuji et al., “Graphene-based devices in terahertz science and technology,” *Journal of Physics D: Applied Physics*, vol. 45, no. 30, p. 303001, 2012, doi: <https://doi.org/10.1088/0022-3727/45/30/303001>.

Information about the Authors

Yury G. Smirnov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Mathematics and Supercomputing, Penza State University, Penza, Russia.

Research interests: boundary value problems of electrodynamics, problems of propagation of electromagnetic waves in waveguide structures, numerical methods.

E-mail: smirnovyug@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9040-628X>

SPIN-code (eLibrary): 1415-9378

AuthorID (eLibrary): 8341

ResearcherID (WoS): A-4813-2014

Stanislav V. Tikhov, PhD student of the Department of Mathematics and Supercomputing, Penza State University, Penza, Russia.

Research interests: electrodynamics, waveguides, nonlinear phenomena, nonlinear eigenvalue problems, differential equations.

E-mail: Tik.Stanislav2015@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8495-0569>

SPIN-code (eLibrary): 7767-2367

AuthorID (eLibrary): 1052340

ResearcherID (WoS): AAF-9412-2019