Физика волновых процессов и радиотехнические системы
2022. Т. 25, № 4. С. 33–38

DOI 10.18469/1810-3189.2022.25.4.33-38
УДК 621.391.1: 621.395

Дата поступления 10 марта 2022
Дата принятия 11 апреля 2022

Спектральное решение для системы с запаздыванием с гиперэрланговскими распределениями

В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики
443010, Россия, г. Самара,
ул. Л. Толстого, 23

Аннотация – Статья посвящена построению математической модели задержки требований в очереди в виде системы массового обслуживания, описываемой двумя потоками с законами распределения временных интервалов, сдвинутыми вправо гиперэрланговскими распределениями второго порядка. В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 актуальны в связи с тем, что не существует решения в конечном виде для общего случая. Поэтому в качестве произвольного закона распределения G при исследовании таких систем используют различные частные законы распределений. В данном случае использование сдвинутого гиперэрланговского закона распределения обеспечивает коэффициент вариации интервалов поступлений входного потока и времени обслуживания на всем интервале (0, ∞). Для решения поставленной задачи использован метод спектрального решения интегрального уравнения Линдли, который играет важную роль в теории массового обслуживания. Данный метод позволил получить решение для средней задержки требований в очереди для рассматриваемой системы в замкнутой форме. Как известно, остальные характеристики системы массового обслуживания являются производными от средней задержки требований.

Ключевые слова – сдвинутое гиперэрланговское распределение; интегральное уравнение Линдли; метод спектрального разложения; преобразование Лапласа.

Введение

Для моделирования трафика современных сетей телекоммуникаций широко используются системы G/G/1 при частных законах распределений, т. к. не существует решения для таких систем в конечном виде для общего случая. Для исследования таких систем используют метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли, который наиболее доступно представлен в [1]. В русскоязычной научной литературе аналогом этого метода является метод факторизации с использованием характеристических функций [2].

Настоящая статья посвящена анализу СМО $HE_2/HE_2/1$ со сдвинутыми вправо от нулевой точки гиперэрланговскими (HE_2) входными распределениями второго порядка и является продолжением исследований [3–6]. В результате этого будем иметь новую СМО с запаздыванием во времени, которую обозначим через $HE_2^-/HE_2^-/1$ в отличие от обычной системы $HE_2/HE_2/1$, рассмотренной в [5].

В общем случае гиперэрланговский закон распределения порядка R задается плотностью

$$f(t)=\begin{cases}\displaystyle\sum_i^R \alpha_i \frac{k_i\lambda_i(k_i\lambda_i t)^{k_i-1}}{(k_i-1)!}e^{-k_i\lambda_i t}, & t>0;\\ 0, & t\le 0,\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^R \alpha_i = 1$$

и обозначается HE_R [1]. Гиперэрланговское распределение представляет собой вероятностную смесь нормированных распределений Эрланга порядка k с функцией плотности вида

$$f_k(t)=\frac{k\lambda(k\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-k\lambda t}$$

и является наиболее общим распределением неотрицательных непрерывных случайных величин, поскольку имеет коэффициент вариации c_τ в интервале от 0 до ∞ [8].

В данной работе мы ограничимся гиперэрланговским распределением второго порядка при $k_i=2$ с функцией плотности

$$f(t)=4p\lambda_1^2 te^{-2\lambda_1 t}+4(1-p)\lambda_2^2 te^{-2\lambda_2 t}$$

в связи с тем, что при $k_i\ge 3$ дальнейшие выкладки становятся чрезвычайно трудоемкими.

Для системы $HE_2^-/HE_2^-/1$ интервалы поступлений и времени обслуживания описываются функциями плотностей сдвинутых вправо от нулевой точки гирерэрланговских законов распределений второго порядка:

$$a(t)=4p\lambda_1^2(t-t_0)e^{-2\lambda_1(t-t_0)}+ \tag{1}$$
$$+4(1-p)\lambda_2^2(t-t_0)e^{-2\lambda_2(t-t_0)},$$

$$b(t)=4q\mu_1^2(t-t_0)e^{-2\mu_1(t-t_0)}+ \tag{2}$$
$$+4(1-q)\mu_2^2(t-t_0)e^{-2\mu_2(t-t_0)},$$

tarasov-vn@psuti.ru (*Тарасов Вениамин Николаевич*)

где $t_0 \geq 0$ – параметр сдвига закона распределения.

Кроме метода спектрального решения в статье использован опыт аппроксимации законов распределений [7–12]. Результаты современных исследований по системам массового обслуживания приведены в работах [13–15].

1. Постановка и решение задачи

В статье ставится задача нахождения решения для задержки требований в очереди в СМО $HE_2^-/HE_2^-/1$. Вкратце решение интегрального уравнения Линдли методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения

$$A^*(-s)\cdot B^*(s)-1=\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}$$

представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от s. Здесь $A^*(s)$ и $B^*(s)$, соответственно, преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов входного потока $a(t)$ и времени обслуживания $b(t)$, $\psi_+(s)$ и $\psi_-(s)$ компоненты спектрального разложения – некоторые рациональные функции от s, которые можно разложить на множители.

Преобразования Лапласа функций (1) и (2) будут соответственно:

$$A^*(s)=\left[p\left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1+s}\right)^2+(1-p)\left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2+s}\right)^2\right]e^{-t_0 s};$$

$$B^*(s)=\left[q\left(\frac{2\mu_1}{2\mu_1+s}\right)^2+(1-q)\left(\frac{2\mu_2}{2\mu_2+s}\right)^2\right]e^{-t_0 s}.$$

Тогда спектральное разложение решения интегрального уравнения Линдли для рассматриваемой системы

$$A^*(-s)\cdot B^*(s)-1=\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}$$

примет вид

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}=\left[p\left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1-s}\right)^2+(1-p)\left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2-s}\right)^2\right]e^{t_0 s}\times \quad (3)$$

$$\times\left[q\left(\frac{2\mu_1}{2\mu_1+s}\right)^2+(1-q)\left(\frac{2\mu_2}{2\mu_2+s}\right)^2\right]e^{-t_0 s}-1=$$

$$=\left[p\left(\frac{2\lambda_1}{2\lambda_1-s}\right)^2+(1-p)\left(\frac{2\lambda_2}{2\lambda_2-s}\right)^2\right]\times$$

$$\times\left[q\left(\frac{2\mu_1}{2\mu_1+s}\right)^2+(1-q)\left(\frac{2\mu_2}{2\mu_2+s}\right)^2\right]-1.$$

Выражение (3) получено на основании теоремы о запаздывании в теории преобразования Лапласа. Здесь показатели степени у экспонент с противоположными знаками в спектральном разложении обнуляются, и таким образом операция сдвига во времени нивелируется. Следовательно спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для системы со сдвинутыми распределениями $HE_2^-/HE_2^-/1$ и для обычной системы $HE_2/HE_2/1$ будут идентичными. Тогда мы можем использовать результаты, полученные в [5] для обычной системы $HE_2/HE_2/1$, и сразу записать компоненты спектрального разложения, не повторяя выкладки в [5]:

$$\psi_+(s)=\frac{s(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}{[(s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2]}, \quad (4)$$

$$\psi_-(s)=-\frac{(2\lambda_1-s)^2(2\lambda_2-s)^2}{(s-s_5)(s-s_6)(s-s_7)}.$$

В выражениях (4) $-s_1$, $-s_2$, $-s_3$, $-s_4$ – корни многочлена (5) седьмой степени с отрицательными вещественными частями, а s_5, s_6, s_7 – корни с положительными вещественными частями. Многочлен в числителе разложения (3), содержащий 92 слагаемых после приведения подобных членов, имеет вид

$$s^7-c_6s^6-c_5s^5-c_4s^4-c_3s^3-c_2s^2-c_1s-c_0 \quad (5)$$

и собран с помощью символьных операций Mathcad. Его коэффициенты:

$$c_0=a_0b_1-a_1b_0-256\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2\times \quad (6)$$
$$\times[\lambda_1\lambda_2(\mu_1+\mu_2)-\mu_1\mu_2(\lambda_1+\lambda_2)],$$

$$c_1=a_0b_2-a_1b_1+a_2b_0-64[\lambda_1^2\lambda_2^2\left(\mu_1^2+\mu_2^2\right)+$$
$$+\mu_1^2\mu_2^2\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)]-256\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2\times$$
$$\times(\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\mu_1-\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1-\lambda_2\mu_2+\mu_1\mu_2),$$

$$c_2=a_2b_1-a_1b_2-64\{[\lambda_1^2\lambda_2^2+\mu_1\mu_2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)]\times$$
$$\times(\mu_1+\mu_2)-(\lambda_1^2\lambda_2+\lambda_1\lambda_2^2)(\mu_1^2+\mu_2^2)+$$
$$+\mu_1^2\mu_2^2(\lambda_1+\lambda_2)]\}+256\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2(\lambda_1+\lambda_2-\mu_1-\mu_2),$$

$$c_3=a_2b_2-16[\lambda_1^2\lambda_2^2+\mu_1^2\mu_2^2+(\lambda_1^2+\lambda_2^2)(\mu_1^2+\mu_2^2)]+$$
$$+64[(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1+\mu_2)(\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2)-$$
$$-\lambda_1\lambda_2(\mu_1^2+\mu_2^2)-\mu_1\mu_2(\lambda_1^2+\lambda_2^2)-4\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2],$$

$$c_4 = 16[(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1\lambda_2+4\mu_1\mu_2)-(\mu_1+\mu_2)\times$$
$$\times(\lambda_1^2+\lambda_2^2+4\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2)+(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1^2+\mu_2^2)],$$
$$c_5 = 16[(\lambda_1+\lambda_2)(\mu_1+\mu_2)-\lambda_1\lambda_2-$$
$$-\mu_1\mu_2-4(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\mu_1^2+\mu_2^2)],$$
$$c_6 = 4(\lambda_1+\lambda_2-\mu_1-\mu_2).$$

Коэффициенты (6) для сокращения их записи содержат промежуточные параметры:

$$a_0 = 16\lambda_1^2\lambda_2^2, \quad a_1 = 16\lambda_1\lambda_2[p\lambda_1+(1-p)\lambda_2],$$
$$a_2 = 4[p\lambda_1^2+(1-p)\lambda_2^2], \quad b_0 = 16\mu_1^2\mu_2^2,$$
$$b_1 = 16\mu_1\mu_2[q\mu_1+(1-q)\mu_2],$$
$$b_2 = 4[q\mu_1^2+(1-q)\mu_2^2].$$

И все они зависят от параметров распределений (1) и (2).

Исследование многочлена числителя разложения, нахождение его нулей, а также полюсов разложения – это главное в спектральном решении интегрального уравнения Линдли. Далее по методике спектрального разложения определим постоянную

$$K = \lim_{s\to 0}\frac{\psi_+(s)}{s} =$$
$$= \lim_{s\to 0}\frac{(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}{(s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2} = \frac{s_1s_2s_3s_4}{16\mu_1^2\mu_2^2}.$$

Через нее определяем преобразование Лапласа ФРВ времени ожидания

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} =$$
$$= \frac{s_1s_2s_3s_4(s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2}{16\mu_1^2\mu_2^2 s(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}.$$

Тогда преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания будет

$$W^*(s) = \frac{s_1s_2s_3s_4(s+2\mu_1)^2(s+2\mu_2)^2}{16\mu_1^2\mu_2^2(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)(s+s_4)}, \tag{7}$$

а его производная со знаком минус в т. $s=0$ дает среднее время ожидания

$$-\left.\frac{dW^*(s)}{ds}\right|_{s=0} = \frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3}+\frac{1}{s_4}-\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}.$$

Окончательно, среднее время ожидания требований в очереди будет выражаться формулой

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\frac{1}{s_3}+\frac{1}{s_4}-\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}. \tag{8}$$

2. Методика использования расчетной формулы (8)

Для практического использования формулы (8) необходимо определить входящие в нее параметры. Для этого нужно найти неизвестные параметры сдвинутых распределений (1) и (2), а через них – коэффициенты (6) многочлена (5). Неизвестные параметры сдвинутых распределений найдем методом моментов, которые, в свою очередь, определяем с помощью преобразований Лапласа функций (1) и (2). Первые два начальных момента распределения (1) имеют вид

$$\bar{\tau}_\lambda = p\lambda_1^{-1}+(1-p)\lambda_2^{-1}+t_0, \tag{9}$$
$$\overline{\tau_\lambda^2} = t_0^2+2t_0\left[\frac{p}{\lambda_1}+\frac{(1-p)}{\lambda_2}\right]+\frac{3p}{2\lambda_1^2}+\frac{3(1-p)}{2\lambda_2^2}.$$

Через них найдем квадрат коэффициента вариации

$$c_\lambda^2 = \frac{\lambda_1^2-2p\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)+p(1-2p)(\lambda_1-\lambda_2)^2}{2[t_0\lambda_1\lambda_2-p(\lambda_1-\lambda_2)+\lambda_1]^2}. \tag{10}$$

Аналогично для распределения (2) запишем

$$\bar{\tau}_\mu = q\mu_1^{-1}+(1-q)\mu_2^{-1}+t_0, \tag{11}$$
$$\overline{\tau_\mu^2} = t_0^2+2t_0\left[\frac{q}{\mu_1}+\frac{(1-q)}{\mu_2}\right]+\frac{3q}{2\mu_1^2}+\frac{3(1-q)}{2\mu_2^2},$$

$$c_\mu^2 = \frac{\mu_1^2-2q\mu_2(\mu_1-\mu_2)+q(1-2q)(\mu_1-\mu_2)^2}{2[t_0\mu_1\mu_2-q(\mu_1-\mu_2)+\mu_1]^2}. \tag{12}$$

Неизвестные параметры λ_1, λ_2, p, μ_1, μ_2, q для сдвинутых распределений (1) и (2) определим из уравнений моментов (9)–(12) тем же способом, как они в [5] найдены для обычных распределений. Для этого положим

$$\lambda_1 = \frac{2p}{(\bar{\tau}_\lambda-t_0)}, \quad \lambda_2 = \frac{2(1-p)}{(\bar{\tau}_\lambda-t_0)}$$

и после их подстановки в (10) получим уравнение 4-й степени относительно p, и после исключения тривиальных решений $p=0$, $p=1$ остается квадратное уравнение, корни которого равны

$$p = \frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{3(\bar{\tau}_\lambda-t_0)^2}{8[(\bar{\tau}_\lambda-t_0)^2+c_\lambda^2\bar{\tau}_\lambda^2]}}.$$

Аналогично для распределения (2):

$$\mu_1 = \frac{2q}{(\bar{\tau}_\mu-t_0)}, \quad \mu_2 = \frac{2(1-q)}{(\bar{\tau}_\mu-t_0)},$$

$$q = \frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{3(\bar{\tau}_\mu-t_0)^2}{8[(\bar{\tau}_\mu-t_0)^2+c_\mu^2\bar{\tau}_\mu^2]}}.$$

Таблица. Результаты экспериментов для СМО $HE_2^-/HE_2^-/1$ при $c_\lambda = c_\mu = 2$ для обычной СМО $HE_2/HE_2/1$
Table. Results of experiments for QS $HE_2^-/HE_2^-/1$ at $c_\lambda = c_\mu = 2$ for ordinary QS $HE_2/HE_2/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
ρ	c_λ	c_μ	t_0	для СМО $HE_2^- / HE_2^- / 1$	для СМО $HE_2/HE_2/1$
0,1	1,999	1,99	0,01	0,33	0,34
	1,99	1,90	0,1	0,30	
	1,95	1,50	0,5	0,17	
	1,901	1,01	0,99	0,06	
0,5	1,995	1,99	0,01	3,93	3,98
	1,95	1,90	0,1	3,51	
	1,75	1,50	0,5	1,91	
	1,505	1,01	0,99	0,53	
0,9	1,991	1,99	0,01	35,84	36,21
	1,91	1,90	0,1	32,53	
	1,55	1,50	0,5	19,33	
	1,109	1,01	0,99	4,87	

Выражения для вероятностей p и q определяют область применимости системы $HE_2^-/HE_2^-/1$ через коэффициенты вариаций

$$c_\lambda \geq 1 - \frac{t_0}{\bar{\tau}_\lambda}, \quad c_\mu \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \frac{t_0}{\bar{\tau}_\mu})$$

при $0 < t_0 < \bar{\tau}_\mu$.

Таким образом, алгоритм расчета среднего времени ожидания при заданных входных параметрах $\bar{\tau}_\lambda$, $\bar{\tau}_\mu$, c_λ, c_μ, t_0 сводится к последовательному решению уравнений (9)–(12) для нахождения параметров распределений (1) и (2) λ_1, λ_2, p, μ_1, μ_2, q. Далее определяем коэффициенты многочлена (6) и находим нужные корни с отрицательными вещественными частями $-s_1$, $-s_2$, $-s_3$, $-s_4$, а после применяем формулу (8).

3. Результаты вычислительных экспериментов

В таблице приведены данные расчетов для системы $HE_2^-/HE_2^-/1$ для случаев малой, средней и высокой нагрузки $\rho = 0,1$; 0,5; 0,9; при фиксированном значении $c_\lambda = c_\mu = 2$ для обычной системы $HE_2/HE_2/1$. Заметим, что обычная система $HE_2/HE_2/1$ применима при $c_\lambda \geq 1/\sqrt{2}$ и $c_\mu \geq 1/\sqrt{2}$, а система $HE_2^-/HE_2^-/1$ – при $c_\lambda > 0$ и $c_\mu > 0$. Таким образом, система $HE_2^-/HE_2^-/1$ применима для широкого диапазона изменения параметров, чем обычная система $HE_2/HE_2/1$ и расширяет ее возможности.

В правой колонке таблицы для сравнения приведены результаты для обычной системы $HE_2/HE_2/1$. Коэффициент загрузки в данном случае определяется отношением средних интервалов $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$. Расчеты, приведенные в таблице, проведены для удобства для нормированного времени обслуживания $\bar{\tau}_\mu = 1$.

Заключение

Таким образом, по результатам работы можно сделать следующие выводы.

Операция сдвига во времени уменьшает коэффициенты вариаций интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. В связи с тем что среднее время ожидания в системе G/G/1 связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслуживания квадратичной зависимостью, среднее время ожидания в системе с запаздыванием будет многократно меньше, чем в обычной системе при одинаковом коэффициенте загрузки. Например, для системы $HE_2^-/HE_2^-/1$ при загрузке $\rho = 0,9$ и параметре сдвига $t_0 = 0,99$ коэффициент вариации интервалов поступления c_λ уменьшается с 2 для обычной системы до 1,109, коэффициент вариации времени обслуживания c_μ снижается с 2 до 1,01, а время ожидания уменьшается с 36,21 единицы времени для обычной системы до 4,87 единицы времени для системы с запаздыванием. Таким образом, имеем многократное уменьшение средней задержки в очереди.

С уменьшением значения параметра t_0 среднее время ожидания в системе $HE_2^-/HE_2^-/1$ стремится к среднему времени ожидания в обычной системе $HE_2/HE_2/1$. Это полностью подтверждает адекватность построенной математической модели массового обслуживания.

Основным преимуществом системы со сдвинутыми распределениями является расширение диапазона применимости по сравнению с обычной СМО.

Список литературы

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / пер. с англ. под ред. В.И. Неймана. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: РУДН, 1995. 529 с.
3. Tarasov V.N. Extension of the class of queueing systems with delay // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79, no. 12. P. 2147–2158. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117918120056
4. Тарасов В.Н. Анализ и сравнение двух систем массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями // Радиоэлектроника, информатика, управление. 2018. № 4. С. 61–70. DOI: https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-4-6
5. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Када О. Система массового обслуживания $HE_2/HE_2/1$ // Инфокоммуникационные технологии. 2019. Т. 17, № 1. С. 17–22. URL: http://ikt.psuti.ru/ru/archive/2019/1-2019/queueing-system-he2-he2-1
6. Тарасов В.Н., Липилина Л.В., Бахарева Н.Ф. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров // Информационные технологии. 2016. Т. 22, № 12. С. 952–957. URL: http://novtex.ru/IT/it2016/it1216_web-952-957.pdf
7. Brännström N. A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems: master’s thesis applied to HS-DSCH. Lulea University of Technology, 2004. 79 p. URL: http://ltu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1016709/FULLTEXT01
8. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.
9. Алиев Т.И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 2 (84). С. 88–93. URL: https://ntv.ifmo.ru/ru/article/4127/approksimaciya_veroyatnostnyh_raspredeleniy_v_modelyah_massovogo_obsluzhivaniya.htm
10. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress. Copenhagen, Denmark. 19–26 June 1991. P. 683–688. URL: https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true
11. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods // Operation Research. 1982. Vol. 30, no. 1. P. 125–147. DOI: https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125
12. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Компьютерное моделирование вычислительных систем. Теория, Алгоритмы, Программы. Оренбург: ОГУ, 2005. 183 с.
13. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues // Queueing Systems. 2016. Vol. 84, no. 1–2. P. 145–202. DOI: https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y
14. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times // Queueing Systems. 2018. Vol. 89, no. 3–4. P. 213–241. DOI: https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z
15. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates // Queueing Systems. 2018. Vol. 89, no. 3–4. P. 269–301. DOI: https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7

References

1. Klejnrok L. *Queuing Theory* / trans. from English ed. by V.I. Neumann. Moscow: Mashinostroenie, 1979, 432 p. (In Russ.)
2. Bocharov P.P., Pechinkin A.V. *Queuing Theory*. Moscow: RUDN, 1995, 529 p. (In Russ.)
3. Tarasov V.N. Extension of the class of queueing systems with delay. *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 12, pp. 2147–2158. DOI: https://doi.org/10.1134/S00051179181200564
4. Tarasov V.N. Analysis and comparison of two queuing systems with hyper-Erlang input distributions. *Radioelektronika, informatika, upravlinnja*, 2018, no. 4, pp. 61–70. DOI: https://doi.org/10.15588/1607-3274-2018-4-6 (In Russ.)
5. Tarasov V.N., Bakhareva N.F., Kada O. Queueing system $HE_2/HE_2/1$. *Infokommunikacionnye tehnologii*, 2019, vol. 17, no. 1, pp. 17–22. URL: http://ikt.psuti.ru/ru/archive/2019/1-2019/queueing-system-he2-he2-1
6. Tarasov V.N., Lipilina L.V., Bahareva N.F. Automation of calculating the characteristics of queuing systems for a wide range of changes in their parameters. *Informatsionnye tehnologii*, 2016, vol. 22, no. 12, pp. 952–957. URL: http://novtex.ru/IT/it2016/it1216_web-952-957.pdf (In Russ.)
7. Brännström N. A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems: master’s thesis applied to HS-DSCH. Lulea University of Technology, 2004, 79 p. URL: http://ltu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1016709/FULLTEXT01
8. Aliev T.I. *Discrete Modeling Basics*. Saint Petersburg: SPbGU ITMO, 2009, 363 p. (In Russ.)
9. Aliev T.I. Approximation of probability distributions in queuing models. *Nauchno-tehnicheskij vestnik informatsionnyh tehnologij, mehaniki i optiki*, 2013, no. 2 (84), pp. 88–93. URL: https://ntv.ifmo.ru/ru/article/4127/approksimaciya_veroyatnostnyh_raspredeleniy_v_modelyah_massovogo_obsluzhivaniya.htm (In Russ.)
10. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change, ITC-13: proc. of congress*, Copenhagen, Denmark, 19–26 June 1991, pp. 683–688. URL: https://gitlab2.informatik.uni-wuerzburg.de/itc-conference/itc-conference-public/-/raw/master/itc13/myskja911.pdf?inline=true

11. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process, I: Two basic methods. *Operation Research*, 1982, vol. 30, no. 1, pp. 125–147. DOI: https://doi.org/10.1287/opre.30.1.125

12. Tarasov V.N., Bahareva N.F. *Computer Modeling of Computing Systems. Theory, Algorithms, Programs*. Orenburg: OGU, 2005, 183 p. (In Russ.)

13. Jennings O.B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*, 2016, vol. 84, no. 1–2, pp. 145–202. DOI: https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y

14. Gromoll H.C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3–4, pp. 213–241. DOI: https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z

15. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3–4, pp. 269–301. DOI: https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7

Physics of Wave Processes and Radio Systems
2022, vol. 25, no. 4, pp. 33–38

DOI 10.18469/1810-3189.2022.25.4.33-38

Received 10 March 2022
Accepted 11 April 2022

Spectral solution for a delay system with hyper-Erlang distributions

Veniamin N. Tarasov, Nadezhda F. Bakhareva

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics
23, L. Tolstoy Street,
Samara, 443010, Russia

Abstract – The article is devoted to the construction of a mathematical model for delaying claims in a queue in the form of a queuing system described by two flows with the laws of distribution of time intervals shifted to the right by hyper-Erlang distributions of the second order. In the queuing theory, the study of systems G/G/1 is relevant because there is no solution in the final form for the general case. Therefore, various partial distribution laws are used as an arbitrary distribution law G in the study of such systems. In this case, the use of the shifted hyper-Erlang distribution law provides the coefficient of variation of the input flow arrival intervals and service time over the entire interval $(0, \infty)$. To solve the problem, we used the method of spectral solution of the Lindley integral equation, which plays an important role in the queuing theory. This method made it possible to obtain a solution for the average delay of requests in the queue for the considered system in a closed form. As is known, the remaining characteristics of the queuing system are derivatives of the average delay of requests in the queue.

Keywords – shifted hyper-Erlang distribution; Lindley integral equation; spectral decomposition method; Laplace transform.

Информация об авторах

Тарасов Вениамин Николаевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой программного обеспечения и управления в технических системах Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: информационные технологии, проектирование и моделирование компьютерных сетей, методы и модели исследования вычислительных систем и сетей, теория массового обслуживания.

E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Бахарева Надежда Федоровна, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и вычислительной техники Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия.

Область научных интересов: анализ производительности компьютерных сетей.

E-mail: bakhareva-nf@psuti.ru

Information about the Authors

Veniamin N. Tarasov, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Software and Management in Technical Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

Research interests: information technology, design and modeling of computer networks, methods and models for the study of computing systems and networks, queuing theory.

E-mail: tarasov-vn@psuti.ru

Nadezhda F. Bakhareva, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Informatics and Computer Engineering, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia.

Research interests: analysis of the performance of computer networks.

E-mail: bakhareva-nf@psuti.ru